

۱. اگر قطر کره‌ای را ۲ برابر کنیم، آنگاه به حجم اولیه‌ی آن چقدر افزوده می‌شود؟

- ۱) ۸ برابر حجم اولیه  ۲) ۷ برابر حجم اولیه  ۳) ۴ برابر حجم اولیه  ۴) ۳ برابر حجم اولیه

۲. حجم نیم کره‌ای به شعاع  $R$  از کدام دستور به دست می‌آید؟

- ۱)  $2\pi R^2$   ۲)  $4\pi R^2$   ۳)  $\frac{4}{3}\pi R^3$   ۴)  $\frac{2}{3}\pi R^3$

۳. مجموعه نقاطی از فضا که فاصله‌ی همه‌ی آن‌ها از یک نقطه به نام مرکز برابر باشند را ..... گویند.

- ۱) کره  ۲) دایره  ۳) نیم کره  ۴) مخروط

۴. از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چه شکلی پدید می‌آید؟

- ۱) یک مخروط  ۲) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک  ۳) یک کره و یک مخروط با شعاع مشترک  ۴) یک مخروط و یک هرم

۵. حجم هرمی با قاعده‌ی لوزی به قطرهای ۳ و ۴ و ارتفاع ۵ چه قدر است؟

- ۱) ۶۰  ۲) ۳۰  ۳) ۱۰  ۴) ۲۰

۶. مساحت کره‌ای  $11,56\pi$  سانتی‌متر مربع است. قطر کره چند سانتی‌متر است؟

- ۱)  $1,7cm$   ۲)  $3,4cm$   ۳)  $6,8cm$   ۴)  $2,89cm$

۷. وجوه جانبی هر هرم به شکل ..... است. (هرمزگان - خرداد ۹۵)

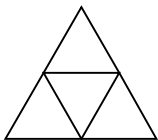
- ۱) مثلث  ۲) مستطیل  ۳) مربع  ۴) متوازی‌الاضلاع

۸. حجم هرم مربع‌القاعده‌ای به اضلاع قاعده‌ی  $a$  و ارتفاع  $b$  کدام است؟ (یزد - خرداد ۹۵)

- ۱)  $\frac{1}{3}ab^2$   ۲)  $\frac{1}{3}a^2b$   ۳)  $\frac{ab}{3}$   ۴)  $\frac{a^2b^3}{3}$

۹. اگر یک متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های ۹ و ۶ سانتی‌متر و ارتفاع ۴ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگ‌تر دوران دهیم، حجم حاصل از دوران چند سانتی‌متر مکعب است؟

- ۱)  $72\pi$   ۲)  $108\pi$   ۳)  $144\pi$   ۴)  $224\pi$



۱۰. با سطح مثلث شکلی، به ضلع  $20\text{ cm}$  یک چهاروجهی منتظم ساخته‌ایم. مساحت جانبی آن کدام است؟

- ۱)  $100\sqrt{3}$   ۲)  $25\sqrt{3}$   ۳)  $50\sqrt{3}$   ۴)  $75\sqrt{3}$

۱۱. شعاع قاعده‌ی یک مخروط، با شعاع قاعده‌ی یک استوانه برابر است. اگر ارتفاع استوانه نصف ارتفاع مخروط باشد، نسبت حجم استوانه به حجم مخروط برابر است با:

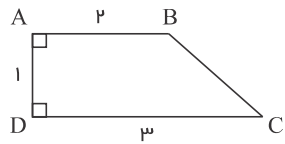
- ۱)  $\frac{2}{3}$   ۲)  $\frac{3}{2}$   ۳)  $\frac{1}{3}$   ۴) ۳

۱۲. اگر شعاع کره‌ای را سه برابر کنیم، حجم کره‌ی حاصل چند برابر می‌شود؟

- ۱) ۳  ۲) ۹  ۳) ۸۱  ۴) ۲۷

۱۳. مکعبی به قطر  $\sqrt{12}$  را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه کدام است؟

- ۱)  $16\pi$   ۲)  $\sqrt{2}\pi$   ۳)  $3\sqrt{2}\pi$   ۴)  $4\pi$



۱۴. حجم حاصل از دوران دوزنقه مقابل، حول ضلع  $DC$  چند سانتی متر مکعب است؟

$\frac{7}{3}\pi$  (۲)

$3\pi$  (۱)

$\frac{4}{3}\pi$  (۴)

$\frac{13}{3}\pi$  (۳)

۱۵. چند جمله از جمله‌های زیر نادرست است؟

- حجم کره‌ای به شعاع ۳ برابر است با  $36\pi$

- از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر، یک مخروط به وجود می‌آید.

- چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.

- مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی  $r$  و ارتفاع  $r$  برابر است با  $2\pi r^2$ .

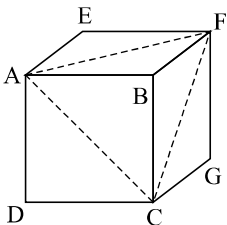
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۱۶. مطابق شکل روبه‌رو از مکعبی به طول ضلع یک با رأس‌های  $A, B, C, D, E, F, G, H$  هرم  $AFCB$  را بریده‌ایم. به همین ترتیب



هرم‌های  $EAFH$  و  $GFCH$  و  $DACH$  را می‌بریم. حجم شکل باقی‌مانده کدام است؟

$\frac{1}{3}$  (۲)

صفر (۱)

$\frac{1}{5}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

۱۷. مساحت جانبی و حجم یک منشور با قاعده‌ی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ و ارتفاع ۳ به ترتیب برابر کدام است؟

$12\sqrt{3}, 36$  (۴)

$3\sqrt{3}, 36$  (۳)

$12\sqrt{3}, 12$  (۲)

$3\sqrt{3}, 12$  (۱)

۱۸. مساحت کل یک هرم منتظم  $96\text{cm}^2$  است. اگر قاعده‌ی این هرم مربعی به ضلع  $6\text{cm}$  باشد، اندازه‌ی ارتفاع هرم چند سانتی متر است؟

$6\text{cm}$  (۴)

$5\text{cm}$  (۳)

$4\text{cm}$  (۲)

$3\text{cm}$  (۱)

۱۹. یک نیم‌دایره را به شکل یک قیف مخروطی شکل در می‌آوریم (برای این کار، دو شعاع نیم‌دایره را که در امتداد هم هستند، بر هم منطبق می‌کنیم). زاویه‌ی رأس این مخروط چند درجه است؟

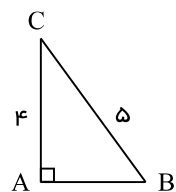
بستگی به شعاع نیم‌دایره دارد. (۴)

۳۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)

۲۰. حجم حاصل از دوران مثلث زیر حول ضلع  $AB$  کدام است؟



$12\pi$  (۲)

$10\pi$  (۱)

$20\pi$  (۴)

$16\pi$  (۳)

۲۱. حجم کره‌ای به شعاع  $2a$  با حجم مخروطی به قطر قاعده‌ی  $8a$  برابر است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعده‌ی آن چیست؟

$\frac{1}{16}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

۲۲. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده‌ی آن است اگر حجم مخروط  $128\pi$  باشد ارتفاع آن کدام است؟

$8\sqrt{2}$  (۴)

$12\sqrt{2}$  (۳)

$6\sqrt{2}$  (۲)

$4\sqrt{2}$  (۱)

۲۳. مساحت کره‌ای  $100\pi$  است، حجم آن ..... است.

$\frac{500}{3}\pi$  (۴)

$\frac{400}{3}\pi$  (۳)

$500\pi$  (۲)

$\frac{500}{2}\pi$  (۱)

۲۴. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده‌ی آن است. اگر حجم این مخروط  $۲۱۶\pi$  باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۲۵. اگر کره‌ای در استوانه محاط شده باشد، قطر کره همواره با کدام یک از گزینه‌های زیر مساوی نیست؟

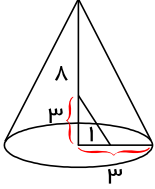
ارتفاع استوانه (۱)

قطر قاعده‌ی استوانه (۲)

فاصله‌ی دو قاعده‌ی استوانه (۳)

نصف محیط قاعده‌ی استوانه (۴)

۲۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع ۳ و ارتفاع ۸ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری به ضلع ۱ و ارتفاع ۳ که داخل آن قرار دارد را حول ضلع ۸ دوران داده‌ایم. حجم بین دو شکل برابر است با:

 $۲۰\pi$  (۲) $۱۸\pi$  (۱) $۲۵\pi$  (۴) $۲۳\pi$  (۳)

۲۷. ستونی به شکل منشور ۵ پهلو است که هر ضلع قاعده‌اش ۵٫۵ متر و ارتفاع آن ۲۰ متر است. می‌خواهیم به بدنه‌ی این ستون کاشی بچسبانیم، چند متر مربع کاشی لازم است؟

۲۰ (۴)

۴۰ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

۲۸. اگر شعاع قاعده‌ی استوانه را ۳ برابر کنیم، مساحت جانبی آن چند برابر می‌شود؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

 $\frac{۳}{۲}$  (۱)

۲۹. دو استوانه با حجم‌های برابر داریم. اگر شعاع قاعده‌ی استوانه اول ۳ برابر دومی باشد، نسبت ارتفاع استوانه‌ی اول به دوم چه قدر است؟

۶ (۴)

 $\frac{۱}{۶}$  (۳) $\frac{۱}{۹}$  (۲) $\frac{۱}{۳}$  (۱)

۳۰. مساحت کره‌ای برابر با  $۳۶\pi$  است. حجم آن برابر است با:

 $۲۷\pi$  (۴) $۱۰۸\pi$  (۳) $۹\pi$  (۲) $۳۶\pi$  (۱)

۳۱. اگر قطر کره‌ای  $m$  برابر شود، حجم و مساحت چند برابر می‌شوند؟

حجم  $\frac{m^3}{۸}$  برابر و مساحت  $\frac{m^2}{۴}$  برابر (۲)حجم  $m^3$  برابر و مساحت  $m^2$  برابر (۱)هر دو  $\frac{m^3}{۸}$  برابر (۴)هر دو  $m^3$  برابر (۳)

۳۲. اگر بخواهیم با مقوا، مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ درست کنیم، چند سانتی‌متر مربع مقوا نیاز داریم؟

۹۴ (۴)

۵۴ (۳)

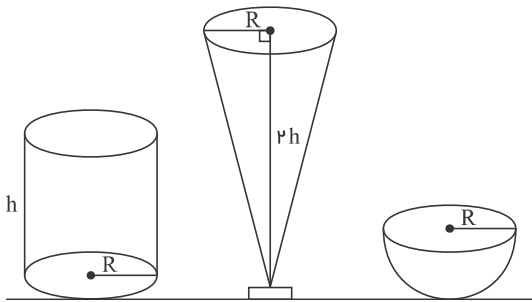
۱۲۰ (۲)

۶۸ (۱)

۳۳. حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم  $۱\text{ cm}$  حول یکی از اضلاع قائمه چقدر است؟

 $\sqrt{۲}$  (۴) $\frac{۲\pi}{۳}$  (۳) $\pi$  (۲) $\frac{\pi}{۳}$  (۱)

۳۴. باتوجه به شکل‌های زیر، اگر ظرف استوانه‌ای شکل را پر از آب کرده و در دو ظرف دیگر خالی کنیم، دو ظرف پر شده و هیچ آبی در استوانه باقی نمی‌ماند. کدام رابطه زیر درست است؟ (شعاع‌ها با هم مساوی و ارتفاع مخروط دو برابر ارتفاع استوانه است.)



