فعالیت :

در سال های گذشته با مفهوم توان آشنا شده اید.به مثال های زیر توجه کنید.

$$(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16} \qquad (-5)^2=(-5)\times(-5)=+25 \qquad 2^3=2\times2\times2=8$$

همچنین آموختید که هر عدد به توان صفر برابر ۱ می شود. یعنی برای هر عدد غیر صفر a داریم: $a^0=1$

حال ممکن است سوالی به ذهن شما برسد که آیا توان می تواند منفی هم باشد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ برای پاسخ به این پرسش به جدول زیر دقت کنید.

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$

همانطور که مشاهده می کنید در ردیف بالای جدول الگویی است که در آن توان ها در حال کاهش یکی یکی هستند. در ردیف دوم که در اصل جواب توان های بالا است نیز الگویی مشاهده می کنید و آن تقسیم بر ۲ است. با کمی دقت در جدول می توانید قانونی را که در توان صحیح هست ،کشف کنید.

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد. آن گاه:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad a\neq 0 \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

پس حالا می توان جواب سوال مطرح شده را به دست آورد. $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

تمرین (۱):

حاصل را به دست آورید.

$(-3)^{-2}=$ $\qquad$ $4^{-1}=$ $\qquad$ $5^{-3}=$ $\qquad$ $3^{-2}=$

فعالیت :

توان منفی را می توان به صورت زیر هم نشان داد. به مثال ها دقت کنید.

$$(\frac{2}{5})^{-2}=\frac{1}{(\frac{2}{5})^2}=\frac{1}{\frac{4}{25}}=\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2 \qquad (-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}=(-\frac{1}{2})^3 \qquad 3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}=(\frac{1}{3})^4$$

همانطور که مشاهده کردید. برای محاسبه توان منفی می توان پایه را معکوس کرد و توان را به حالت مثبت نوشت.

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a\neq 0$ آن گاه: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$

تمرین (۲):

حاصل را به صورت عبارت با توان مثبت بنویسید.

$(-۶)^{-۳} =$ $\qquad$ $\left(-\frac{۲}{۷}\right)^{-۴} =$ $\qquad$ $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۵} =$ $\qquad$ $۴^{-۶} =$

فعالیت :

حال با توجه به اینکه توان منفی را هم آموختید می توانید محاسباتی مانند عبارت های زیر را انجام دهید.

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲} \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱} = \left(\frac{۲}{۱}\right)^{۲} \times \left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{\cancel{۴}^{۱}}{۱} \times \frac{۳}{\cancel{۴}_{۱}} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

$$۲^{-۱} + ۳^{-۱} = \frac{۱_{\times ۳}}{۲_{\times ۳}} + \frac{۱_{\times ۲}}{۳_{\times ۲}} = \frac{۳+۲}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

تمرین (۳):

حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$۳^{-۱} \times ۴^{-۱} =$ $\qquad$ $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۲} + \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲} =$ $\qquad$ $۲^{-۱} + ۳^{-۱} + ۴^{-۱} =$

فعالیت :

یکی از موارد مهم در محاسبه در اعداد توان‌دار پرانتز است. بود و نبود پرانتز معنی و نوع محاسبه را کاملاً متفاوت می کند. به مثال های زیر خوب دقت کنید تا این تفاوت مهم را خوب متوجه شوید.

$$(-۳)^{۴} = (-۳) \times (-۳) \times (-۳) \times (-۳) = +۸۱$$

$$-۳^{۴} = -۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = -۸۱$$

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳} = \left(\frac{۲}{۵}\right) \times \left(\frac{۲}{۵}\right) \times \left(\frac{۲}{۵}\right) = \frac{۸}{۱۲۵}$$

$$\frac{۲^{۳}}{۵} = \frac{۲ \times ۲ \times ۲}{۵} = \frac{۸}{۵}$$

در توان منفی نیز همین قوانین برقرار است. به مثال زیر دقت کنید.

$$\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۲} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲} = \left(\frac{۴}{۳}\right) \times \left(\frac{۴}{۳}\right) = \frac{۱۶}{۹}$$

$$\frac{۳^{-۲}}{۴} = \frac{\frac{۱}{۳^{۲}}}{۴} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۴}{۱}} = \frac{۱}{۹} \div \frac{۴}{۱} = \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳۶}$$

تمرین (٤):

عبارت های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید. $\qquad (x \neq ۰ \,,\, y \neq ۰)$

$xy^{-۱}$ $\qquad$ $\frac{۲^{-۱}}{۵}$ $\qquad$ $(xy)^{-۱}$ $\qquad$ $(-۲)^{-۲}$ $\qquad$ $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{-۱}$ $\qquad$ $x^{-۱}$ $\qquad$ $-۲^{-۲}$

$-\frac{۱}{۴}$ $\qquad$ $\frac{x}{y}$ $\qquad$ $\frac{۱}{x}$ $\qquad$ $\frac{۱}{xy}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۱۰}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۲}$ $\qquad$ $\frac{۱}{۴}$

فعالیت :

در پایه های هفتم و هشتم ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار را در دو حالت پایه مساوی و توان مساوی یاد گرفتید. همین قوانین در مورد توان های منفی هم برقرار است. ابتدا این قوانین را مرور می کنیم.

(a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح هستند)

ضرب با پایه های مساوی : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ضرب با توان های مساوی: $a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم با پایه های مساوی: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

تقسیم با توان های مساوی: $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

همچنین آموختید که هر عدد توان دار به توان برسد، توان ها در هم ضرب می شوند. یعنی: $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

حال به مثال های زیر دقت کنید.

$۷^{-۳} \div ۷^{-۵} = ۷^{-۳-(-۵)} = ۷^{-۳+۵} = ۷^{۲}$ $\quad$ $۴^{-۳} \times ۵^{-۳} = ۲۰^{-۳}$ $\quad$ $۵^{۳} \times ۵^{-۵} = ۵^{۳-۵} = ۵^{-۲}$

$\frac{۷^{۳}}{۷^{۵}} = ۷^{۳} \div ۷^{۵} = ۷^{۳-۵} = ۷^{-۲}$ $\quad$ $\left(۳^{۵}\right)^{-۲} = ۳^{۵\times(-۲)} = ۳^{-۱۰}$ $\quad$ $۶^{-۷} \div ۱۲^{-۷} = \left(\frac{۶}{۱۲}\right)^{-۷} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۷}$

تمرین (۵):

حاصل عبارت های زیر را به صورت توان دار بنویسید.

