

نام و نام خانوادگی:

کلاس ۲۵۳

زمان امتحان: ۴۵ دقیقه

۱- گزاره درست را ثابت کنید و برای گزاره نادرست مثال نقض بیاورید. ۵ نمره

الف) جمع دو عدد گنگ همیشه گنگ است.

ب) باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر عدد ۱ برابر ۱ است.

۲- اگر $\sqrt{10}$ عددی گنگ باشد، ثابت کنید $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ عددی گنگ است. ۵ نمره

۳- نشان دهید: $\forall x, y \in \mathbb{R} : y^2 \geq 2x(y-x+1) - 1$ ۵ نمره

۴- باقیمانده تقسیم عددهای m و n بر ۱۷ به ترتیب ۱۱ و ۵ است. باقیمانده تقسیم عدد $A = 2m - 7n$ بر عدد ۱۷ را بیست آورید. ۵ نمره

۵- ثابت کنید دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول هستند. ۵ نمره

۶- اگر $a|b$ و $b|c$ نشان دهید $a|c$ ۱ نمره

۷- اگر k یک عدد صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید اگر $2|5k+1$ آنگاه $4-20k-36|25k^2-20k-4$ ۵ نمره

سرور کنگر
۵

۱۴۰۱/۰۱/۱۵

الف) نادرست ← متناقض
 $x = 3 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}' \rightarrow x + y = 3 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 4 \in \mathbb{Q}$
 $y = 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

ب) درست ← اثبات: (1)
 $2k+1 = \text{عدد فرد} \rightarrow (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 $= \underbrace{4k(k+1)}_{2q} + 1 = 1q + 1$

2) $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}' \rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{5}) \in \mathbb{Q}'$
 ن براه خلف \rightarrow فرض خلف: $(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \in \mathbb{Q} \rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = \frac{a}{b}$ توان 2
 $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$2 + 2\sqrt{10} + 5 = \frac{a^2}{b^2}$
 $2\sqrt{10} = \frac{a^2}{b^2} - 7 = \frac{a^2 - 7b^2}{b^2} \rightarrow \sqrt{10} = \frac{a^2 - 7b^2}{2b^2}$
 $\begin{matrix} \uparrow \in \mathbb{Z} \\ \downarrow \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

$\rightarrow \sqrt{10} \in \mathbb{Q} : \text{ن}$
 این نتیجه با فرض متناقض دارد پس فرض خلف نادرست است
 طولی حکم درست است

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : y^2 \geq 2xy - 2x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$ اثبات به روشی
 $\Leftrightarrow (y^2 - 2xy + x^2) + (x^2 - 2x + 1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (y-x)^2 + (x-1)^2 \geq 0$
 بدیهه حقیقت درست چون کتبی هر دو با مثبتند زیر این بر حکم درست است

4) $\frac{m}{11} \mid \frac{17}{9} \rightarrow m = 17q + 11$
 $\frac{n}{5} \mid \frac{17}{9'} \rightarrow n = 17q' + 5$
 $A = 17m - 17n = 17(17q + 11) - 17(17q' + 5)$
 $= 289q + 187 - 289q' - 85$
 $= 17(2q - 17q') - 13 = 17K - 13$
 $= 17(K-1) - 13 + 17$
 $= 17K' + 4$
 $r = 4$

دو عدد فردي متوالي $2k+1, 2k+3$

(5)

فرض کنید $(2k+3, 2k+1) = d \rightarrow d | 2k+3 \Rightarrow d | 2k+3 - 2k-1$
 $d | 2k+1$

$d | 2 \rightarrow \begin{cases} d=2 \times \\ d=1 \checkmark \end{cases}$
 اول

غیر قابل قبول چون هر دو عدد فرد هستند پس:

همه

$(2k+3, 2k+1) = 1$ نسبت هم اول

$a | b \rightarrow b = aq$

(6)

$b | c \rightarrow c = bq' \rightarrow c = aqq' = a(qq') \Rightarrow c = ak \rightarrow a | c$

$7 | 5k+1 \xrightarrow{\text{بتران 2}} 32 | 25k^2 + 10k + 1$
 $\swarrow \times 4$
 $32 | 100k^2 + 40k + 4$
 $32 | \underline{-32}$
 $32 | 25k^2 - 20k - 31$

$32 | x - y + z$

(7)

بزرگترین
 عدد

120, 1, 1, 15