$h = \frac{2}{3}R$  (۱)

$h = \frac{3}{2}R$  (۲)

$h = 3R$  (۳)

$h = 2R$  (۴)

۳۵. نسبت عدد حجم به مساحت کل مکعبی برابر با ۱ می‌باشد، مساحت جانبی این مکعب کدام است؟

۲۱۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

۳۶. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده آن است. اگر حجم مخروط  $216\pi$  باشد، ارتفاع آن برابر است با:

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

۳۷. مساحت کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی‌متر باشد، چند سانتی‌متر مربع است؟

$16\sqrt{2}$  (۴)

$16\sqrt{3}$  (۳)

$4\sqrt{2}$  (۲)

$4\sqrt{3}$  (۱)

۳۸. در یک قوطی استوانه‌ای حاوی ۴ توپ تنیس که ارتفاعی دقیقاً به اندازه ۴ توپ دارد و توپ‌ها به جداره چسبیده‌اند. حجم فضای خالی اطراف توپ‌ها در استوانه چند برابر حجم یک توپ است؟

۲ برابر (۴)

۲٫۵ برابر (۳)

۳ برابر (۲)

۴ برابر (۱)

۳۹. حجم کره‌ای به شعاع  $R$  چند برابر حجم مخروطی به شعاع  $R$  و ارتفاع  $3R$  است؟

$\frac{4}{9}\pi$  (۴)

$\frac{4}{9}$  (۳)

$\frac{4}{3}\pi$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

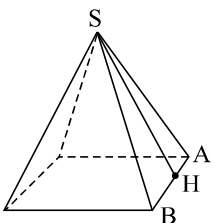
۴۰. در هرم مربعی منتظم زیر  $\overline{SA} = \sqrt{34}$  و  $\overline{SH} = 5$ ، حجم هرم کدام است؟

۵۲ (۲)

۵۶ (۱)

۴۸ (۴)

۵۴ (۳)



۴۱. مساحت کل نیم کره‌ای توپُر به شعاع  $R$  چند برابر مساحت کره‌ای به شعاع  $R$  است؟

$\frac{4}{5}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۴۲. در داخل یک مکعب به ضلع  $a$ ، بزرگ‌ترین کره ممکن قرار دارد. نسبت مساحت کره به مساحت کل مکعب کدام است؟

$\frac{\pi}{8}$  (۴)

$\frac{\pi}{6}$  (۳)

$\frac{\pi}{4}$  (۲)

$\frac{\pi}{3}$  (۱)

۴۳. اتاقی داریم به شکل منشور، با قاعده شش‌ضلعی منتظم، اگر از نقطه‌ای روی سقف اتاق، شش نخ به رأس‌های کف اتاق وصل کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

$\frac{1}{4}$  برابر (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  برابر (۲)

$\frac{1}{3}$  برابر (۱)

۴۴. مساحت جانبی هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی‌متر می‌باشد، چند سانتی‌متر مربع است؟

$12\sqrt{2}$  (۴)

$24\sqrt{2}$  (۳)

$12\sqrt{3}$  (۲)

$16\sqrt{3}$  (۱)

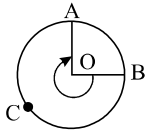
۴۵. یک کره به شعاع  $6\text{cm}$  را درون یک ظرف استوانه‌ای که مقداری آب دارد می‌اندازیم، ارتفاع آب  $8\text{cm}$  افزایش می‌یابد، شعاع قاعده استوانه کدام است؟

- ۱) ۷      ۲) ۶      ۳) ۸      ۴) ۱۰

۴۶. کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعده آن مربع است.  
 ۲) اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم حجم آن چهار برابر می‌شود.  
 ۳) در هرم منتظم شکل وجه‌های جانبی همیشه مثلث متساوی‌الاضلاع است.  
 ۴) حجم استوانه‌ای که شعاع و ارتفاع آن  $a$  باشد، برابر  $\pi a^3$  می‌باشد.

۴۷. فرض کنید مساحت دایره مقابل برابر  $100\pi$  باشد، در این صورت باتوجه به شکل طول کمان  $\widehat{ACB}$  برابر است با:  $(O)$  مرکز دایره و زاویه  $(AOB = 90^\circ)$



- ۱)  $15\pi$       ۲)  $25\pi$       ۳)  $35\pi$       ۴)  $45\pi$

۴۸. یک هرم منتظم با قاعده چهارضلعی و مساحت قاعده  $36$  سانتی‌متر مربع داریم. اگر ارتفاع هرم  $4$  سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی هرم چند سانتی‌متر مربع است؟

- ۱) ۱۵      ۲) ۳۰      ۳) ۶۰      ۴) ۱۲۰

۴۹. شعاع قاعده‌ی استوانه‌ای برابر با شعاع یک کره و ارتفاع آن  $\frac{3}{4}$  قطر همان کره است. حجم استوانه چه کسری از حجم کره است؟

- ۱)  $\frac{1}{9}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{5}{8}$       ۴)  $\frac{9}{8}$

۵۰. سطح کره‌ای که حجم آن  $36\pi$  می‌باشد برابر است با .....

- ۱)  $9\pi$       ۲)  $4\pi$       ۳)  $36\pi$       ۴)  $16\pi$

۵۱. برای پوشاندن سطح یک توپ کروی شکل،  $432$  سانتی‌متر مربع چرم مصرف شده است. قطر این توپ چند سانتی‌متر است؟  $(\pi = 3)$

- ۱) ۶      ۲) ۱۲      ۳) ۱۸      ۴) ۳۶

۵۲. اگر عدد مساحت یک کره ۳ برابر عدد حجم آن باشد، شعاع کره کدام یک از اعداد زیر است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{1}{3}$

۵۳. اگر مساحت کره‌ای  $16\pi$  باشد، حجم آن کره کدام است؟

- ۱)  $32\pi$       ۲)  $\frac{8}{3}\pi$       ۳)  $\frac{32}{3}\pi$       ۴)  $\frac{16}{3}\pi$

۵۴. حجم هرم مربع‌القاعده‌ای به قطر قاعده‌ی  $5\sqrt{2}$  و ارتفاع  $12$  کدام است؟

- ۱) ۱۰۰      ۲) ۱۵۰      ۳) ۲۰۰      ۴) ۲۵۰

۵۵. در یک هرم با قاعده‌ی مثلث، در یک رأس سه یال آن دوبره‌دو بر هم عمودند. اگر اندازه‌ی این یال‌ها ۲ و ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد، حجم هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

- ۱) ۴      ۲) ۸      ۳) ۱۲      ۴) ۲۴

۵۶. حجم کره‌ای به شعاع  $R$  برابر با حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی  $R$  است. ارتفاع مخروط چند برابر شعاع کره است؟

- ۱)  $\frac{4}{3}$       ۲)  $\frac{8}{3}$       ۳) ۳      ۴) ۴

۵۷. در یک مکعب مستطیل در بسته به ابعاد ۳، ۳ و ۴ سانتی متر مقداری آب ریختیم. اگر این ظرف را در دو حالت (یک بار روی سطح مستطیل و بار دیگر روی سطح مربع) روی زمین قرار دهیم، نسبت ارتفاع های آب در دو حالت کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$      
  ۲)  $\frac{1}{3}$      
  ۳)  $\frac{2}{3}$      
  ۴)  $\frac{3}{4}$

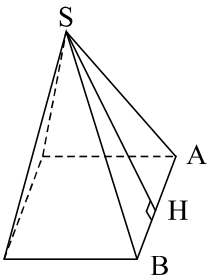
۵۸. مساحت کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۶ سانتی متر است، چند سانتی متر مربع است؟

- ۱)  $9\sqrt{3}$      
  ۲)  $36\sqrt{2}$      
  ۳)  $36\sqrt{3}$      
  ۴)  $9\sqrt{2}$

۵۹. کره ای داخل یک استوانه محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه همواره برابر است با:

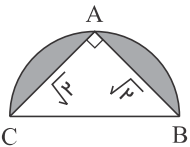
- ۱)  $\frac{2}{3}$      
  ۲)  $\frac{1}{3}$      
  ۳)  $\frac{3}{4}$      
  ۴)  $\frac{1}{2}$

۶۰. در هرم منتظم مربع القاعده ی زیر،  $SA = 10\text{ cm}$  و  $SH = 8\text{ cm}$  است، حجم این هرم کدام است؟



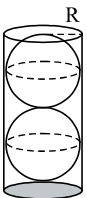
- ۱)  $12\sqrt{28}\text{ cm}^3$      
  ۲)  $48\sqrt{28}\text{ cm}^3$      
  ۳)  $48\sqrt{14}\text{ cm}^3$      
  ۴)  $24\sqrt{14}\text{ cm}^3$

۶۱. حجم حاصل از دوران قسمت هاشور خورده حول BC کدام است؟



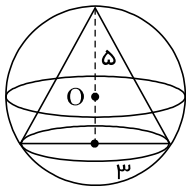
- ۱)  $\frac{4}{3}\pi$      
  ۲)  $\pi$      
  ۳)  $\frac{2}{3}\pi$      
  ۴)  $8\pi$

۶۲. در شکل زیر درون ظرف استوانه ای شکل به شعاع R دو کره محاط کرده ایم. کدام گزینه درست است؟



- ۱) حجم فضای خالی بیش تر از حجم هر کره است.     
  ۲) حجم فضای خالی کم تر از حجم هر کره است.     
  ۳) حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.     
  ۴) حجم دو کره مساوی حجم استوانه است.

۶۳. در کره ای به شعاع ۵ سانتی متر یک مخروط به شعاع قاعده ی ۳ سانتی متر محاط شده است، حجم مخروط چقدر است؟



- ۱)  $2\pi$      
  ۲)  $24\pi$      
  ۳)  $27\pi$      
  ۴)  $26\pi$

۶۴. اگر شعاع قاعده ی مخروطی را نصف کنیم و ارتفاع آن را دو برابر کنیم، حجم آن چه تغییری می کند؟

- ۱) تغییر نمی کند.     
  ۲) دو برابر می شود.     
  ۳) نصف می شود.     
  ۴) چهار برابر می شود.

۶۵. یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر آن را دوباره باد کرده و  $\frac{148\pi}{3}$  سانتی متر مکعب هوا به آن

وارد کنیم، با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی متر مربع افزایش می یابد؟

- ۱)  $9\pi$      
  ۲)  $28\pi$      
  ۳)  $64\pi$      
  ۴)  $56\pi$

۶۶. اگر ابعاد مکعب مستطیلی را ۳ برابر کنیم، قطر، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم به ترتیب چند برابر می شوند؟

- ۱) ۹، ۳، ۳، ۳     
  ۲) ۲۷، ۹، ۹، ۳     
  ۳) ۹، ۹، ۹، ۳     
  ۴) ۲۷، ۹، ۹، ۹

۶۷. ورزشگاهی به شکل نیم کره به شعاع ۴۰ متر است. اگر بخواهیم نمای خارجی این ورزشگاه را رنگ کنیم و هر قوطی رنگ، برای رنگ آمیزی ۸۰ متر مربع کافی باشد، حداقل چند قوطی رنگ برای رنگ آمیزی لازم است؟ ( $\pi = 3,14$ )

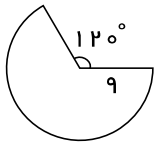
- ۱۲۵ (۱)      ۱۲۶ (۲)      ۲۵۰ (۳)      ۲۵۲ (۴)

۶۸. مساحت سطح برش عرضی یک لوله برابر با  $250 \text{ cm}^2$  می باشد. آب در لوله با سرعت ۳ لیتر بر ثانیه جریان می یابد. سرعتی که در آن آب در لوله برحسب  $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$  جریان می یابد برابر است با:



- ۱۵ (۱)      ۱,۲ (۲)      ۶ (۳)      ۱۲ (۴)

۶۹. با قسمتی از دایره ای به شعاع  $9 \text{ cm}$  مخروطی ساخته ایم. شعاع قاعده ی این مخروط برابر است با:

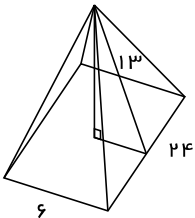


- ۹ (۱)      ۶ (۲)      ۳ (۳)      ۷ (۴)

۷۰. کره ای که حجم آن  $36\pi$  است را داخل استوانه محاط می کنیم. حجم استوانه چه قدر است؟

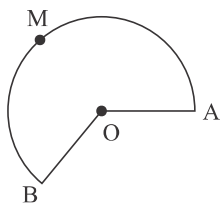
- ۳۶π (۱)      ۵۴π (۲)      ۲۷π (۳)      ۴۵π (۴)

۷۱. حجم شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



- ۱۹۲ (۱)      ۱۲۹ (۲)      ۲۲۹ (۳)      ۱۹۶ (۴)

۷۲. با برشی از دایره مطابق شکل، مخروطی ساخته ایم. اگر حجم مخروط ۲۸۸ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازه کمان  $AMB$  چند درجه است؟

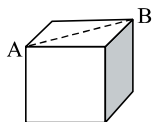


- ۲۱۶° (۱)      ۲۰۰° (۲)      ۱۹۷° (۳)      ۲۳۰° (۴)

۷۳. قاعده ی یک هرم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ می باشد اگر ارتفاع آن  $10\sqrt{3}$  باشد حجم هرم کدام است؟

- ۲۴√۳ (۱)      ۷۲۰ (۲)      ۷۲۰√۳ (۳)      ۲۴۰ (۴)

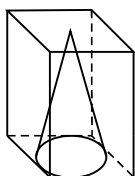
۷۴. یک اسفنج مکعب شکل به ضلع ۵ را در راستای پاره خط  $AB$  بریده ایم. مساحت کل یکی از قسمت های بریده شده چقدر است؟



- ۳۷۵ (۱)      ۷۵۰ (۲)      ۲۵(۳ + √۲) (۳)      ۲۵(۳ + ۲√۲) (۴)

۷۵. مخروطی داخل یک مکعب مستطیل طوری قرار گرفته است که قاعده آن محاط در قاعده مکعب مستطیل و رأس آن در محل تلاقی

قطرهای قاعده مکعب مستطیل قرار دارد. اگر شعاع قاعده مخروط  $r$  و ارتفاع آن  $h$  باشد، حجم فضای بین دو جسم چقدر است؟ ( $\pi \approx 3$ )