$۱۲^{-۳} \div ۶^{-۳} =$ $\quad$ $۳^{-۴} \times ۵^{-۴} =$ $\quad$ $(-۳)^{۲} \div (-۳)^{۵} =$ $\quad$ $۵^{۴} \times ۵^{-۳} =$

$\frac{۲^{۸} \times ۵^{۱۰}}{۲^{۴} \times ۵^{۶}} = \frac{۲^{۸}}{۲^{۴}} \times \frac{۵^{۱۰}}{۵^{۶}} =$ $\quad$ $\frac{۲^{۷}}{۲^{۱۰}} =$ $\quad$ $\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{-۳} \times ۱۲^{-۳} =$

فعالیت :

می خواهیم حاصل عبارت $۹^{۲} \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۵}$ را به صورت عددی توان‌دار به دست آوریم. طبق قوانینی که در فعالیت قبل دیده اید،توان ها مساوی اند یا پایه ها؟ما فقط در این دو حالت می توانیم ضرب را انجام دهیم. ولی در مسئله فوق نه پایه ها برابر است و نه توان ها. پس چگونه می توان این مسئله را حل کرد؟

بیایید به هر عدد با دقت بیشتری بنگریم و هرچه یاد گرفته ایم را انجام دهیم.

توان منفی در عدد $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۵}$ را می توانیم به صورت مقابل بنویسیم. $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۵} = \left(\frac{۳}{۱}\right)^{۵} = ۳^{۵}$

همچنین می توانیم عدد ۹را تجزیه کنیم ، یعنی : $۳^۲=۳\times۳=۹$ در نتیجه $۹^۲=(۳^۲)^۲=۳^۴$

حال بیایید مسئله را دوباره با این تغییرات ببینیم و حل کنیم. $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۵}\times۹^۲=۳^۵\times۳^۴=۳^۹$

در ضرب و تقسیم اعداد توان دار اگر بخواهیم پاسخ را توان دار بنویسیم باید از قوانین کلی پیروی کنیم، یعنی یا پایه ها مساوی باشند یا توان ها، اگر در جایی به مسئله ای برخوردید که پایه ها و توان ها متفاوت بود کمی فکر کنید و روشی برای یکسان کردن پایه ها یا توان ها پیدا کنید. برای درک بهتر به مثال زیر هم دقت کنید.

$$\left(\frac{۱۲}{۲۵}\right)^{-۳}\times\left(\frac{۱۶}{۳۵}\right)^{۳}=\left(\frac{۲۵}{۱۲}\right)^{۳}\times\left(\frac{۱۶}{۳۵}\right)^{۳}=\left(\frac{\cancel{۲۵}^{۵}}{\cancel{۱۲}^{۳}}\times\frac{\cancel{۱۶}^{۴}}{\cancel{۳۵}^{۷}}\right)^{۳}=\left(\frac{۲۰}{۲۱}\right)^{۳}$$

تمرین (٦):

حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$\left(\frac{۱۱}{۱۲}\right)^{۷}\times\left(\frac{۳۳}{۱۸}\right)^{-۷}=$ $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳}\times۲۵^{-۵}=$ $۸^۳\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}=$

فعالیت :

در عبارت مقابل به جای x چه عددی را می توان قرار داد تا تساوی برقرار باشد؟ $۳^x\times۳^{-۴}=۳^۳$

همانطور که مشاهده می کنید. پایه ها با هم برابرند، پس طبق قانون در ضرب باید توان ها با هم جمع شوند. در نتیجه:

$$x+(-۴)=۳\quad\Rightarrow\quad x=۳+(+۴)=۷$$

تمرین (۷):

در هر یک از تساوی های زیر x چه عددی است؟

$۳^x\div۳^{-۵}=۳^۲$ $۷^{-۴}\times۷^x=۷^{-۱۰}$

فعالیت :

به چگونگی عملیات در مثال زیر دقت کنید.

$$\frac{a^۵b^۳c^{-۴}}{a^۷b^{-۲}c^{-۳}}=\frac{a^۵}{a^۷}\times\frac{b^۳}{b^{-۲}}\times\frac{c^{-۴}}{c^{-۳}}=a^{۵-۷}\times b^{۳-(-۲)}\times c^{-۴-(-۳)}=a^{-۲}b^۵c^{-۱}$$

تمرین (۸):

حاصل را به دست آورید. $\frac{x^۵.y^۲.z}{x^{-۲}.y^۷.z^۳}=$

تمرین (۱): حاصل را به دست آورید.

$(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$ $4^{-1}=\frac{1}{4}$ $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$ $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

تمرین (۲): حاصل را به صورت عبارت با توان مثبت بنویسید.

$(-6)^{-3}=\left(-\frac{1}{6}\right)^3$ $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4}=\left(-\frac{7}{2}\right)^4$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}=\left(\frac{4}{3}\right)^5$ $4^{-6}=\left(\frac{1}{4}\right)^6$

تمرین (۳):

حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$2^{-1}+3^{-1}+4^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{5}{2}\right)^{2}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^{2}=\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}$$

$$3^{-1}\times4^{-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

تمرین (٤):

عبارت های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید. $(x\neq 0,\ y\neq 0)$

xy^{-1} $\frac{2^{-1}}{5}$ $(xy)^{-1}$ $(-2)^{-2}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ x^{-1} -2^{-2}

$-\frac{1}{4}$ $\frac{x}{y}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{xy}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{4}$

تمرین (٥):

حاصل عبارت های زیر را به صورت توان دار بنویسید.

$12^{-3}\div6^{-3}=2^{-3}$ $3^{-4}\times5^{-4}=15^{-4}$ $(-3)^2\div(-3)^5=(-3)^{2-5}=(-3)^{-3}$ $5^4\times5^{-3}=5^{4-3}=5^1$

$$\frac{2^8\times5^{10}}{2^4\times5^6}=\frac{2^8}{2^4}\times\frac{5^{10}}{5^6}=2^4\times5^4=20^4$$

$$\frac{2^7}{2^{10}}=2^7\div2^{10}=2^{7-10}=2^{-3}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\times12^{-3}=\left(-\frac{2}{\cancel{3}_{1}}\times\cancel{12}^{4}\right)^{-3}=(-8)^{-3}$$

تمرین (٦):

حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$۸^{۳}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}=(۲^{۳})^{۳}\times\left(\frac{۲}{۱}\right)^{۳}=۲^{۹}\times۲^{۳}=۲^{۹+۳}=۲^{۱۲}$$

$$\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۳}\times۲۵^{-۵}=\left(\frac{۵}{۱}\right)^{-۳}\times(۵^{۲})^{-۵}=۵^{-۳}\times۵^{-۱۰}=۵^{-۳-۱۰}=۵^{-۱۳}$$

$$\left(\frac{۱۱}{۱۲}\right)^{۷}\times\left(\frac{۳۳}{۱۸}\right)^{-۷}=\left(\frac{۱۱}{۱۲}\right)^{۷}\times\left(\frac{۱۸}{۳۳}\right)^{۷}=\left(\frac{\cancel{۱۱}^{۱}}{\cancel{۱۲}^{۲}}\times\frac{\cancel{۱۸}^{\cancel{۳}^{۱}}}{\cancel{۳۳}^{\cancel{۳}^{۱}}}\right)^{۷}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷}$$

تمرین (۷):

در هر یک از تساوی های زیر x چه عددی است؟

$$۳^{x}\div۳^{-۵}=۳^{۲}$$
$$x-(-۵)=۲$$
$$x=۲+(-۵)=-۳$$

$$۷^{-۴}\times۷^{x}=۷^{-۱۰}$$
$$-۴+x=-۱۰$$
$$x=-۱۰+۴=-۶$$

تمرین (۸):

حاصل را به دست آورید.

$$\frac{x^{۵}.y^{۲}.z}{x^{-۲}.y^{۷}.z^{۳}}=\frac{x^{۵}}{x^{-۲}}\times\frac{y^{۲}}{y^{۷}}\times\frac{z}{z^{۳}}=x^{۵-(-۲)}.y^{۲-۷}.z^{۱-۳}=x^{۷}.y^{-۵}.z^{-۲}$$

فعالیت :

شاید تا کنون عبارت « سال نوری» را شنیده باشید. سال نوری مسافتی است که نور در مدت یک سال طی می کند.می دانیم که نور **۳۰۰,۰۰۰** کیلومتر را در یک ثانیه طی می کند.پس با محاسبات زیر می توان این مسافت را حساب کرد.

سال به ثانیه $۸۶۴۰۰ \times ۳۶۵ = ۳۱۵۳۶۰۰۰ \leftarrow$ روز به ثانیه $۳۶۰۰ \times ۲۴ = ۸۶۴۰۰ \leftarrow$ ساعت به ثانیه $۶۰ \times ۶۰ = ۳۶۰۰$

مسافتی که نور در یک سال طی می کند به کیلومتر $۳۱۵۳۶۰۰۰ \times ۳۰۰۰۰۰ = ۹۴۶۰۸۰۰۰۰۰۰۰۰$

می توانیم برای سهولت این عدد را رند کنیم : کیلومتر ۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

خواندن این عدد خیلی بزرگ بسیار سخت است، حال اگر بخواهیم با این عدد محاسباتی انجام دهیم ، بسیار دشوارتر می شود. به عنوان مثال فاصله ستاره Icarus از زمین را به طور تخمینی ۹میلیارد سال نوری تخمین زده اند.حال اگر بخواهیم این فاصله را به کیلومتر بنویسیم، کار تا حدی غیرممکن به نظر می رسد.

در اینجاست که ریاضی به کمک می آید و برای حل این مشکل چاره ای می اندیشد. به عبارت های زیر دقت کنید.

$۱۰^{۵} = ۱۰۰۰۰۰$ $\quad$ $۱۰^{۴} = ۱۰۰۰۰$ $\quad$ $۱۰^{۳} = ۱۰۰۰$ $\quad$ $۱۰^{۲} = ۱۰۰$ $\quad$ $۱۰^{۱} = ۱۰$

بین توان عدد ۱۰ و تعداد صفر های پاسخ چه رابطه ای مشاهده می کنید؟از همین قانون می توانیم استفاده کنیم و عددهای خیلی بزرگ را نشان دهیم.اینگونه نمایش را نماد علمی می نامند.

حال به همان سال نوری بر می گردیم. $۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۹ \times ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۹ \times ۱۰^{۱۲}$

به مثال های زیر دقت کنید تا روش نوشتن نماد علمی عددهای بزرگ را خوب یاد بگیرید.

$۶۰۰۰۰ = ۶ \times ۱۰۰۰۰ = ۶ \times ۱۰^{۴}$ $\quad$ $۵۰۰ = ۵ \times ۱۰۰ = ۵ \times ۱۰^{۲}$

$۷۵۰۰ = ۷۵ \times ۱۰۰ = ۷/۵ \times ۱۰۰۰ = ۷/۵ \times ۱۰^{۳}$

$۴۵۲۰۰۰۰ = ۴۵۲ \times ۱۰۰۰۰ = ۴/۵۲ \times ۱۰۰۰۰۰۰ = ۴/۵۲ \times ۱۰^{۶}$

اگر خوب به این مثال ها دقت کرده باشید. عددی که در ابتدا نوشته می شود می بایست بیشتر یا مساوی ۱ و کمتر از ۱۰ باشد. به همین خاطر بعضی عددها با اعشار نوشته می شود. شما می توانید قانونی برای خودتان کشف کنید تا بدون راه حل هم بتوانید نماد علمی را بنویسید.

$۶۵۲۴۰۰۰ = ۶/۵۲۴ \times ۱۰^{۶}$

تمرین (۱):

عددهای زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

$۵۸۹۸۰۰۰۰۰۰۰ =$ $\quad$ $۷۵۴۰۰۰۰۰ =$ $\quad$ $۵۲۰۰۰ =$ $\quad$ $۶۰۰۰۰۰۰۰۰ =$

فعالیت :

حال اگر عددی به شکل نمادی علمی دیدیم می توانیم آن را به صورت اصلی هم نمایش دهیم.به مثال های زیر دقت کنید.

$۵/۶\times۱۰^{۴}=۵/۶\times۱۰۰۰۰=۵۶۰۰۰$ $\qquad$ $۷\times۱۰^{۵}=۷\times۱۰۰۰۰۰=۷۰۰۰۰۰$

$۱/۲۳۵\times۱۰^{۵}=۱/۲۳۵\times۱۰۰۰۰۰=۱۲۳۵۰۰$

به تعداد ارقام اعشاری و تعداد صفرهای پاسخ دقت کنید تا بتوانید قانونی هم برای آن پیدا کنید.

تمرین (۲):

نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید.

$۸/۵۲\times۱۰^{۳}=$ $\qquad$ $۵/۸\times۱۰^{۶}=$ $\qquad$ $۴\times۱۰^{۷}=$

فعالیت :

قطر یک سلول تقریباً ۰/۰۰۰۰۰۸میلی متر است. این عدد بسیار کوچک است و خواندن و محاسبه آن هم تا حدی مشکل است.نماد علمی برای این اعداد بسیار کوچک هم راهکاری دارد .به عبارت های زیر دقت کنید.

$۰/۰۰۱=\frac{۱}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰^{۳}}=۱۰^{-۳}$ $\qquad$ $۰/۰۱=\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰^{۲}}=۱۰^{-۲}$ $\qquad$ $۰/۱=\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰^{۱}}=۱۰^{-۱}$

باز هم بین توان عدد ۱۰ و تعداد صفرها چه رابطه ای مشاهده می کنید؟ همانطور که می بینید در این اعداد توان ها منفی هستند.

حال به قطر سلول برمی گردیم. $۰/۰۰۰۰۰۸=۸\times۰/۰۰۰۰۰۱=۸\times۱۰^{-۶}$

به مثال های زیر دقت کنید.

$۰/۰۰۵۲=۵۲\times۰/۰۰۰۱=۵/۲\times۰/۰۰۱=۵/۲\times۱۰^{-۳}$ $\qquad$ $۰/۰۰۰۶=۶\times۰/۰۰۰۱=۶\times۱۰^{-۴}$

همانطور که مشاهده می کنید عدد سمت چپ حتماً باید بیشتر از ۱ و کمتر از ۱۰ باشد. پس به نوشتن عدد به صورت اعشاری و تعداد صفرها و توان عدد ۱۰ دقت کنید تا قانونی هم برای اعداد بسیار کوچک کشف کنید.