- $r^2 h$  (۱)       $2r^2 h$  (۲)       $3r^2 h$  (۳)       $4r^2 h$  (۴)

۷۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع قائمه‌ی کوچک آن دوران می‌دهیم. اگر طول ضلع‌های قائمه ۳ و ۴ باشد. حجم شکل حاصل کدام است؟

۱۶π (۴)

۳۶π (۳)

۱۲π (۲)

۴۸π (۱)

۷۷. هرمی ۱۷ وجه دارد. این هرم چند یال دارد؟

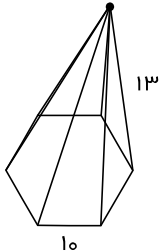
۳۲ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

۷۸. مساحت جانبی هرم منتظمی با قاعده‌ی شش ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ سانتی‌متر و اندازه‌ی یال ۱۳ سانتی‌متر، کدام است؟



۱۸۰ سانتی‌متر مربع (۱)

۲۴۰ سانتی‌متر مربع (۲)

۳۶۰ سانتی‌متر مربع (۳)

۳۹۰ سانتی‌متر مربع (۴)

۷۹. مخروطی به ارتفاع ۳ را با دو صفحه‌ای که موازی قاعده‌اش هستند به سه شکل هم حجم بریده‌ایم. مخروط در چه ارتفاع‌هایی بریده شده است؟

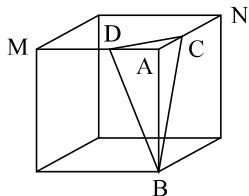
نمی‌توان مخروط را این طور برید (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)

$3 - \sqrt{9}, 3 - \sqrt{18}$  (۲)

۲ و ۱ (۱)

۸۰. در مکعب زیر نقطه‌ی C وسط AN و نقطه‌ی D وسط AM است. اگر  $AB = 1$  باشد، حجم هرم ABCD کدام است؟



$\frac{1}{12}$  (۲)

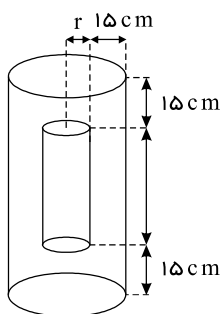
$\frac{1}{8}$  (۱)

$\frac{1}{24}$  (۴)

$\frac{1}{18}$  (۳)

۸۱. یک محفظه برای نگهداری مواد شیمیایی مانند شکل زیر طراحی شده است. محفظه دارای ضخامت ۱۵cm می‌باشد. فرض کنید گنجایش

محفظه‌ی بیرونی برابر با ۴۳۲ سانتی‌متر مکعب باشد. ارتفاع محفظه‌ی درونی  $h$ ، به صورت عبارتی گویا برحسب  $r$  کدام گزینه است؟



$h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} + 30$  (۱)

$h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} - 30$  (۲)

$h = \frac{432}{\pi(r+15)} + 30$  (۳)

$h = \frac{432}{\pi(r+15)} - 30$  (۴)

۸۲. کره‌ای فلزی و جامد به شعاع ۱۲۸ را با حرارت دادن ذوب و به ۶۴ قطره‌ی کروی شکل کوچک و مساوی تبدیل می‌کنیم. شعاع کره‌ی کوچک چه کسری از شعاع کره‌ی بزرگ است؟

$\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$\frac{1}{6}$  (۲)

$\frac{1}{8}$  (۱)

۸۳. کره‌ای در استوانه‌ای محاط شده است، اگر حجم استوانه  $12\sqrt{2}$  سانتی‌متر مکعب باشد، حجم کره کدام است؟ ( $\pi = 3$ )

$32cm^3$  (۴)

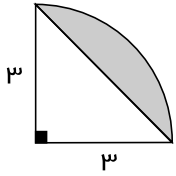
$8\sqrt{2}cm^3$  (۳)

$6\sqrt{2}cm^3$  (۲)

$4\sqrt{2}cm^3$  (۱)

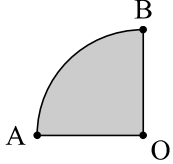


۸۴. حجم قسمت هاشور خورده حول دوران ضلع ۳ سانتی متر برابر است با:



- ۱)  $9\pi$        ۲)  $6\pi$   
 ۳)  $3\pi$        ۴)  $12\pi$

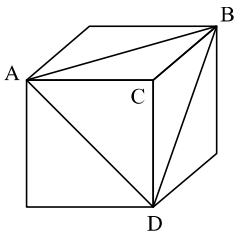
۸۵. ربع دایره مقابل به شعاع  $r$  را حول  $OB$  دوران می دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟



- ۱)  $\frac{2\pi r^3}{3}$        ۲)  $\frac{\pi r^3}{3}$        ۳)  $\frac{1}{4} \times \frac{4\pi r^3}{3}$        ۴)  $\frac{\pi r^3}{4}$

۸۶. متوازی الاضلاعی با اندازه اضلاع ۵ و ۹ سانتی متر و مساحت ۲۷ سانتی متر مربع را حول ضلع بزرگ آن دوران داده ایم. حجم شکل حاصل از دوران، برابر چند سانتی متر مکعب می باشد؟

- ۱)  $27\pi$        ۲)  $81\pi$        ۳)  $225\pi$        ۴)  $243\pi$



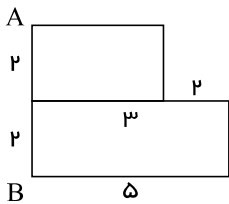
۸۷. اگر حجم مکعب مقابل برابر ۴۳۲ واحد باشد، حجم هرم  $ABCD$  برابر کدام گزینه است؟

- ۱)  $32\sqrt{3}$        ۲)  $32\sqrt{2}$        ۳)  $72$        ۴)  $144$

۸۸. اگر قطر مکعبی  $3a$  باشد، مساحت جانبی آن چه قدر است؟

- ۱)  $36a^2$        ۲)  $12a^2$        ۳)  $18a^2$        ۴)  $6a^2$

۸۹. حجم حاصل از دوران شکل زیر حول  $AB$  برابر است با: ( $\pi = 3$ )



- ۱)  $102$        ۲)  $204$        ۳)  $408$        ۴)  $150$

۹۰. یک لوزی به قطرهای ۶ و ۸ را حول قطر ۸ دوران می دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- ۱)  $12\pi$        ۲)  $24\pi$        ۳)  $32\pi$        ۴)  $96\pi$

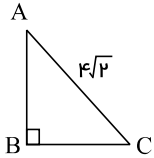
۹۱. صفحه ای موازی قاعده مخروط رسم می کنیم که ارتفاع آن را نصف کند، نسبت حجم هرم مخروط بزرگ به حجم هرم کوچک چه قدر است؟

- ۱)  $2$        ۲)  $4$        ۳)  $8$        ۴)  $16$

۹۲. اگر مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  که در آن  $a < b < c$  است، را هر بار حول یکی از اضلاعش دوران دهیم، حجم حاصل حول کدام ضلع از بقیه بیشتر است؟

- ۱)  $a$        ۲)  $b$        ۳)  $c$        ۴) هر سه برابر است.

۹۳. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین زیر را حول یکی از اضلاع زاویه قائمه آن دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟ (اندازه وتر  $4\sqrt{2}$  سانتی‌متر است.)



$$\frac{16\pi}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{32\pi}{3} \quad \text{۳}$$

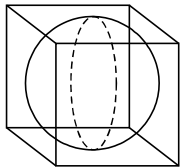
$$\frac{128\pi}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{64\pi}{3} \quad \text{۱}$$

۹۴. در کدام گزینه زیر، نسبت حجم به مساحت کل بزرگ‌تر از بقیه است؟

- ۱ مکعب به ضلع  $a$       ۲ کره به شعاع  $a$       ۳ استوانه به ارتفاع  $a$  و شعاع قاعده  $a$       ۴ کره به قطر  $a$

۹۵. در شکل مقابل، حجم کره محاط شده در مکعب برابر  $36\pi$  می‌باشد. اندازه ضلع مکعب برابر کدام گزینه است؟



$$6 \quad \text{۲}$$

$$9 \quad \text{۱}$$

$$3 \quad \text{۴}$$

$$4.5 \quad \text{۳}$$

۹۶. کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

$$27\pi \quad \text{۴}$$

$$18\pi \quad \text{۳}$$

$$36\pi \quad \text{۲}$$

$$54\pi \quad \text{۱}$$

۹۷. چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح است؟

• درجه عبارت  $3ax^3 + 5a^3x^2b + 4a^7$  نسبت به متغیرهای  $x$  و  $a$  برابر ۵ است.

• عبارت  $\frac{6}{y} - y^2$  گویا است.

• اگر  $a > 0$  و  $b < 0$  آنگاه،  $ab < ab^2$ .

• اگر ارتفاع مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن نیز دو برابر می‌شود.

$$4 \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

۹۸. یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر دهانه بادکنک را باز بگذاریم تا  $\frac{76}{3}\pi$  سانتی‌متر مکعب هوا از داخل بادکنک خارج گردد. با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی‌متر مربع کاهش می‌یابد؟

$$64\pi \quad \text{۴}$$

$$32\pi \quad \text{۳}$$

$$16\pi \quad \text{۲}$$

$$20\pi \quad \text{۱}$$

۹۹. مکعبی به ضلع  $\sqrt{12}$  درون یک کره محاط شده است. حجم کره چند است؟

$$36\pi \quad \text{۴}$$

$$288\pi \quad \text{۳}$$

$$64\sqrt{6}\pi \quad \text{۲}$$

$$32\sqrt{3}\pi \quad \text{۱}$$

۱۰۰. قاعده یک هرم منتظم مربعی به ضلع ۶ است. اگر وجه‌های این هرم مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، حجم هرم کدام است؟

$$72\sqrt{2} \quad \text{۴}$$

$$36\sqrt{2} \quad \text{۳}$$

$$24\sqrt{2} \quad \text{۲}$$

$$18\sqrt{2} \quad \text{۱}$$

۱۰۱. کره‌ای را در یک استوانه به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط می‌کنیم. حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر است؟

$$216\pi \quad \text{۴}$$

$$144\pi \quad \text{۳}$$

$$288\pi \quad \text{۲}$$

$$432\pi \quad \text{۱}$$

۱۰۲. مساحت کل یک نیم‌کره توپر  $27\pi$  است. حجم این نیم‌کره کدام است؟

$$45\pi \quad \text{۴}$$

$$36\sqrt{3}\pi \quad \text{۳}$$

$$18\pi \quad \text{۲}$$

$$27\pi \quad \text{۱}$$

۱۰۳. بزرگترین هرمی که می‌تواند به طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر و عرض ۱۲ متر و عمق ۴ متر ساخته شود را در نظر بگیرید. حداکثر چه تعداد هرم با حجم این هرم می‌توان درون این استخر ساخت؟

$$4 \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

۱۰۴. ارتفاع وارد بر قاعده‌ی هرمی که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ و اندازه‌ی یال‌های آن نیز ۶ باشد، کدام است؟

$2\sqrt{6}$  (۴)

$3\sqrt{2}$  (۳)

$2\sqrt{3}$  (۲)

$3\sqrt{6}$  (۱)

۱۰۵. ارتفاع یک مخروط ۱۲cm و شعاع قاعده‌ی آن ۶cm است. یک حفره‌ی استوانه‌ای به قطر ۲cm در آن ایجاد کردیم به طوری که محور استوانه بر محور مخروط منطبق باشد، حجم جسم باقی‌مانده چقدر است؟

$432\pi$  سانتی‌متر مکعب (۴)

$134\pi$  سانتی‌متر مکعب (۳)

$124\pi$  سانتی‌متر مکعب (۲)

$144\pi$  سانتی‌متر مکعب (۱)

۱۰۶. قاعده‌ی هرمی مربعی است به ضلع ۳cm، اگر حجم هرم ۲۴ سانتی‌متر مکعب باشد، ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟

۸ (۴)

$\frac{8}{3}$  (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

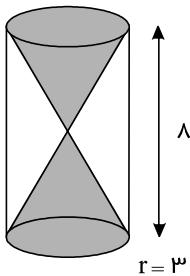
۱۰۷. شعاع قاعده‌ی یک مخروط با شعاع یک نیم‌کره مساوی است. اگر ارتفاع مخروط سه برابر شعاع قاعده‌اش باشد، نسبت حجم این مخروط به حجم نیم‌کره کدام گزینه است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۱ (۱)



۱۰۸. در یک ساعت شنی مطابق شکل، حجم فضایی که توسط شن‌ها اشغال شده است، کدام است؟

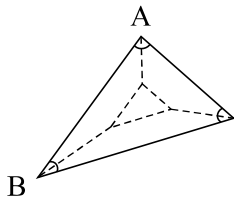
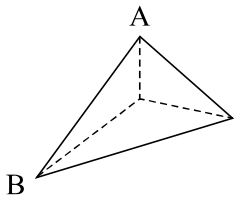
$12\pi$  (۲)

$16\pi$  (۱)

$48\pi$  (۴)

$24\pi$  (۳)