$۰/۵۲۳۴=۵/۲۳۴\times۱۰^{-۱}$ $\qquad$ $۰/۰۰۰۰۴۷۱=۴/۷۱\times۱۰^{-۵}$ $\qquad$ $۰/۰۰۴۲=۴/۲\times۱۰^{-۳}$

تمرین (۳):

هر یک از عددهای زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

$۰/۰۱۲۵۸=$ $\qquad$ $۰/۰۰۰۰۰۰۷۶=$ $\qquad$ $۰/۰۰۰۰۵۹=$ $\qquad$ $۰/۰۰۰۷=$

فعالیت :

حال اگر عددی با نماد علمی را بخواهیم به صورت اعشاری نمایش دهیم به صورت زیر عمل می کنیم.

$۵\times۱۰^{-۴}=۵\times۰/۰۰۰۱=۰/۰۰۰۵$

$$۳/۷۵\times ۱۰^{-۵} = ۳/۷۵ \times ۰/۰۰۰۰۱ = ۰/۰۰۰۰۳۷۵$$

در اینجا هم میتوانید با توجه به توان منفی و صفرها برای خود قوانینی کشف کنید.

تمرین(٤) :

نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$۵/۷۳\times ۱۰^{-۶} =$ $\qquad$ $۳/۸\times ۱۰^{-۴} =$ $\qquad$ $۶\times ۱۰^{-۲} =$

فعالیت :

نماد علمی روشی است که به کمک آن اعداد بسیار بزرگ(ماکرو) و اعداد بسیار کوچک(میکرو) نمایش داده می شوند.

«به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a\times ۱۰^{n}$ است، که در آن $۱\leq a<۱۰$ و n عددی صحیح است.»

برای نوشتن نماد علمی هر عدد می توانید برای خود قوانینی کشف کنید. برای درک بهتر در اینجا روش هایی برای این کار پیشنهاد می شود.

الف) اعداد بزرگ:

$$۴\underbrace{۷۲۰۰۰}_{\text{تعداد}=۵} = ۴/۷۲ \times ۱۰^{۵}$$

$$۵\underbrace{۰۰۰۰۰۰}_{\text{تعداد}=۶} = ۵ \times ۱۰^{۶}$$

ب) اعداد کوچک:

$$۰/\underbrace{۰۰۰۳}_{\text{تعداد}=۴}۴۲ = ۳/۴۲ \times ۱۰^{-۴}$$

$$۰/\underbrace{۰۰۰۰۴}_{\text{تعداد}=۵} = ۴ \times ۱۰^{-۵}$$

با استفاده از نماد علمی می توان محاسبات را نیز بهتر انجام داد. به همان مثال سال نوری و فاصله ستاره Icarus برمیگردیم.

سال نوری : $۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۹\times ۱۰^{۱۲}$ $\qquad$ ۹ میلیارد : $۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۹\times ۱۰^{۹}$

$$۹\times ۱۰^{۱۲}\times ۹\times ۱۰^{۹} = ۸۱\times ۱۰^{۱۲}\times ۱۰^{۹} = ۸۱\times ۱۰^{۲۱} = ۸/۱\times ۱۰^{۲۲}$$

دقت کنید که در ضرب اعداد توان دار از قانون پایه ها مساوی استفاده کردیم. و همچنین چون **۸۱** از **۱۰**بزرگتر بود باید اعشاری نمایش می دادیم و به همین خاطر یکی به توان **۱۰** اضافه شد.

تمرین (۵):

حاصل هرعبارت را به صورت نماد علمی بنویسید.

$\dfrac{۱۶\times ۱۰^{۱۰}}{۸\times ۱۰^{۶}} =$ $\qquad$ $۸\times ۱۰^{۶}\times ۹\times ۱۰^{۲} =$ $\qquad$ $۳\times ۱۰^{۴}\times ۲\times ۱۰^{۵} =$

$\dfrac{۳\times ۱۰^{۷}\times ۴\times ۱۰^{-۵}}{۶\times ۱۰^{-۵}} =$ $\qquad$ $۶\times ۱۰^{-۴}\times ۸\times ۱۰^{-۶} =$

تمرین(۱):

عددهای زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

$۵۸۹۸۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۵/۸۹۸ \times ۱۰^{۱۰}$ $۷۵۴۰۰۰۰۰ = ۷/۵۴ \times ۱۰^{۷}$ $۵۲۰۰۰ = ۵/۲ \times ۱۰^{۴}$ $۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۶ \times ۱۰^{۹}$

تمرین(۲):

نمایش اصلی عددهای زیر را بنویسید.

$۸/۵۲ \times ۱۰^{۳} = ۸۵۲۰$ $۵/۸ \times ۱۰^{۶} = ۵۸۰۰۰۰۰$ $۴ \times ۱۰^{۷} = ۴۰۰۰۰۰۰۰$

تمرین(۳)

هر یک از عددهای زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

$۰/۰۱۲۵۸ = ۱/۲۵۸ \times ۱۰^{-۲}$ $۰/۰۰۰۰۰۰۷۶ = ۷/۶ \times ۱۰^{-۷}$ $۰/۰۰۰۰۵۹ = ۵/۹ \times ۱۰^{-۵}$ $۰/۰۰۰۷ = ۷ \times ۱۰^{-۴}$

تمرین(٤)

نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$۵/۷۳ \times ۱۰^{-۶} = ۰/۰۰۰۰۰۵۷۳$ $۳/۸ \times ۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۰۳۸$ $۶ \times ۱۰^{-۲} = ۰/۰۶$

تمرین(۵)

حاصل هرعبارت را به صورت نماد علمی بنویسید.

$\frac{۱۶ \times ۱۰^{۱۰}}{۸ \times ۱۰^{۶}} = ۲ \times ۱۰^{۴}$ $۸ \times ۱۰^{۶} \times ۹ \times ۱۰^{۲} = ۷۲ \times ۱۰^{۸} = ۷/۲ \times ۱۰^{۹}$ $۳ \times ۱۰^{۴} \times ۲ \times ۱۰^{۵} = ۶ \times ۱۰^{۹}$

$\frac{۳ \times ۱۰^{۷} \times ۴ \times ۱۰^{-۵}}{۶ \times ۱۰^{-۵}} = \frac{۱۲ \times ۱۰^{۲}}{۶ \times ۱۰^{-۵}} = ۲ \times ۱۰^{۲-(-۵)} = ۲ \times ۱۰^{۷}$ $۶ \times ۱۰^{-۴} \times ۸ \times ۱۰^{-۶} = ۴۸ \times ۱۰^{-۱۰} = ۴/۸ \times ۱۰^{-۹}$

فعالیت :

به تساوی های مقابل دقت کنید. $(-۳)^۲=(-۳)\times(-۳)=۹$, $۳^۲=۳\times۳=۹$

همانطور که مشاهده می کنید. حاصل هر دو تساوی بالا برابر ۹ شد.در اینجا می گوییم : ۳ و ۳- ریشه های دوم عدد ۹هستند.

ریشه های دوم عدد ۹ برابرند با: $-\sqrt{۹}=-۳$, $\sqrt{۹}=۳$

می خواهیم ریشه های دوم عدد ۷ را بنویسیم.دقت کنید چون ۷ جذر دقیق ندارد به همان صورت رادیکالی می نویسیم.

$-\sqrt{۷}$, $\sqrt{۷}$

اعداد منفی ریشه دوم ندارند. زیرا مربع هرعدد هیچگاه منفی نمی شود،به عنوان مثال عدد ۱۶- ریشه دوم ندارد.

زیرا پاسخ هیچکدام برابر ۱۶- نمی شود. $۴^۲=۴\times۴=۱۶$, $(-۴)^۲=(-۴)\times(-۴)=+۱۶$

«به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه های دوم عدد b می نامند.»

تمرین (۱):

الف) ریشه های دوم ۴۹ را بنویسید. ب) ریشه های دوم ۳۱ را بنویسید.

فعالیت :

به عبارت $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}$ دقت کنید. با توجه به مطلبی که در قدرمطلق خواندید همواره داریم $\sqrt{a^۲}=|a|$ در نتیجه عبارت به صورت مقابل تبدیل می شود. $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|$

حال با توجه به علامت x و y می توان حالت های مختلفی در نظر گرفت:

اگر $x>۰$ و $y>۰$ باشد: در این حالت عدد x مثبت است و عدد y هم مثبت است .پس طبق قوانین قدر مطلق داریم:

$$\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|=x+y$$

اگر $x>۰$ و $y<۰$ باشد: در این حالت عدد x مثبت است و عدد y منفی است .پس طبق قوانین قدر مطلق داریم:

$$\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|=x+(-y)=x-y$$

تمرین (۲):

حاصل عبارت $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}$ را درحالت های زیر به دست آورید.

الف) اگر $x<۰$ و $y>۰$ باشد:

ب) اگر $x<۰$ و $y<۰$ باشد:

فعالیت :

به مکعب (توان ۳)عددهای مقابل دقت کنید. $(-۵)^۳=(-۵)\times(-۵)\times(-۵)=-۱۲۵$, $۵^۳=۵\times۵\times۵=۱۲۵$

همانطور که مشاهده می کنید. مکعب عدد۵ با مکعب عدد ۵- متفاوت است. در اینجا عدد ۵ را به توان ۳ رساندیم و حاصل ۱۲۵ شد ، در نتیجه می گوییم ریشه سوم عدد۱۲۵ برابر ۵ است و به صورت مقابل نشان می دهیم. $\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$

وهمچنین ریشه سوم عدد ۱۲۵- برابر با ۵- است. $\sqrt[۳]{-۱۲۵}=-۵$

دیدید که برخلاف ریشه دوم، ریشه سوم فقط یکی است و همچنین ریشه سوم اعداد منفی هم قابل محاسبه است.

برای درک بهتر به مثال های زیر دقت کنید. $۲^۳=۲\times۲\times۲=۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{۸}=۲$

$$\left(-\frac{۳}{۴}\right)^۳=\left(-\frac{۳}{۴}\right)\times\left(-\frac{۳}{۴}\right)\times\left(-\frac{۳}{۴}\right)=-\frac{۲۷}{۶۴} \Rightarrow \sqrt[۳]{-\frac{۲۷}{۶۴}}=-\frac{۳}{۴}$$

«به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[۳]{b}$ نشان می دهیم. هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.»

تمرین (۳): تساوی های زیر را کامل کنید.

$\sqrt[۳]{(-۷)^۳}=$ $\sqrt[۳]{-۱}=$ $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۲۵}}=$ $\sqrt[۳]{-۶۴}=$ $\sqrt[۳]{۸}=$

فعالیت :

به ضرب وتقسیم رادیکالها در زیر دقت کنید.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۹}}&=\sqrt{\frac{۳۶}{۹}}=\sqrt{۴}=۲\\ \frac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۹}}&=\frac{۶}{۳}=۲\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{۹}\times\sqrt{۴}&=\sqrt{۹\times۴}=\sqrt{۳۶}=۶\\ \sqrt{۹}\times\sqrt{۴}&=۳\times۲=۶\end{aligned}\right\}$$

با توجه به تساوی های بالا می توان نتیجه گرفت که درضرب و تقسیم رادیکالها می توان اول ضرب و تقسیم اعداد (بدون در نظر گرفتن رادیکال)را انجام داد و بعد رایکال را اعمال کرد. این کار برای وقتی که دو عدد جذر دقیق ندارند بسیار مفید است.

به مثال های زیر دقت کنید.

$$\frac{\sqrt{۱۲۸}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۱۲۸}{۲}}=\sqrt{۶۴}=۸ \qquad \sqrt{۳}\times\sqrt{۱۲}=\sqrt{۳\times۱۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

تمرین (٤):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$\frac{\sqrt{۷۲}}{\sqrt{۸}}=$ $\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۴۰}=$ $\sqrt{۲۷}\times\sqrt{۳}=$

فعالیت :

حال بررسی می کنیم که آیا قوانین ضرب و تقسیم برای ریشه های سوم هم برقرار است؟

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{8\times27}=\sqrt[3]{216}=6\\ \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}=2\times3=6\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\dfrac{216}{8}}=\sqrt[3]{27}=3\\ \dfrac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{6}{2}=3\end{array}\right\}$$

در نتیجه می توان این قوانین را در ریشه سوم هم به کار برد.برای درک بهتر به مثال های زیر دقت کنید.

$$\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\frac{135}{5}}=\sqrt[3]{27}=3$$

$$\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{16\times4}=\sqrt[3]{64}=4$$

تمرین (۵):

حاصل را به دست آورید.

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{-108}=$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-3}\times\sqrt[3]{9}=$

فعالیت :

به عبارت زیر و عملیات آن با دقت نگاه کنید.

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

اگر دقت کرده باشید در تبدیل عدد زیر رادیکال به حاصل ضرب ، اولین عدد طوری تعیین شده است که جذر دقیق داشته باشد.وبدین صورت می توان حاصل رادیکال اول را به دست آورد.به مثال های زیر که هم برای ریشه های دوم و سوم نوشته شده است. دقت کنید.

$$\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=2\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$$

باز هم دقت کنید که چه در ریشه دوم و چه در ریشه سوم عدد اول باید جواب دقیق داشته باشد.

تمرین (٦):

هر کدام را مانند فعالیت قبل به صورت ضرب عدد در رادیکال بنویسید.

$\sqrt[3]{40}=$ $\qquad$ $\sqrt[3]{54}=$ $\qquad$ $\sqrt{32}=$ $\qquad$ $\sqrt{75}=$

طراحی واجرا: فرامرز انتظاری $\qquad$ ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

خود آموز شماره: ۹۰۱۳ **پایه: نهم** **پاسخ نامه** **درس: ریشه گیری**

تمرین (۱):

الف) ریشه های دوم ۴۹ را بنویسید. $\sqrt{۴۹}=۷\,,\,-\sqrt{۴۹}=-۷$ ب) ریشه های دوم ۳۱ را بنویسید. $\sqrt{۳۱}\,,\,-\sqrt{۳۱}$

تمرین (۲):

حاصل عبارت $\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}$ را درحالت های زیر به دست آورید.