۱۰۹. هرمی ۶ یال دارد و ۴ گوشه‌ی آن را می‌بریم. شکل جدید چند یال دارد؟



۲۴ (۱)

۱۲ (۲)

۱۵ (۳)

۱۸ (۴)

۱۱۰. با استفاده از سه هرم مربع‌القاعده متساوی‌الشکل، می‌توانیم یک مکعب به بعد  $a$  بسازیم، طول بلندترین یال این هرم کدام است؟

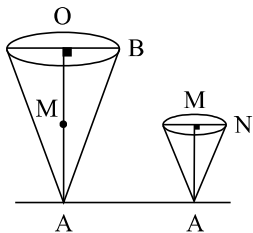
$2a\sqrt{3}$  (۴)

$a\sqrt{3}$  (۳)

$a$  (۲)

$a\sqrt{2}$  (۱)

۱۱۱. ظرفی مخروطی مانند شکل زیر داریم، اگر از نقطه‌ی  $M$  وسط ارتفاع مخروط موازی با سطح قاعده‌ی مخروط برش بزنیم، حجم مخروط به دست آمده چند برابر مخروط اولیه خواهد بود؟



$\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

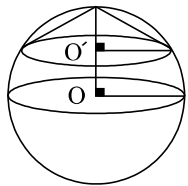
۱۱۲. ظرفی به شکل مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۹ سانتی‌متر را ۶ بار پر از آب کرده و در ظرفی مکعب شکل به ضلع ۹ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در این مکعب بالا می‌آید؟ ( $\pi \simeq 3$ )

۱ سانتی‌متر (۴)

۳ سانتی‌متر (۳)

۶ سانتی‌متر (۲)

۹ سانتی‌متر (۱)



۱۱۳. در شکل زیر شعاع کره  $R$  و  $OO' = \frac{R}{3}$  می‌باشد. نسبت حجم کره به حجم مخروط چقدر است؟

$\frac{27}{2}$  (۴)

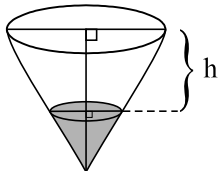
$\frac{27}{4}$  (۳)

$\frac{8}{3}$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

۱۱۴. مخزنی به شکل مخروط واژگون شده حاوی مایع مخصوصی است. مقدار  $h$  که برابر با فضای خالی بالای مایع است، توسط فرمول

$h = 21 - \frac{7}{2}r$  برحسب متر محاسبه می‌گردد. در فرمول مذکور برابر با شعاع مایع برحسب متر است. محیط قاعده‌ی دایره‌ای شکل مخزن برابر است با:



$12\pi$  (۲)

$9\pi$  (۱)

$18\pi$  (۴)

$15\pi$  (۳)

۱۱۵. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

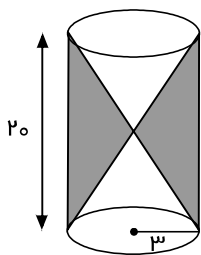
$2\pi$  (۴)

$\frac{4\pi}{3}$  (۳)

$\pi$  (۲)

$\frac{2\pi}{3}$  (۱)

۱۱۶. در زمان‌های قدیم برای اندازه‌گیری زمان از ساعت شنی استفاده می‌کردند. ساعت شنی از دو مخروط هم‌اندازه تشکیل شده است که درون یک استوانه قرار دارد. حجم فضای خالی این مخروط‌ها را بیابید. (قسمت رنگی) (شعاع دایره =  $3\text{cm}$ ، ارتفاع =  $20\text{cm}$ )



$180\pi$  (۲)

$120\pi$  (۱)

$90\pi$  (۴)

$60\pi$  (۳)

۱۱۷. حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع  $3\text{cm}$  که وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند، کدام گزینه است؟

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۳)

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$  (۲)

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$  (۱)

۱۱۸. هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع  $10\text{cm}$  می‌باشد. اگر مساحت کل این هرم  $360$  سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

$400$  (۴)

$440$  (۳)

$360$  (۲)

$260$  (۱)

۱۱۹. هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع  $6$  سانتی‌متر است. اگر مساحت جانبی این هرم  $60$  سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چقدر است؟

$24$  (۴)

$48$  (۳)

$12$  (۲)

$36$  (۱)

۱۲۰. دو مخروط وجود دارند که ارتفاع آنها یکسان و شعاع‌های قاعده‌ی آنها یک واحد اختلاف دارند. اگر اختلاف حجم‌های این دو مخروط  $12\pi$  باشد و ارتفاع هر یک از آنها به اندازه‌ی شعاع قاعده کوچکتر باشد، شعاع قاعده‌ی مخروط بزرگتر کدام است؟

$6$  (۴)

$5$  (۳)

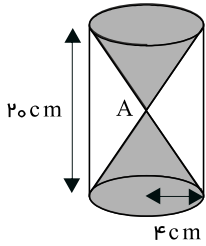
$4$  (۲)

$3$  (۱)

۱۲۱. از نقطه‌ای روی سقف یک اتاق مکعب شکل، چهار نخ به رأس‌های کف اتاق وصل می‌کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

- ۱)  $\frac{1}{3}$  برابر  
 ۲)  $\frac{1}{4}$  برابر  
 ۳)  $\frac{2}{3}$  برابر  
 ۴)  $\frac{1}{4}$  برابر

۱۲۲. در ساعت شنی زیر در هر ثانیه، ۰٫۵ سانتی‌متر مکعب شن از منفذ  $A$  خارج می‌شود. اگر مخروط بالای ساعت شنی پر باشد، پس از چند ثانیه خالی می‌شود؟



- ۱)  $\frac{320}{3}\pi$   
 ۲)  $\frac{6400}{2}\pi$   
 ۳)  $\frac{160}{3}\pi$   
 ۴)  $\frac{3200}{3}\pi$

۱۲۳. یک کره را در یک استوانه به ارتفاع  $h$  قرار داده‌ایم. اگر این کره بر وجه جانبی و دو قاعده‌ی استوانه مماس باشد، کدام رابطه درست است؟ ( $V =$  حجم)

- ۱) استوانه  $V = \frac{4}{3}V$  کره  
 ۲) استوانه  $V = \frac{1}{3}V$  کره  
 ۳) استوانه  $V = \frac{2}{3}V$  کره  
 ۴) استوانه  $V = \frac{1}{4}V$  کره

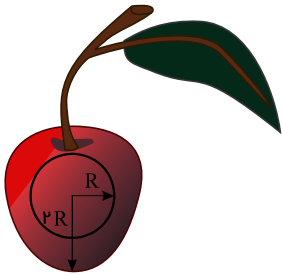
۱۲۴. در کره‌ای به شعاع  $R$  یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم این کره به مکعب نام برده کدام است؟

- ۱)  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$   
 ۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$   
 ۳)  $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$   
 ۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

۱۲۵. کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

- ۱)  $18\pi$   
 ۲)  $27\pi$   
 ۳)  $36\pi$   
 ۴)  $54\pi$

۱۲۶. می‌توان پذیرفت که ضخامت گوشت یک گilas با ضخامت هسته آن برابر است. همچنین می‌توان پذیرفت که گilas و هسته‌ی آن هر دو کره‌ی هستند. نسبت حجم گوشت گilas به حجم هسته‌ی آن برابر کدام گزینه است؟



- ۱) ۳  
 ۲) ۷  
 ۳) ۸  
 ۴) ۲۷

۱۲۷. سه کره داریم که مرکزهایشان هم خط نیستند. حداکثر چند صفحه را می‌توان بر همه‌ی کره‌ها مماس کرد؟

- ۱) ۴  
 ۲) ۶  
 ۳) ۸  
 ۴) هیچکدام

۱۲۸. فرض کنید  $K$  رویه‌ی مکعبی به ضلع ۲ است و  $G$  رویه‌ی کره‌ای به شعاع  $r$  که هم‌مرکز  $K$  است. اگر  $K \cap G$  دقیقاً از شش دایره تشکیل شده باشد، در کدام شرط صدق می‌کند؟

- ۱)  $1 < r \leq \sqrt{2}$   
 ۲)  $1 \leq r < \sqrt{2}$   
 ۳)  $r \leq \sqrt{2}$   
 ۴)  $1 < r < \sqrt{2}$

۱۲۹. چند کره به شعاع ۱ را باید کنار هم بگذاریم تا جمعشان برابر حجم کره‌ای به شعاع ۲ بشود؟

- ۱) ۲  
 ۲) ۴  
 ۳) ۶  
 ۴) ۸

۱۳۰. مکعبی به ضلع ۱ و هشت کره‌ی متمایز به شعاع  $\frac{1}{4}$  داریم که مرکز هر کدامشان یکی از رأس‌های مکعب است. قطر کره‌ای که مماس خارج این هشت کره است کدام است؟

- ۱  $\sqrt{3} - 1$    
  ۲  $\frac{1}{4}$    
  ۳  $\sqrt{2} - 1$    
  ۴  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۱۳۱. کره‌ای به شعاع ۳ را در نظر بگیرید که مرکزش بر مبدأ مختصات دکارتی منطبق است. چند نقطه روی سطح این کره هستند که همه‌ی مختصاتشان عددی صحیح است؟

- ۱ ۳۰   
  ۲ ۲۹   
  ۳ ۱۲   
  ۴ ۶

۱۳۲. در نوعی دستگاه صنعتی با حجم ترکیبی، استوانه‌ای بر یک کره محیط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه چقدر است؟

- ۱  $\frac{2}{3}$    
  ۲  $\frac{3}{2}$    
  ۳  $3\sqrt{2}$    
  ۴  $2\sqrt{3}$

۱۳۳. کره‌ای داخل استوانه‌ای محاط شده است. اگر حجم فضای بین کره و استوانه  $18\pi$  باشد، شعاع و حجم کره به ترتیب برابر است با:

- ۱  $(36\pi, 3)$    
  ۲  $(18\pi, 3)$    
  ۳  $(72\pi, 6)$    
  ۴  $(36\pi, 6)$

۱۳۴. یک نیم‌کره‌ی چوبی توپُر را به طور کامل رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. مساحت کل قسمت رنگ شده  $120$  سانتی‌متر مربع شده است. اگر بخواهیم کره‌ای با همان شعاع نیم‌کره را به طور کامل رنگ‌آمیزی کنیم، مساحت رنگ شده در این حالت چند سانتی‌متر مربع خواهد بود؟

- ۱ ۱۶۰   
  ۲ ۲۴۰   
  ۳ ۳۲۰   
  ۴ ۳۶۰

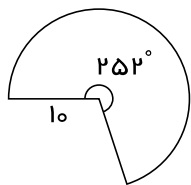
۱۳۵. دو کره داریم که شعاع یکی، ۲ برابر دیگری است. اگر کره کوچک را داخل کره بزرگ قرار دهیم، حجم فضای بین دو کره، چه کسری از حجم کره بزرگ‌تر است؟

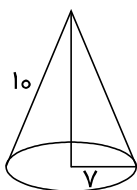
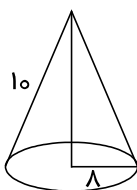
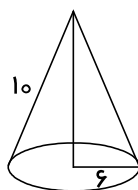
- ۱  $\frac{7}{8}$    
  ۲  $\frac{3}{4}$    
  ۳  $\frac{5}{6}$    
  ۴  $\frac{1}{2}$

۱۳۶. مقداری آب را در استوانه‌ای که سر و ته آن بسته است، ریخته‌ایم. با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف، سطح آب به کدام شکل نمی‌تواند باشد؟ (به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده‌ایم.)