الف) اگر $x<۰$ و $y>۰$ باشد: در این حالت عدد x منفی است و عدد y هم مثبت است .پس طبق قوانین قدر مطلق داریم:
$$\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|=-x+y$$

ب) اگر $x<۰$ و $y<۰$ باشد: در این حالت عدد x منفی است و عدد y هم منفی است .پس طبق قوانین قدر مطلق داریم:
$$\sqrt{x^۲}+\sqrt{y^۲}=|x|+|y|=-x+(-y)=-x-y$$

تمرین (۳): تساوی های زیر را کامل کنید.

$\sqrt[۳]{(-۷)^۳}=-۷$ $\sqrt[۳]{-۱}=-۱$ $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۲۵}}=\frac{۱}{۵}$ $\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$ $\sqrt[۳]{۸}=۲$

تمرین (٤):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$\frac{\sqrt{۷۲}}{\sqrt{۸}}=\sqrt{\frac{۷۲}{۸}}=\sqrt{۹}=۳$ $\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۴۰}=\sqrt{۱۰\times۴۰}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$ $\sqrt{۲۷}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۲۷\times۳}=\sqrt{۸۱}=۹$

تمرین (۵):

حاصل را به دست آورید.

$\frac{\sqrt[۳]{۵۴}}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۵۴}{۲}}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$ $\sqrt[۳]{-۳}\times\sqrt[۳]{۹}=\sqrt[۳]{(-۳)\times۹}=\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

$\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{-۱۰۸}=\sqrt[۳]{۲\times(-۱۰۸)}=\sqrt[۳]{-۲۱۶}=-۶$

تمرین (٦):

هر کدام را مانند فعالیت قبل به صورت ضرب عدد در رادیکال بنویسید.

$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۱۶\times۲}=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$ $\sqrt{۷۵}=\sqrt{۲۵\times۳}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$

$\sqrt[۳]{۴۰}=\sqrt[۳]{۸\times۵}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۵}=۲\sqrt[۳]{۵}$ $\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲۷\times۲}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۲}=۳\sqrt[۳]{۲}$

طراحی و اجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

فعالیت :

در فعالیت های قبل یاد گرفتید که می توان رادیکال ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. برای این کار هم دلیل قانع کننده ای داشتیم. چون پاسخ در هر دو حالت یکی به دست می آمد. به مثال های زیر توجه کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۴}\times\sqrt{۹}=۲\times۳=۶\\ \sqrt{۴\times۹}=\sqrt{۳۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\ ۶=۶\ \Rightarrow\ \sqrt{۴}\times\sqrt{۹}=\sqrt{۴\times۹}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۴}}=\dfrac{۶}{۲}=۳\\ \sqrt{\dfrac{۳۶}{۴}}=\sqrt{۹}=۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۳=۳\ \Rightarrow\ \dfrac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۴}}=\sqrt{\dfrac{۳۶}{۴}}$$

حال می خواهیم بررسی کنیم که آیا جمع و تفریق رادیکال ها را می توان مانند ضرب و تقسیم انجام داد. به مثال های زیر دقت کنید.

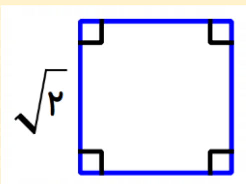
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۴}+\sqrt{۹}=۲+۳=۵\\ \sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}\end{array}\right\}\Rightarrow\ ۵\neq\sqrt{۱۳}\ \Rightarrow\ \sqrt{۴}+\sqrt{۹}\neq\sqrt{۴+۹}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۶۴}-\sqrt{۳۶}=۸-۶=۲\\ \sqrt{۶۴-۳۶}=\sqrt{۲۸}\end{array}\right\}\Rightarrow\ ۲\neq\sqrt{۲۸}\ \Rightarrow\ \sqrt{۶۴}-\sqrt{۳۶}\neq\sqrt{۶۴-۳۶}$$

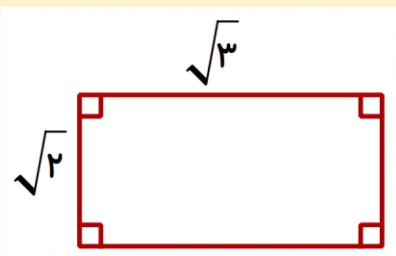
مشاهده می کنید که در پاسخ رادیکال ها تساوی برقرار نیست. پس نتیجه می گیریم با این شیوه نمی توان در رادیکال ها جمع و تفریق انجام داد.

برای اینکه بتوانیم راهی برای این مشکل پیدا کنیم. به مسئله زیر دقت کنید.

« در هر شکل محیط را به دست آورید.»



$$P=\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$



$$P=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}$$

به دست آوردن محیط در شکل های بالا با چه مبحثی از ریاضی که قبلاً یاد گرفته اید، شباهت دارد؟ بله بسیار شبیه عبارت های جبری است. در نتیجه برای جمع یا تفریق عبارت های رادیکالی همانند عبارت های جبری عمل می کنیم. به مثال های زیر دقت کنید.

$$\underline{۳\sqrt{۵}}+\underline{\underline{۲\sqrt{۳}}}+\underline{۴\sqrt{۵}}+\underline{\underline{۳\sqrt{۳}}}=۷\sqrt{۵}+۵\sqrt{۳}$$

$$\underline{۵\sqrt{۲}}-\underline{\underline{۳\sqrt{۷}}}-\underline{\underline{۴\sqrt{۷}}}-\underline{۳\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}-۷\sqrt{۷}$$

در جمع و تفریق رادیکال ها ،عبارت هایی که قسمت رادیکالی یکسانی داشته باشند ، جمع می شوند، دقت داشته باشید که از جمع اعداد صحیح استفاده می کنیم، پس علامت بسیار مهم است.با توجه به اینکه ریشه سوم را یاد گرفته اید باید دقت کنید که به عنوان مثال $\sqrt{۲}$ با $\sqrt[۳]{۲}$ یکسان نیست.

$$\underline{۲\sqrt{۲}}-\underline{\underline{۵\sqrt[۳]{۲}}}-\underline{۵\sqrt{۲}}-\underline{\underline{۲\sqrt[۳]{۲}}}=-۳\sqrt{۲}-۷\sqrt[۳]{۲}$$

تمرین (۱):

حاصل جمع های زیر را بنویسید.

$$۲\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۳}+۸\sqrt[۳]{۳}-۵\sqrt{۳}=$$

$$۳\sqrt{۷}-۴\sqrt{۵}+۸\sqrt{۷}+۲\sqrt{۵}=$$

$$۲\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt{۲}+۵\sqrt[۳]{۲}-۱۰\sqrt[۳]{۲}=$$

$$-۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۱۰}-۵\sqrt{۱۰}-۴\sqrt{۵}=$$

$$۲\sqrt{xy}-۵\sqrt{x}+۳\sqrt{y}-۴\sqrt{xy}+۳\sqrt{x}+۲\sqrt{y}=$$

فعالیت :

می خواهیم عبارت مقابل را ساده کنیم.

$$\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}=$$

اول اینکه اجازه نداریم جمع و تفریق را معمولی انجام دهیم. از طرفی رادیکال ها یکسان نیستند که بتوانیم مانند فعالیت قبل انجام دهیم. در اینجا باید اعداد زیر رادیکال را مورد بررسی قرار دهیم. به عملیات های زیر دقت کنید.

$$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۳۶\times۲}=\sqrt{۳۶}\times\sqrt{۲}=۶\times\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۱۶\times۲}=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲}=۴\times\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times۲}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۲}=۳\times\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

اگر دقت کرده باشید ، این مطلب در درس قبلی ارائه شده بود . حال با جا گذاری می توانیم عبارت را ساده کنیم.

$$\sqrt{۷۲}-\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۸}=۶\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

به مثال زیر دقت کنید. توجه کنید که ریشه سوم به چه صورت حل شده است.

$$\sqrt{۱۲}+\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt{۷۵}+\sqrt[۳]{۵۴}=$$

$$\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۸\times۲}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times۳}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

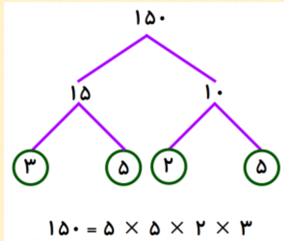
$$\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲۷\times۲}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۲}=۳\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt{۷۵}=\sqrt{۲۵\times۳}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۱۲}+\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt{۷۵}+\sqrt[۳]{۵۴}=\underline{۲\sqrt{۳}}+\underline{\underline{۲\sqrt[۳]{۲}}}-\underline{۵\sqrt{۳}}+\underline{\underline{۳\sqrt[۳]{۲}}}=-۳\sqrt{۳}+۵\sqrt[۳]{۲}$$

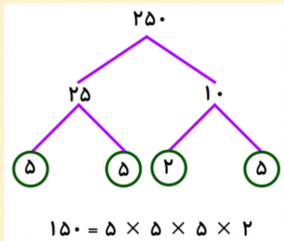
فعالیت :

در فعالیت قبلی در تبدیل اعداد رادیکالی به صورت ضرب عددی صحیح در رادیکال، ممکن است یافتن مربع کامل یا مکعب کامل در بعضی از اعداد مشکل به نظر برسد. در این موارد می توانید از تجزیه به شمارنده های اول نیز استفاده کنید. تجزیه به شمارنده های اول را در پایه هفتم و از روش درختی یاد گرفته اید.به مثال های زیر دقت کنید.



$$\sqrt{۱۵۰}=\sqrt{۵\times۵\times۲\times۳}=\sqrt{۵^{۲}\times۲\times۳}=\sqrt{۵^{۲}}\times\sqrt{۶}=۵\sqrt{۶}$$

در این مثال از قانون $\sqrt{a^{۲}}=|a|$ استفاده کرده ایم. $\sqrt{۵^{۲}}=|۵|=۵$



$$\sqrt[۳]{۲۵۰}=\sqrt[۳]{۵\times۵\times۵\times۲}=\sqrt[۳]{۵^{۳}\times۲}=\sqrt[۳]{۵^{۳}}\times\sqrt[۳]{۲}=۵\sqrt[۳]{۲}$$

در این مثال نیز از قانون $\sqrt[۳]{a^{۳}}=a$ استفاده شده است. $\sqrt[۳]{۵^{۳}}=۵$

تمرین (۲):

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید.

$\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}=$

$\sqrt{۹۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۷۲}=$

$\sqrt{۲۰}+\sqrt[۳]{۸۱}-\sqrt{۴۵}+\sqrt[۳]{۱۹۲}=$

$\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۲۴}-\sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۸۱}=$

فعالیت :

به ساده کردن عبارت زیر دقت کنید. روش همانند قبل است البته با کمی تغییرات

$$۳\sqrt{۱۸}+۲\sqrt{۷۵}-۴\sqrt{۸}-۳\sqrt{۴۸}=$$

$\sqrt{۷۵}=\sqrt{۲۵\times۳}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$

$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times۲}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$

$\sqrt{۴۸}=\sqrt{۱۶\times۳}=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$

$\sqrt{۸}=\sqrt{۴\times۲}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$

$$۳\sqrt{۱۸}+۲\sqrt{۷۵}-۴\sqrt{۸}-۳\sqrt{۴۸}=۳(۳\sqrt{۲})+۲(۵\sqrt{۳})-۴(۲\sqrt{۲})-۳(۴\sqrt{۳})=$$
$$\underline{۹\sqrt{۲}}+\underline{\underline{۱۰\sqrt{۳}}}-\underline{۸\sqrt{۲}}-\underline{\underline{۱۲\sqrt{۳}}}=\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$$

همانطور که مشاهده می کنید تنها اتفاقی که رخ داده عددهای بیرون رادیکال در هم ضرب شده اند.

حال به ضرب مقابل دقت کنید. $\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲})=$

$$\sqrt{۴۸}=\sqrt{۱۶\times ۳}=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۴۸}(\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲})=۴\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲})=۴\sqrt{۳}(\sqrt{۳})+۴\sqrt{۳}(۳\sqrt{۲})=۴\sqrt{۹}+۱۲\sqrt{۶}=$$
$$۴\times ۳+۱۲\sqrt{۶}=۱۲+۱۲\sqrt{۶}$$

دقت داشته باشید که در ضرب مجاز هستیم رادیکال ها را در هم ضرب کنیم.

تمرین (۳):

حاصل عبارت ها ی زیر را ساده کنید.

$۵\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۵۴}-۴\sqrt[۳]{۱۲۸}=$ $\quad$ $۳\sqrt{۱۸}-۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۵۰}=$

$(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})=$ $\quad$ $\sqrt{۵۰}(\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲})=$

فعالیت :

گاهی اوقات پیش می آید به کسری بر می خوریم که مخرج آن رادیکالی است. مانند $\frac{۵}{\sqrt{۳}}$ در این صورت کمی محاسبات دشوار می شود یعنی باید **۵** را بر $\sqrt{۳}$ تقسیم کنیم. ولی می توان با راه حلی بسیار جالب و ساده این کسر را به صورتی نوشت که مخرج آن رادیکالی نباشد. به این کار گویا کردن مخرج کسر می گویند.

$$\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۵}{\sqrt{۳}}\times ۱=\frac{۵}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{\sqrt{۹}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

دقت داشته باشید که حاصل ضرب هر عدد در یک برابر خود عدد می شود. پس با این ضرب تغییری در مقدار کسر ایجاد نمی گردد. حال به جای یک ، کسر $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$ را که برابر یک است قرار می دهیم. چرا صورت و مخرج را $\sqrt{۳}$ انتخاب کردیم؟

به مثال های زیر دقت کنید.

$$(x>۰)\qquad \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{۲x}}{\sqrt{x^{۲}}}=\frac{\sqrt{۲x}}{x}$$

$$\frac{۷}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۷}{۲\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۷\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۲۵}}=\frac{۷\sqrt{۵}}{۱۰}$$

تمرین (٤):

مخرج کسر های زیر را گویا کنید.