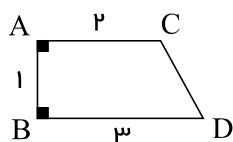
- ۱    
  ۲    
  ۳    
  ۴ 

۱۳۷. برای ساختن مخروط از شکل مقابل دو شعاع را روی هم قرار می‌دهیم. کدام مخروط زیر حاصل می‌شود؟

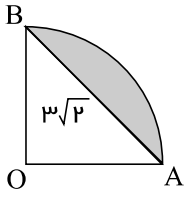


- ۱    
  ۲    
  ۳ هیچکدام   
  ۴ 

۱۳۸. حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع  $AB$  چقدر می‌شود؟

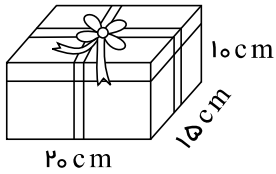
- ۱  $\frac{8}{3}\pi$    
  ۲  $8\pi$    
  ۳  $\frac{19}{3}\pi$    
  ۴  $3\pi$
- 

۱۳۹. ربع دایره مقابل را حول  $OA$  دوران می‌دهیم، اگر وتر  $AB$  برابر  $3\sqrt{2}$  باشد، حجم شکل حاصل از دوران قسمت رنگی کدام است؟



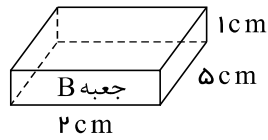
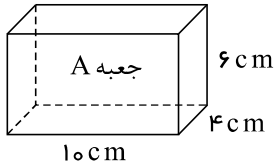
- ۱)  $9\pi$   
۲)  $6\pi$   
۳)  $3\pi$   
۴)  $12\pi$

۱۴۰. یک هدیه‌ی تولد به وسیله‌ی روبان به شکلی که نشان داده‌ایم گره خورده است. پاپیون، گره‌ها و انتهای روبان ۴۷ سانتی‌متر است. طول کل روبان استفاده شده چقدر است؟ (برحسب سانتی‌متر)



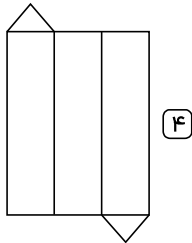
- ۱) ۱۵۷  
۲) ۱۶۷  
۳) ۱۷۹  
۴) ۱۳۷

۱۴۱. چند تا جعبه مثل جعبه‌ی  $B$  در جعبه‌ی  $A$  جا می‌شود؟

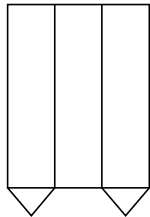


- ۱) ۲۴  
۲) ۱۰  
۳) ۱۲  
۴) ۵

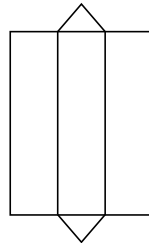
۱۴۲. کدام شکل زیر منشور مثلث القاعده تشکیل نمی‌دهد؟



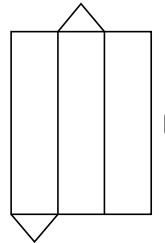
۴



۳

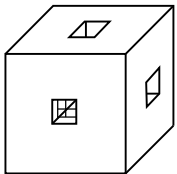


۲



۱

۱۴۳. مکعبی به ضلع  $3m$  همانطور که در شکل معلوم است دارای سوراخ مربعی شکل به ضلع ۱ در وسط هر وجه می‌باشد. سه سوراخ در وسط مکعب طوری برخورد می‌کنند که مکعبی در وسط مکعب ایجاد می‌شود. مساحت کل مکعب به متر مربع برابر است با:



- ۱) ۷۲  
۲) ۷۶  
۳) ۷۸  
۴) ۸۰

۱۴۴. یک شرکت جعبه‌های مکعب شکل می‌سازد. حجم کل جعبه برابر است با  $64000 \text{ cm}^3$  و ارتفاع هر کدام  $10 \text{ cm}$  است. اگر هزینه‌ی رنگ کردن برای هر سانتی‌متر مربع ۱۵ دلار باشد، هزینه‌ی رنگ آمیزی یک مکعب چند دلار است؟

۴) ۶۰۲۰

۳) ۷۰۴۰

۲) ۶۷۲۰

۱) ۶۴۰۰

۱۴۵. ۱۵ مکعب  $1 \text{ cm}^3$  به رنگ آبی و ۱۶ مکعب  $1 \text{ cm}^3$  زرد و ۳۳ مکعب  $1 \text{ cm}^3$  سیاه را به هم چسبانده‌ایم تا یک مکعب بزرگ تشکیل شود. کمترین تعداد مکعب‌های سیاه را در سطوح بیرونی مکعب چند تا است؟

۴) ۳۲

۳) ۲۶

۲) ۲۴

۱) ۲۲

۱۴۶. جمع طول لبه‌های یک مکعب مستطیل  $68 \text{ cm}$  است. اگر طول اضلاع اعداد صحیح و مساحت قاعده  $18 \text{ cm}^2$  باشد، به این ترتیب حجم‌های ممکن برای مکعب مستطیل کدام است؟

۴) ۱۴۴ و ۱۰۸

۳) ۱۴۴ و ۲۷

۲) ۷۲ و ۱۰۸

۱) ۷۲ و ۵۴

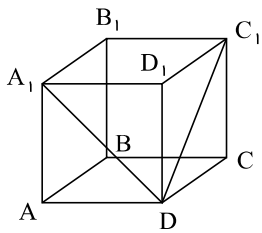
۱۴۷. می‌خواهیم از قطعه کاغذی مربعی به ابعاد  $n \times n$ ، مکعبی به ضلع ۲ در بیاوریم. کوچکترین مقدار ممکن برای  $n$  چند است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



۱۴۸. زاویه بین دو قطر  $DC_1$  و  $A_1D$  از مکعب  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  چقدر است؟

$60^\circ$  (۱)

$80^\circ$  (۲)

$45^\circ$  (۳)

$75^\circ$  (۴)

۱۴۹. علی تعداد زیادی مکعب مستطیل با ابعاد  $1 \times 2 \times 3$  دارد. کمترین تعداد مکعب مستطیل‌هایی که برای ساختن یک مکعب توپر لازم

دارد چند تاست؟

۳۶ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲۱۲ (۱)

۱۵۰. هلیا ۵ تا مکعب دارد و ۳ تا چهاروجهی. این حجم‌ها روی هم چند وجه دارند؟

۵۲ (۴)

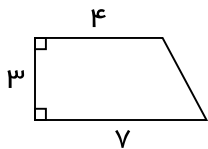
۵۰ (۳)

۴۸ (۲)

۴۲ (۱)

۱۵۱. اگر یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه را با اندازه‌ی اضلاع مشخص شده در شکل زیر، حول قاعده‌ی کوچک‌تر دوران دهیم، حجم شکل حاصل را

به دست آورید.



$45\pi$  (۲)

$36\pi$  (۱)

$60\pi$  (۴)

$54\pi$  (۳)

۱۵۲. یک ظرف چوبی توخالی به شکل نیم‌کره داریم که قطر خارجی آن  $10\text{ cm}$  و ضخامت آن  $1\text{ cm}$  است. می‌خواهیم سطح کل این ظرف را

رنگ کنیم. اگر برای هر متر مربع، به  $100$  گرم رنگ نیاز باشد، چند گرم رنگ مصرف می‌شود؟ ( $\pi \simeq 3$ )

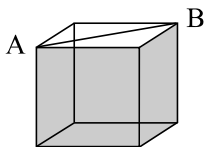
$2,73$  (۴)

$7,43$  (۳)

$22,29$  (۲)

$7,24$  (۱)

۱۵۳. یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $3b$  را در راستای پاره‌خط  $AB$  بریده‌ایم، مساحت کل یکی از قسمت‌های ایجاد شده چقدر است؟



$(18\sqrt{2} + 54)b^2$  (۲)

$3\sqrt{2}b^2$  (۱)

$(27 + 9\sqrt{2})b^2$  (۴)

$27b^2$  (۳)

۱۵۴. اندازه‌ی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین  $6\sqrt{2}$  است. اگر این مثلث را حول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن دوران دهیم حجم

حاصل از این دوران چقدر است؟

$216\pi$  (۴)

$144\pi$  (۳)

$72\pi$  (۲)

$36\pi$  (۱)

۱۵۵. یک لوزی با قطرهای ۶ و ۴ را حول قطر بزرگش دوران می‌دهیم. حجم حاصل از این دوران برابر است با:

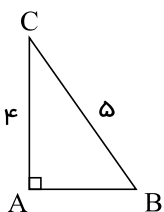
$12\pi$  (۴)

$16\pi$  (۳)

$4\pi$  (۲)

$8\pi$  (۱)

۱۵۶. شکل زیر را یک بار حول ضلع  $AB$  و بار دیگر حول ضلع  $AC$  دوران می‌دهیم. اختلاف حجم دو مخروط حاصل کدام است؟



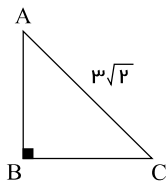
$6\pi$  (۲)

$4\pi$  (۱)

$8\pi$  (۴)

$2\pi$  (۳)





۱۵۷. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین زیر را حول ضلع  $AB$  دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل برابر کدام گزینه است؟

۱۲π (۲)

۹π (۱)

۲۷π (۴)

۱۸π (۳)

۱۵۸. مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگتر دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

۱۲π (۴)

۱۰π (۳)

$\frac{۴۸\pi}{۵}$  (۲)

$\frac{۲۶\pi}{۵}$  (۱)

۱۵۹. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  $\sqrt{۵}$  سانتی‌متر است. این مثلث را حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟

۳۷۵π (۴)

۲۲۵π (۳)

$\frac{۳۷۵\pi}{۳}$  (۲)

$\frac{۱۲۵\pi}{۳}$  (۱)

۱۶۰. صفحه‌ی کاغذی به شکل مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم  $۲\text{cm}$  و  $۳\text{cm}$  را حول ضلع  $۳\text{cm}$  به اندازه‌ی  $۱۸۰^\circ$  دوران می‌دهیم. حجم شکل به وجود آمده چقدر است؟

π (۴)

۶π (۳)

۴π (۲)

۲π (۱)

۱۶۱. حجم حاصل از دوران ربع دایره‌ای به شعاع  $۲\text{cm}$  حول شعاع خود، برابر با کدام گزینه است؟

$\frac{۲۰\pi}{۳}$  (۴)

$\frac{۱۶\pi}{۳}$  (۳)

$\frac{۸\pi}{۳}$  (۲)

$\frac{۳۲\pi}{۳}$  (۱)

۱۶۲. مستطیلی به طول  $a$  و عرض  $b$  را یکبار حول طول و بار دیگر حول عرض آن دوران می‌دهیم. حجم شکل اول چند برابر حجم شکل دوم است؟

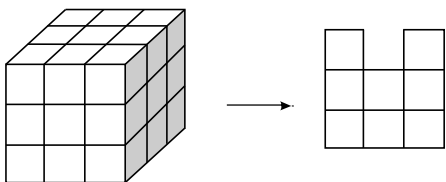
$\frac{1}{b}$  (۴)

$\frac{1}{a}$  (۳)

$\frac{b}{a}$  (۲)

$\frac{a}{b}$  (۱)

۱۶۳. مکعب زیر از ۲۷ مکعب کوچک و مساوی به ضلع ۱ سانتی‌متر تشکیل شده است. پنج مکعب از آن طوری برداشتیم که وقتی از روبرو و از راست به آن نگاه می‌کنیم، شکل سمت راست دیده می‌شود. اندازه‌ی سطح شکل باقی‌مانده چند سانتی‌متر مربع است؟



۶۲ (۴)

۴۹ (۳)

۵۸ (۲)

۵۴ (۱)

۱۶۴. ارتفاع یک مخروط دو برابر شعاع قاعده آن و حجم آن با حجم یک نیم‌کره برابر است. نسبت شعاع نیم‌کره به شعاع قاعده مخروط چه قدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۶۵. در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی  $۴۸\pi$  محاط شده است. بیش‌ترین حجم این استوانه چه قدر است؟

۱۴۴π (۴)

۱۰۸π (۳)

۹۸π (۲)

۹۶π (۱)

۱۶۶. کره‌ای از تمام رأس‌های یک مکعب مستطیل به ابعاد  $۲, ۶$  و  $۵$  گذشته است، سطح این کره چند برابر  $\pi$  است؟

۱۳۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۸۱ (۲)

۶۴ (۱)

۱۶۷. کره‌ای در داخل مکعبی محاط و بر مکعب دیگری محیط است. اگر سطح کره  $S_۲$  و سطح مکعب‌ها  $S_۱$  و  $S_۳$  باشد، حاصل کسر  $\frac{S_۱ + S_۳}{۲S_۲}$  چه قدر است؟

- ۱)  $\frac{\pi}{۴}$       ۲) ۱      ۳)  $\frac{۴}{\pi}$       ۴)  $\frac{۸}{\pi}$

۱۶۸. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟

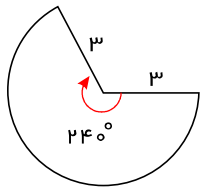
- ۱)  $۱۲\pi$       ۲)  $۱۶\pi$       ۳)  $۱۸\pi$       ۴)  $۲۴\pi$

۱۶۹. در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعده  $۲\sqrt{۳}$  واحد، زاویه صفحه هر وجه با صفحه قاعده آن برابر  $۶۰^\circ$  است. حجم هرم چه قدر است؟

- ۱) ۸      ۲) ۹      ۳) ۱۲      ۴) ۱۸

۱۷۰. شعاع قاعده یک جعبه استوانه‌ای شکل  $۸\text{cm}$  و ارتفاع آن  $۳\text{cm}$  است. چند سانتی‌متر به شعاع یا به ارتفاع اضافه کنیم، تا حجم استوانه، در هر دو حالت به یک اندازه افزایش یابد؟

- ۱) ۱      ۲)  $\frac{۱۶}{۳}$       ۳) هر عددی      ۴)  $\frac{۷}{۲}$

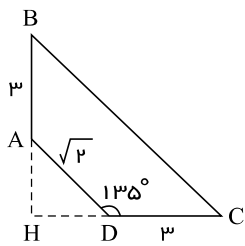


۱۷۱. از یک دایره کاغذی به شعاع  $۳\text{cm}$ ، قطاع مقابل را بریده و با آن مخروط می‌سازیم، حجم این مخروط کدام است؟

- ۱)  $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}\pi$       ۲)  $\frac{۴\sqrt{۵}}{۳}\pi$       ۳)  $۲\sqrt{۵}\pi$       ۴)  $\frac{۵\sqrt{۵}}{۳}\pi$

۱۷۲. یک مخروط دوار (قائم) را با یک صفحه که بر وسط ارتفاع مخروط عمود است، به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. نسبت حجم مخروط کوچک بالا به حجم مخروط ناقص برابر است با:

- ۱)  $\frac{۱}{۲}$       ۲)  $\frac{۱}{۴}$       ۳)  $\frac{۱}{۷}$       ۴)  $\frac{۱}{۸}$



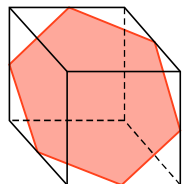
۱۷۳. شکل زیر را حول ضلع  $AB$  دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل چقدر است؟

- ۱)  $۶۳\pi$       ۲)  $۲۱\pi$       ۳)  $\frac{۶۴\pi}{۳}$       ۴)  $\frac{۶۳\pi}{۴}$

۱۷۴. نیم‌دایره‌ای به قطر  $۲۰\text{cm}$  را حول قطرش به اندازه  $۶۰^\circ$  دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل کدام است؟

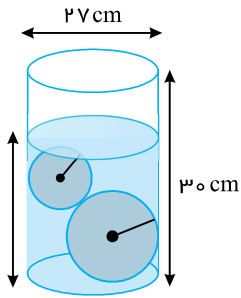
- ۱)  $۱۰۰\pi$       ۲)  $\frac{۲۰۰۰}{۹}\pi$       ۳)  $\frac{۱۵۰۰}{۴}\pi$       ۴)  $۱۵۰\pi$

۱۷۵. مساحت شش ضلعی رنگی  $۴۸\sqrt{۳}$  و رأس‌های شش ضلعی سایه‌خورده وسط یال‌های مکعب هستند. حجم مکعب کدام است؟



- ۱) ۵۰۰      ۲) ۵۱۲      ۳) ۴۸۰      ۴) ۴۹۲

۱۷۶. استوانه‌ای که دارای قطر  $27\text{cm}$  و ارتفاع  $30\text{cm}$  است، شامل دو کره با شعاع  $6\text{cm}$  و  $9\text{cm}$  است. کره بزرگ‌تر در کف استوانه قرار دارد. (طبق شکل) آب درون استوانه ریخته می‌شود به گونه‌ای که فقط دو کره را پوشاند. حجم آب لازم برابر با کدام گزینه است؟



۱  $3672\pi$

۲  $3660\pi$

۳  $3375\pi$

۴  $3114\pi$

۱۷۷. اگر بخواهیم با تراشیدن اطراف یک زیگورات به ارتفاع ۳ آجر خشتی، یک هرم مصری با بیش‌ترین مساحت قاعده ممکن بسازیم، ارتفاع آن هرم حداکثر برابر چند آجر خشتی می‌شود؟

۴  $5 \times (5 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

۳ ۳

۲ ۲٫۵

۱ ۲

۱۷۸. برای محاسبه ارتفاع یک زیگورات، تعداد آجرهای اطراف قاعده آن را شمرده‌ایم، که ۸۰ عدد بود. ارتفاع این زیگورات چند آجر خشتی است؟

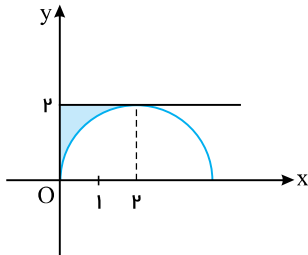
۴ چنین زیگوراتی نداریم.

۳ ۱۲

۲ ۱۱

۱ ۹

۱۷۹. در شکل مقابل، حجم حادث از دوران سطح هاشور زده حول محور  $OX$  کدام است؟



۲  $\frac{4\pi}{3}$

۱  $2\pi$

۴  $3\pi$

۳  $\frac{8\pi}{3}$

۱۸۰. صفحه‌ای به فاصله  $3\text{cm}$  از مرکز کره‌ای به شعاع ۵، کره را قطع می‌کند. مساحت قاعده شکل جدا شده از کره چند برابر عدد  $\pi$  است؟

۴ ۲۵

۳ ۱۶

۲ ۹

۱ ۴

۱۸۱. مساحت کل مکعبی که داخل کره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر محاط شده باشد، چقدر است؟

۴  $\frac{3}{4}$

۳  $\frac{1}{2}$

۲ ۳

۱ ۸

۱. اگر قطر کره‌ای را ۲ برابر کنیم، آنگاه به حجم اولیه‌ی آن چقدر افزوده می‌شود؟

- ۱) ۸ برابر حجم اولیه      ۲) ۷ برابر حجم اولیه      ۳) ۴ برابر حجم اولیه      ۴) ۳ برابر حجم اولیه

پاسخ: گزینه ۲ اگر قطر کره دو برابر شود، شعاع نیز دو برابر شده و حجم که با  $\frac{4}{3}\pi r^3$  محاسبه می‌شود، (چون توان سوم شعاع ظاهر شده) ۸ برابر می‌شود، یعنی ۷ برابر به حجم اولیه افزوده می‌شود.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{اولیه} \rightarrow \text{ثانویه } V = 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 7\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi(8r^3)$$

۲. حجم نیم کره‌ای به شعاع  $R$  از کدام دستور به دست می‌آید؟

- ۱)  $2\pi R^2$       ۲)  $4\pi R^2$       ۳)  $\frac{4}{3}\pi R^3$       ۴)  $\frac{2}{3}\pi R^3$

پاسخ: گزینه ۴ حجم کره از رابطه  $\frac{4}{3}\pi R^3$  به دست می‌آید، پس حجم نیم کره برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

۳. مجموعه نقاطی از فضا که فاصله‌ی همه‌ی آن‌ها از یک نقطه به نام مرکز برابر باشند را ..... گویند.

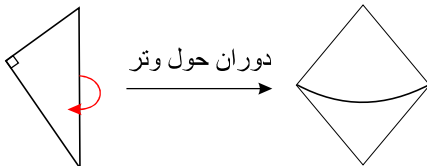
- ۱) کره      ۲) دایره      ۳) نیم کره      ۴) مخروط

پاسخ: گزینه ۱

۴. از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چه شکلی پدید می‌آید؟

- ۱) یک مخروط      ۲) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک      ۳) یک کره و یک مخروط با شعاع مشترک      ۴) یک مخروط و یک هرم

پاسخ: گزینه ۲



۵. حجم هرمی با قاعده‌ی لوزی به قطرهای ۳ و ۴ و ارتفاع ۵ چه قدر است؟

- ۱) ۶۰      ۲) ۳۰      ۳) ۱۰      ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 4}{2} \times 5 = 10$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{2}$$

۶. مساحت کره‌ای  $11,56\pi$  سانتی متر مربع است. قطر کره چند سانتی متر است؟

- ۱)  $1,7\text{cm}$       ۲)  $3,4\text{cm}$       ۳)  $6,8\text{cm}$       ۴)  $2,89\text{cm}$

پاسخ: گزینه ۲

$$S = 4\pi r^2 \quad 4\pi r^2 = 11,56\pi \rightarrow r^2 = \frac{11,56}{4} = 2,89 \rightarrow \text{شعاع } r = 1,7 \rightarrow \text{قطر} = 1,7 \times 2 = 3,4\text{cm}$$

۷. وجوه جانبی هر هرم به شکل ..... است. (هرمزگان - خرداد ۹۵)

- ۱) مثلث      ۲) مستطیل      ۳) مربع      ۴) متوازی‌الاضلاع

پاسخ: گزینه ۱

۸. حجم هرم مربع القاعدہ ای به اضلاع قاعدہ ای  $a$  و ارتفاع  $b$  کدام است؟ (یزد - خرداد ۹۵)

$\frac{a^2 b^3}{3}$  (۴)

$\frac{ab}{3}$  (۳)

$\frac{1}{3} a^2 b$  (۲)

$\frac{1}{3} ab^2$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$\frac{1}{3} a^2 b$

ارتفاع  $\times$  مساحت قاعدہ  $= \frac{1}{3}$  حجم هرم

۹. اگر یک متوازی الاضلاع به ضلع های ۹ و ۶ سانتی متر و ارتفاع ۴ سانتی متر را حول ضلع بزرگ تر دوران دهیم، حجم حاصل از دوران چند سانتی متر مکعب است؟

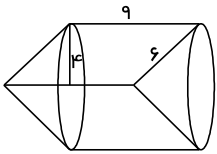
$324\pi$  (۴)

$144\pi$  (۳)

$108\pi$  (۲)

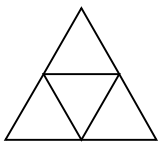
$72\pi$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳



اگر مخروط برآمده را در قسمت فرو رفته قرار دهیم، استوانه ای به شعاع قاعدہ ۴ و ارتفاع ۹ خواهیم داشت، پس کفایت حجم استوانه حاصل را بدست آوریم:

استوانه  $V = \pi r^2 h = \pi(4)^2 \times 9 = 144\pi$



۱۰. با سطح مثلث شکلی، به ضلع  $10\text{ cm}$  یک چهاروجهی منتظم ساخته ایم. مساحت جانبی آن کدام است؟

$25\sqrt{3}$  (۲)

$100\sqrt{3}$  (۱)

$75\sqrt{3}$  (۴)

$50\sqrt{3}$  (۳)

پاسخ: گزینه ۴ مساحت جانبی این چهاروجهی منتظم از ۳ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱۰ ساخته می شود. پس ابتدا مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱۰ را محاسبه می کنیم.

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  برابر  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  است.

پس مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱۰ برابر می شود با:

$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

$25\sqrt{3} \times 3 = 75\sqrt{3}$

حال مساحت ۳ مثلث متساوی الاضلاع را به دست می آوریم:

۱۱. شعاع قاعدہ ای یک مخروط، با شعاع قاعدہ ای یک استوانه برابر است. اگر ارتفاع استوانه نصف ارتفاع مخروط باشد، نسبت حجم استوانه به حجم مخروط برابر است با:

۳ (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{2}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$R =$  شعاع قاعدہ استوانه  $=$  شعاع قاعدہ مخروط

$2h =$  ارتفاع مخروط  $\rightarrow h =$  ارتفاع استوانه

استوانه  $V = \pi R^2 h$ ، مخروط  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 (2h) = \frac{2}{3} \pi R^2 h$

$\rightarrow \frac{V_{\text{استوانه}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{2}{3} \pi R^2 h} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

۱۲. اگر شعاع کره‌ای را سه برابر کنیم، حجم کره‌ی حاصل چند برابر می‌شود؟

۲۷ (۴)

۸۱ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

حجم کره باتوان سوم شعاع رابطه دارد. اگر شعاع ۳ برابر شود حجم ۳<sup>۳</sup> برابر می‌شود.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

↓  
(۳r)<sup>۳</sup>  
↓  
(۲۷r<sup>۳</sup>)

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V_2 = \frac{4}{3}\pi(3r)^3 \Rightarrow V_2 = \frac{4}{3}\pi \times 27r^3 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 27r^3}{\frac{4}{3}\pi \times r^3} = 27$$

۱۳. مکعبی به قطر  $\sqrt{12}$  را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه کدام است؟

۴π (۴)

۳√۲π (۳)

√۲π (۲)

۱۶π (۱)

پاسخ: گزینه ۴ نکته: قطر مکعب به ضلع  $a$  از رابطه  $\sqrt{3}a$  به دست می‌آید.

$$\Rightarrow \sqrt{3}a = \sqrt{12} \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

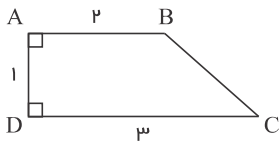
ضلع مکعب محاط شده در درون استوانه برابر ۲ است.

در نتیجه قطر قاعده این استوانه برابر قطر مربع (وجه بالایی مکعب) است.

$$\sqrt{2} = \text{شعاع قاعده استوانه} \Rightarrow \text{قطر قاعده استوانه} = 2\sqrt{2} = \text{قطر مربع}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = \pi(\sqrt{2})^2 \times 2 = 4\pi$$



۱۴. حجم حاصل از دوران ذوزنقه مقابل، حول ضلع DC چند سانتی‌متر مکعب است؟

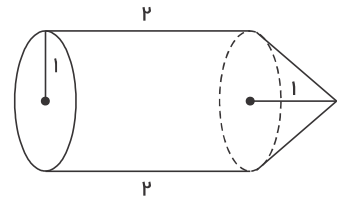
$\frac{7}{3}\pi$  (۲)

۳π (۱)

$\frac{4}{3}\pi$  (۴)

$\frac{13}{3}\pi$  (۳)

پاسخ: گزینه ۲ شکل زیر از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است.



$$\text{حجم شکل حاصل} = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}} =$$

$$\pi(1)^2 \times 2 + \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 1 = 2\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$$

۱۵. چند جمله از جمله‌های زیر نادرست است؟

- حجم کره‌ای به شعاع ۳ برابر است با  $36\pi$

- از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر، یک مخروط به وجود می‌آید.

- چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.

- مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی  $r$  و ارتفاع  $r$  برابر است با  $2\pi r^2$ .

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ عبارت اول صحیح است. چرا که داریم:

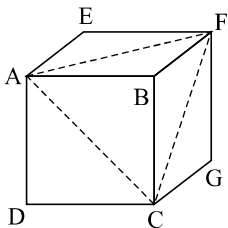
$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4\pi \times 27}{3} = 36\pi$$

عبارت دوم نادرست است؛ چرا که از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر دو مخروط ایجاد می‌شود.

عبارت سوم نیز صحیح است؛ چرا که یک چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.  
عبارت چهارم صحیح است؛ چرا که داریم:

$$S = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = 2\pi r \times r = 2\pi r^2$$

۱۶. مطابق شکل روبه‌رو از مکعبی به طول ضلع یک با رأس‌های  $A, B, C, D, E, F, G, H$  هرم  $AFCB$  را بریده‌ایم. به همین ترتیب هرم‌های  $EAFH$  و  $GFCH$  و  $DACH$  را می‌بریم. حجم شکل باقی‌مانده کدام است؟



- ۱) صفر  
۲)  $\frac{1}{3}$   
۳)  $\frac{2}{3}$   
۴)  $\frac{1}{5}$

پاسخ: گزینه ۲ تمامی هرم‌ها متمایزند. حجم یکی از آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

بنابراین میزان حجم باقی‌مانده برابر است با:

۱۷. مساحت جانبی و حجم یک منشور با قاعده مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ و ارتفاع ۳ به ترتیب برابر کدام است؟

- ۱)  $3\sqrt{3}, 12$     ۲)  $12\sqrt{3}, 12$     ۳)  $3\sqrt{3}, 36$     ۴)  $12\sqrt{3}, 36$

پاسخ: گزینه ۴ حجم منشور برابر است با مساحت مربعی به ضلع  $a$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  است. مساحت قاعده در ارتفاع، داریم:

$$\text{مساحت قاعده} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \times 4}{2} = 4\sqrt{3} \rightarrow \text{حجم منشور } V = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

مساحت جانبی هم برابر است با: محیط قاعده  $\times$  ارتفاع.

$$3 \times (4 \times 3) = 36$$

۱۸. مساحت کل یک هرم منتظم  $96\text{cm}^2$  است. اگر قاعده این هرم مربعی به ضلع  $6\text{cm}$  باشد، اندازه ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟

- ۱)  $3\text{cm}$     ۲)  $4\text{cm}$     ۳)  $5\text{cm}$     ۴)  $6\text{cm}$

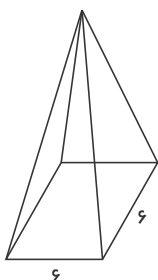
پاسخ: گزینه ۲

باتوجه به اینکه مساحت کل هرم منتظم با قاعده مربع از مساحت یک مربع و چهار مثلث متساوی‌الساقین تشکیل شده است، پس:

مساحت کلها  $4 \times S + \text{مساحت قاعده مربع} = \text{مساحت کل هرم منتظم با قاعده مربع}$

$$96 = 6 \times 6 + 4S \Rightarrow 96 - 36 = 4S \Rightarrow 60 = 4S \Rightarrow S = 15$$

مساحت مثلث



مساحت یک مثلث برابر ۱۵، حال ارتفاع مثلث وجه جانبی را به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{6h}{2} = 15 \Rightarrow h = 5$$

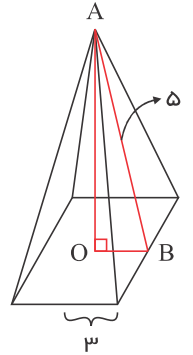
حال برای مثلث قائم‌الزاویه  $AOB$  داریم:

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow AO^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow AO^2 = 16 \Rightarrow AO = 4$$

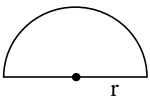
در واقع ارتفاع هرم است.



۱۹. یک نیم‌دایره را به شکل یک کیف مخروطی شکل در می‌آوریم (برای این کار، دو شعاع نیم‌دایره را که در امتداد هم هستند، بر هم منطبق می‌کنیم). زاویه رأس این مخروط چند درجه است؟

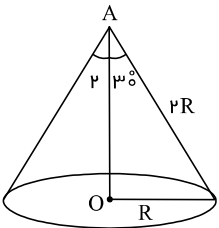
- ۱) ۴۵      ۲) ۶۰      ۳) ۳۰      ۴) بستگی به شعاع نیم‌دایره دارد.

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا محیط نیم‌دایره را محاسبه می‌کنیم که برابر  $\pi r$  است. حال این مقدار را برای محیط قاعده مخروط (دایره به شعاع  $R$ ) قرار می‌دهیم.



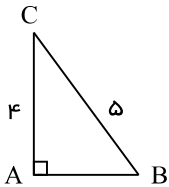
$$\pi r = 2\pi R \Rightarrow r = 2R$$

و باتوجه به اینکه ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس  $\hat{A}_1 = 30^\circ$  در نتیجه زاویه رأس مخروط برابر  $60^\circ = 2 \times 30^\circ$  است.



۲۰. حجم حاصل از دوران مثلث زیر حول ضلع AB کدام است؟

- ۱)  $10\pi$       ۲)  $12\pi$       ۳)  $16\pi$       ۴)  $20\pi$

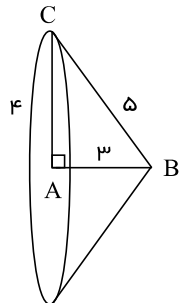


پاسخ: گزینه ۳ از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائمش یک مخروط حاصل می‌شود. برای اینکه ارتفاع این مخروط را به دست آوریم، از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\overline{AB}^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \overline{AB} = 3$$



حال حجم مخروطی با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4)^2(3) = 16\pi$$

۲۱. حجم کره‌ای به شعاع  $2a$  با حجم مخروطی به قطر قاعده  $8a$  برابر است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعده آن چیست؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{8}$       ۴)  $\frac{1}{16}$





پاسخ: گزینه ۲ باتوجه به اینکه حجم کره و مخروط با هم برابرند، در نتیجه:

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi(2a)^2 h}{\frac{4}{3}\pi(2a)^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 4a^2 h}{\frac{4}{3}\pi \cdot 8a^3} = \frac{2h}{4a} = \frac{h}{2a} = 1$$

$$\Rightarrow h = 2a$$

ارتفاع مخروط را به دست آوردیم:

حال نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعده آن را به دست می آوریم:

$$\frac{h}{4a} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$$

۲۲. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده آن است اگر حجم مخروط  $128\pi$  باشد ارتفاع آن کدام است؟

۱۴  $8\sqrt{2}$

۱۳  $12\sqrt{2}$

۲  $6\sqrt{2}$

۱  $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنیم شعاع قاعده این مخروط برابر  $x$  باشد، در نتیجه ارتفاع این مخروط برابر می شود با:  $h = 3x$ .

حال از رابطه حجم مخروط داریم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot 3x = \pi x^3$$

$$\pi x^3 = 128\pi \Rightarrow x^3 = 128 \Rightarrow x = \sqrt[3]{128}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{64 \times 2} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

حال باتوجه به اینکه  $h = 3x$  است، داریم:

$$h = 3x = 3 \times 4\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{2}$$

۲۳. مساحت کره‌ای  $100\pi$  است، حجم آن ..... است.

۱۴  $\frac{500}{3}\pi$

۱۳  $\frac{400}{3}\pi$

۲  $500\pi$

۱  $\frac{500}{2}\pi$

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا باتوجه به مساحت کره شعاع آن را به دست می آوریم.

$$4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow 4r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

با داشتن شعاع کره می توانیم حجم آن را نیز محاسبه کنیم.

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{125 \times 4}{3}\pi = \frac{500}{3}\pi$$

۲۴. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده‌ی آن است. اگر حجم این مخروط  $216\pi$  باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

۱۴ ۳

۱۳ ۶

۲ ۱۸

۱ ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

$$R = \text{شعاع قاعده}, h = 3R$$

$$V_{\text{حجم مخروط}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 (3R) = \pi R^3$$

$$\rightarrow 216\pi = \pi R^3 \rightarrow R^3 = 216 \rightarrow R = \sqrt[3]{216} \Rightarrow R = 6$$

$$\rightarrow h = 3 \times 6 = 18$$

۲۵. اگر کره‌ای در استوانه محاط شده باشد، قطر کره همواره با کدام یک از گزینه‌های زیر مساوی نیست؟

۱۴ نصف محیط قاعده‌ی استوانه

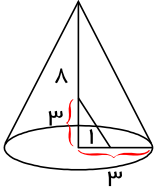
۱۳ فاصله‌ی دو قاعده‌ی استوانه

۲ قطر قاعده‌ی استوانه

۱ ارتفاع استوانه

پاسخ: گزینه ۴

۲۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع ۳ و ارتفاع ۸ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری به ضلع ۱ و ارتفاع ۳ که داخل آن قرار دارد را حول ضلع ۸ دوران داده‌ایم. حجم بین دو شکل برابر است با:



۲۰π (۲)

۱۸π (۱)

۲۵π (۴)

۲۳π (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 8 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 8 = 24\pi$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R'^2 h' = \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 3 = \frac{1}{3}\pi \times 3 = \pi$$

$$\text{حجم فضای بین دو مخروط} = 24\pi - \pi = 23\pi$$

۲۷. ستونی به شکل منشور ۵ پهلو است که هر ضلع قاعده‌اش ۰٫۵ متر و ارتفاع آن ۲۰ متر است. می‌خواهیم به بدنه این ستون کاشی بچسبانیم، چند متر مربع کاشی لازم است؟

۲۰ (۴)

۴۰ (۳)

۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ هنگامی که می‌گویند منشور ۵ پهلو یعنی قاعده آن ۵ ضلعی منتظم است و منشور قائم است. پس داریم:

$$5 \times (0.5 \times 20) = 5 \times 10 = 50(m)^2$$

۲۸. اگر شعاع قاعده استوانه را ۳ برابر کنیم، مساحت جانبی آن چند برابر می‌شود؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲ مساحت جانبی استوانه برابر است با: محیط قاعده  $\times$  ارتفاع.

$$r = \text{شعاع قاعده} \quad , \quad h = \text{ارتفاع استوانه}$$

$$\text{مساحت جانبی اولیه} = 2r\pi \times h = 2rh\pi$$

$$\text{مساحت جانبی ثانویه} = 2(3r)\pi \times h = 6rh\pi$$

در نتیجه داریم:

$$\rightarrow \frac{6rh\pi}{2rh\pi} = 3$$

۲۹. دو استوانه با حجم‌های برابر داریم. اگر شعاع قاعده استوانه اول ۳ برابر دومی باشد، نسبت ارتفاع استوانه اول به دوم چه قدر است؟

۶ (۴)

$\frac{1}{6}$  (۳)

$\frac{1}{9}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$V_1 = V_2 \rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \xrightarrow{r_1=3r_2} \pi 9r_2^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$$

$$\rightarrow 9h_1 = h_2 \rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{9}$$

۳۰. مساحت کره‌ای برابر با  $36\pi$  است. حجم آن برابر است با:

۲۷π (۴)

۱۰۸π (۳)

۹π (۲)

۳۶π (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 36\pi \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$$

۳۱. اگر قطر کره‌ای  $m$  برابر شود، حجم و مساحت چند برابر می‌شوند؟

- ۱) حجم  $m^3$  برابر و مساحت  $m^2$  برابر    ۲) حجم  $\frac{m^3}{8}$  برابر و مساحت  $\frac{m^2}{4}$  برابر    ۳) هر دو  $m^3$  برابر    ۴) هر دو  $\frac{m^3}{8}$  برابر

پاسخ: گزینه ۱ نکته: مساحت کره با شعاع  $r$  برابر  $4\pi r^2$  و حجم آن برابر  $\frac{4}{3}\pi r^3$  است.

دقت کنید که گفته قطر کره  $m$  برابر شود در نتیجه شعاع کره نیز  $m$  برابر می‌شود. حال شعاع کره  $R$  فرض می‌کنیم.