$(x>۰)$ $\quad$ $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳x}}=$ $\quad$ $\frac{۳}{۲\sqrt{۷}}=$ $\quad$ $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=$ $\quad$ $\frac{۵}{\sqrt{۶}}=$

فعالیت :

برای گویا کردن مخرج کسرهایی که ریشه سوم هستند کمی بیشتر باید دقت کنید. به مثال های زیر توجه کنید و روش را برای خودتان توضیح دهید. به تفاوت ها و علت این تفاوت ها دقت کنید.

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵^۲}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۵}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۵^۳}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۵}}{۵}$$

و

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۳}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۲^۲}}{۲}$$

همانطور که مشاهده می کنید. توان در ریشه سوم بسیار مهم است.

تمرین (۵):

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۷^۲}}=$

$\frac{۵}{۲\sqrt[۳]{۳}}=$

$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۶}}=$

@riazicafe
طراحی واجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

خود آموز شماره: ۹۰۱۴ **پایه: نهم** **پاسخ نامه** **درس: جمع و تفریق رادیکال ها**

تمرین (۱):

حاصل جمع های زیر را بنویسید.

$$۲\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۳}+۸\sqrt[۳]{۳}-۵\sqrt{۳}=۱۰\sqrt[۳]{۳}-۴\sqrt{۳}$$

$$۳\sqrt{۷}-۴\sqrt{۵}+۸\sqrt{۷}+۲\sqrt{۵}=۱۱\sqrt{۷}-۲\sqrt{۵}$$

$$۲\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt{۲}+۵\sqrt[۳]{۲}-۱۰\sqrt[۳]{۲}=-۳\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt{۲}$$

$$-۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۱۰}-۵\sqrt{۱۰}-۴\sqrt{۵}=-۶\sqrt{۵}-۲\sqrt{۱۰}$$

$$۲\sqrt{xy}-۵\sqrt{x}+۳\sqrt{y}-۴\sqrt{xy}+۳\sqrt{x}+۲\sqrt{y}=-۲\sqrt{xy}-۲\sqrt{x}+۵\sqrt{y}$$

تمرین (۲):

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{۹۸}-\sqrt{۵۰}+\sqrt{۷۲}=۷\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+۶\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times ۲}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۹۸}=\sqrt{۴۹\times ۲}=\sqrt{۴۹}\times\sqrt{۲}=۷\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۳۶\times ۲}=\sqrt{۳۶}\times\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۷۵}+\sqrt{۴۸}=۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۵\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}=۰\sqrt{۳}=۰$$

$$\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times ۳}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۲۷}=\sqrt{۹\times ۳}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۴۸}=\sqrt{۱۶\times ۳}=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۷۵}=\sqrt{۲۵\times ۳}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۲۴}-\sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۸۱}=۲\sqrt[۳]{۲}+۲\sqrt[۳]{۳}-۳\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt[۳]{۳}=-۱\sqrt[۳]{۲}-۱\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۲۴}=\sqrt[۳]{۸\times ۳}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۳}=۲\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۸\times ۲}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۲}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۸۱}=\sqrt[۳]{۲۷\times ۳}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}=۳\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲۷\times ۲}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۲}=۳\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt{۲۰}+\sqrt[۳]{۸۱}-\sqrt{۴۵}+\sqrt[۳]{۱۹۲}=۲\sqrt{۵}+۳\sqrt[۳]{۳}-۳\sqrt{۵}+۴\sqrt[۳]{۳}=-۱\sqrt{۵}+۷\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۸۱}=\sqrt[۳]{۲۷\times ۳}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}=۳\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt{۲۰}=\sqrt{۴\times ۵}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۵}=۲\sqrt{۵}$$

$$\sqrt[۳]{۱۹۲}=\sqrt[۳]{۶۴\times ۳}=\sqrt[۳]{۶۴}\times\sqrt[۳]{۳}=۴\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt{۴۵}=\sqrt{۹\times ۵}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۵}=۳\sqrt{۵}$$

تمرین (۳):

حاصل عبارت ها ی زیر را ساده کنید.

$$۳\sqrt{۱۸}-۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۵۰}=۳(۳\sqrt{۲})-۵\sqrt{۲}+۲(۵\sqrt{۲})=۹\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}+۱۰\sqrt{۲}=۱۴\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times ۲}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times ۲}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$۵\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۵۴}-۴\sqrt[۳]{۱۲۸}=۵\sqrt[۳]{۲}+۳(۳\sqrt[۳]{۲})-۴(۴\sqrt[۳]{۲})=۵\sqrt[۳]{۲}+۹\sqrt[۳]{۲}-۱۶\sqrt[۳]{۲}=-۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲۷\times ۲}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۲}=۳\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۱۲۸}=\sqrt[۳]{۶۴\times ۲}=\sqrt[۳]{۶۴}\times\sqrt[۳]{۲}=۴\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt{۵۰}(\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲})=۵\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲})=۵\sqrt{۲}(\sqrt{۳})-۵\sqrt{۲}(۴\sqrt{۲})=۵\sqrt{۶}-۲۰\sqrt{۴}=۵\sqrt{۶}-۴۰$$

$$\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times ۲}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})=\sqrt{۳}(\sqrt{۳})-\sqrt{۳}(\sqrt{۵})+\sqrt{۵}(\sqrt{۳})-\sqrt{۵}(\sqrt{۵})=۳-\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۵}-۵=$$
$$۳-۵=-۲$$

تمرین (٤):

مخرج کسر های زیر را گویا کنید.

$$\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\frac{۵}{\sqrt{۶}}=\frac{۵}{\sqrt{۶}}\times\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=\frac{۵\sqrt{۶}}{\sqrt{۳۶}}=\frac{۵\sqrt{۶}}{۶}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳x}}\times\frac{\sqrt{۳x}}{\sqrt{۳x}}=\frac{\sqrt{۶x}}{\sqrt{۹x^{۲}}}=\frac{\sqrt{۶x}}{۳x}$$

$$\frac{۳}{۲\sqrt{۷}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۷}}\times\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۷}}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۴۹}}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۱۴}$$

تمرین (٥):

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{۵}{۲\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳^{۲}}}{\sqrt[۳]{۳^{۲}}}=\frac{۵\sqrt[۳]{۳^{۲}}}{۲\sqrt[۳]{۳^{۳}}}=\frac{۵\sqrt[۳]{۳^{۲}}}{۶}$$

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۶}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۶}}\times\frac{\sqrt[۳]{۶^{۲}}}{\sqrt[۳]{۶^{۲}}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۶^{۲}}}{\sqrt[۳]{۶^{۳}}}=\frac{\cancel{۲}^{۱}\sqrt[۳]{۶^{۲}}}{\cancel{۶}^{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۶^{۲}}}{۳}$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۷^{۲}}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۷^{۲}}}\times\frac{\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۷}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۷^{۳}}}=\frac{۳\sqrt[۳]{۷}}{۷}$$