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times (mR)^3}{\frac{4}{3} \times \pi \times (R)^3} = \frac{m^3 R^3}{R^3} = m^3$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{4\pi(mR)^2}{4\pi(R)^2} = \frac{m^2 \times R^2}{R^2} = m^2$$

۳۲. اگر بخواهیم با مقوا، مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ درست کنیم، چند سانتی‌متر مربع مقوا نیاز داریم؟

- ۱) ۶۸    ۲) ۱۲۰    ۳) ۵۴    ۴) ۹۴

پاسخ: گزینه ۴ نکته: مساحت کل مکعب مستطیلی با ابعاد  $a, b$  و  $c$  برابر است با:

$$\text{مساحت کل} = 2(ab + ac + bc)$$

در واقع سؤال از ما مساحت کل مکعب را می‌خواهد:

$$2 \times (3 \times 4 + 4 \times 5 + 3 \times 5) = 2 \times (12 + 20 + 15) = 2 \times 47 = 94$$

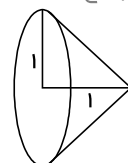
علت ضرب در ۲ بالا مشخص است، زیرا از هر نوع مستطیل دو تا داریم.

۳۳. حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم  $1\text{ cm}$  حول یکی از اضلاع قائمه چقدر است؟

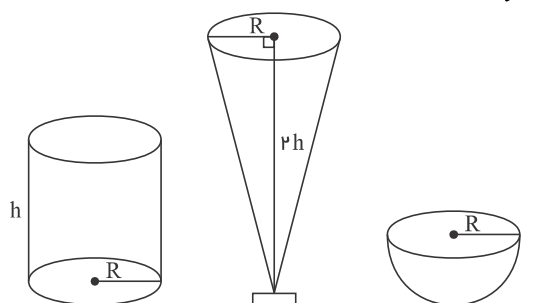
- ۱)  $\frac{\pi}{3}$     ۲)  $\pi$     ۳)  $\frac{2\pi}{3}$     ۴)  $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱ حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم حول یک ضلع آن مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع ۱ است.

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$



۳۴. باتوجه به شکل‌های زیر، اگر ظرف استوانه‌ای شکل را پر از آب کرده و در دو ظرف دیگر خالی کنیم، دو ظرف پر شده و هیچ آبی در استوانه باقی نمی‌ماند. کدام رابطه زیر درست است؟ (شعاع‌ها با هم مساوی و ارتفاع مخروط دو برابر ارتفاع استوانه است.)



۱)  $h = \frac{2}{3}R$

۲)  $h = \frac{3}{2}R$

۳)  $h = 3R$

۴)  $h = 2R$

پاسخ: گزینه ۴ باتوجه به فرض مسئله حجم استوانه برابر حاصل جمع حجم نیم کره و مخروط است.

$$V_{\text{استوانه}} = V_{\text{نیم کره}} + V_{\text{مخروط}}$$

$$\pi R^2 h = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 + \frac{1}{3} \times \pi R^2 \cdot 2h$$

$$\pi R^2 h = \frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{2}{3} \pi R^2 h$$

$$\pi R^2 h = \pi R^2 \left( \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h \right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h \Rightarrow h - \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R$$

از  $\pi R^2$  فاکتورگیری می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{1}{3}h = \frac{2}{3}R \Rightarrow h = 2R$$

۳۵. نسبت عدد حجم به مساحت کل مکعبی برابر با ۱ می‌باشد، مساحت جانبی این مکعب کدام است؟

۲۱۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ باتوجه به اینکه مساحت کل مکعب بر ضلع  $a$  برابر  $6a^2$  و حجم مکعب به ضلع  $a$  برابر  $a^3$  است، پس:

$$\frac{6a^2}{a^3} = 1 \Rightarrow \frac{6}{a} = 1 \Rightarrow a = 6$$

مساحت جانبی مکعب به ضلع  $a$  برابر  $4a^2$  است.

$$\Rightarrow 4 \times 6^2 = 144$$

۳۶. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده آن است. اگر حجم مخروط  $216\pi$  باشد، ارتفاع آن برابر است با:

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$h = 3R$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \times 3R = \pi R^3$$

$$\Rightarrow \pi R^3 = 216\pi \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6$$

$$h = 3R = 3 \times 6 = 18$$

۳۷. مساحت کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی‌متر باشد، چند سانتی‌متر مربع است؟

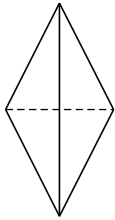
$16\sqrt{2}$  (۴)

$16\sqrt{3}$  (۳)

$4\sqrt{2}$  (۲)

$4\sqrt{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳



مساحت ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  = مساحت کل چهاروجهی منتظم

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  برابر است با  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  در این صورت:

$$\text{مساحت کل هرم} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 16\sqrt{3}$$

۳۸. در یک قوطی استوانه‌ای حاوی ۴ توپ تنیس که ارتفاعی دقیقاً به اندازه ۴ توپ دارد و توپ‌ها به جداره چسبیده‌اند. حجم فضای خالی اطراف توپ‌ها

در استوانه چند برابر حجم یک توپ است؟

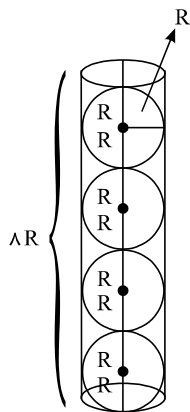
۲ برابر (۴)

۲٫۵ برابر (۳)

۳ برابر (۲)

۴ برابر (۱)

پاسخ: گزینه ۴



استوانه  $h = 8R$

حجم استوانه  $= \pi R^2 h = \pi R^2 \times 8R = 8\pi R^3$

حجم یک توپ  $= \frac{4}{3}\pi R^3$

حجم چهار توپ  $= 4 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16}{3}\pi R^3$

حجم فضای خالی = حجم استوانه - حجم چهار توپ  $= 8\pi R^3 - \frac{16}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{\text{فضای خالی}}{\text{حجم یک توپ}} = \frac{\frac{8}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 2$

۳۹. حجم کره‌ای به شعاع  $R$  چند برابر حجم مخروطی به شعاع  $R$  و ارتفاع  $3R$  است؟

$\frac{4}{9}\pi$  (۴)

$\frac{4}{9}$  (۳)

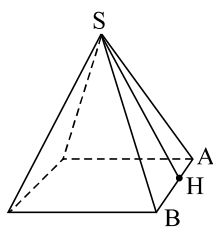
$\frac{4}{3}\pi$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ نسبت حجم کره به مخروط را محاسبه می‌کنیم:

$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3R} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^3} = \frac{4}{3}$

پس حجم کره به شعاع  $R$ ،  $\frac{4}{3}$  برابر حجم مخروط به شعاع  $R$  و ارتفاع  $3R$  است.



۴۰. در هرم مربعی منتظم زیر  $\overline{SA} = \sqrt{34}$  و  $\overline{SH} = 5$ ، حجم هرم کدام است؟

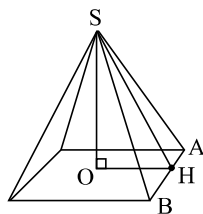
۵۲ (۲)

۵۶ (۱)

۴۸ (۴)

۵۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا باتوجه به رابطه فیثاغورس برای مثلث قائم‌الزاویه  $SAH$  داریم:



$(AH)^2 + (SH)^2 = (AS)^2$   
 $(AH)^2 + 25 = 34 \Rightarrow (AH)^2 = 9$   
 $\Rightarrow AH = 3$

چون هرم مربعی و منتظم است، در نتیجه  $AH = OH$  حال باتوجه به رابطه فیثاغورس برای مثلث  $SOH$  داریم:

$\overline{SO}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{SH}^2$

$$\overline{SO}^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow SO^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow SO = 4$$

همچنین ضلع مربع  $AB$  دو برابر  $AH$  است. پس:

$$AB = 2 \times AH = 2 \times 3 = 6$$

حال حجم هرم را به دست می آوریم:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4 = 48$$

۴۱. مساحت کل نیم کره ای توپر به شعاع  $R$  چند برابر مساحت کره ای به شعاع  $R$  است؟

۴

۳

۲

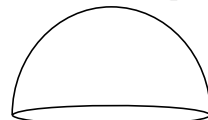
۱

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مساحت کل نیم کره را به دست می آوریم:

$$\text{مساحت کل نیم کره} = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2$$

$$\frac{\text{مساحت کل نیم دایره}}{\text{مساحت کره}} = \frac{3\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{3}{4}$$



۴۲. در داخل یک مکعب به ضلع  $a$ ، بزرگ ترین کره ممکن قرار دارد. نسبت مساحت کره به مساحت کل مکعب کدام است؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۳ کره ای که ایجاد می شود دارای شعاع  $\frac{a}{2}$  می باشد.

$$\frac{\text{مساحت کره}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{4\pi r^2}{6a^2} = \frac{4\pi(\frac{a}{2})^2}{6a^2} = \frac{4\pi \frac{a^2}{4}}{6a^2} = \frac{\pi}{6}$$

۴۳. اتاقی داریم به شکل منشور، با قاعده شش ضلعی منتظم، اگر از نقطه ای روی سقف اتاق، شش نخ به رأس های کف اتاق وصل کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

۴ برابر

۳

۲ برابر

۱ برابر

پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم منشور} = sh \\ \text{حجم هرم} = \frac{1}{3}sh \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{حجم هرم}}{\text{حجم منشور}} = \frac{\frac{1}{3}sh}{sh} = \frac{1}{3}$$

۴۴. مساحت جانبی هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی متر می باشد، چند سانتی متر مربع است؟

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۲

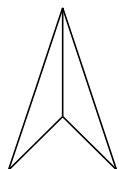
چون هرم منتظم است، پس قاعده آن مثلث متساوی الاضلاع است و در واقع شکل همان چهاروجهی منتظم است و مساحت جانبی آن از ۳ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است.

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  برابر  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  است.

حال مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ را به دست می آوریم که برابر است با:

$$\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} \times 3 = 12\sqrt{3}$$



۴۵. یک کره به شعاع  $6\text{cm}$  را درون یک ظرف استوانه‌ای که مقداری آب دارد می‌اندازیم، ارتفاع آب  $8\text{cm}$  افزایش می‌یابد، شعاع قاعده استوانه کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا حجم کره به شعاع  $6\text{cm}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi$$

حال این حجم را برابر حجم افزوده شده قرار می‌دهیم:

$$V_{\text{استوانه}} = sh = \pi r^2 h = 8\pi r^2 = 288\pi \Rightarrow 8r^2 = 288$$

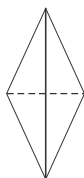
$$r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

۴۶. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعده آن مربع است.  
 (۲) اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم حجم آن چهار برابر می‌شود.  
 (۳) در هرم منتظم شکل وجه‌های جانبی همیشه مثلث متساوی‌الاضلاع است.  
 (۴) حجم استوانه‌ای که شعاع و ارتفاع آن  $a$  باشد، برابر  $\pi a^3$  می‌باشد.

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست. چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعده آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



گزینه ۲: نادرست. اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

گزینه ۳: نادرست. هرم منتظم شکلی است که قاعده آن شکل منتظمی باشد و ممکن است وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد.

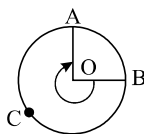


گزینه ۴: درست.

حجم استوانه به صورت  $\pi r^2 h$  است و اگر  $r = a$  و  $h = a$  آنگاه:

$$\pi r^2 h = \pi a^3$$

۴۷. فرض کنید مساحت دایره مقابل برابر  $100\pi$  باشد، در این صورت باتوجه به شکل طول کمان  $\widehat{ACB}$  برابر است با:  $(O)$  مرکز دایره و زاویه  $(AOB = 90^\circ)$



۲۵π (۲)

۱۵π (۱)

۴۵π (۴)

۳۵π (۳)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا باتوجه به مساحت دایره، شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$$

حال برای به دست آوردن کمان  $\widehat{ACB}$  کافیه  $\frac{3}{4}$  محیط دایره را به دست آوریم:

$$\frac{3}{4} \text{ محیط دایره} = \frac{3}{4} \times 20\pi = 15\pi$$

۴۸. یک هرم منتظم با قاعده چهارضلعی و مساحت قاعده  $36$  سانتی‌متر مربع داریم. اگر ارتفاع هرم  $4$  سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی هرم چند سانتی‌متر مربع است؟

۱۲۰ (۴)

۶۰ (۳)

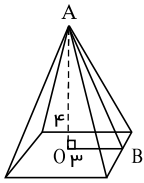
۳۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ هرم منتظم با قاعده چهارضلعی، همان هرم منتظم با قاعده مربع است، باتوجه به اینکه مساحت قاعده این هرم برابر  $36$  است، پس ضلع مربع برابر  $6$  است،  $OB$

به اندازه نصف ضلع مربع است، پس:  $OB = 3$

حال رابطه فیثاغورس را برای مثلث  $AOB$  می‌نویسیم:



$$AO^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

حال مساحت وجه جانبی (مثلث) را به دست می آوریم:

$$\frac{5 \times 6}{2} = 15$$

چون وجه های جانبی این هرم از چهار مثلث هم نهشت تشکیل شده، پس:

$$15 \times 4 = 60$$

۴۹. شعاع قاعده ای استوانه ای برابر با شعاع یک کره و ارتفاع آن  $\frac{3}{4}$  قطر همان کره است. حجم استوانه چه کسری از حجم کره است؟

$\frac{9}{8}$  (۴)

$\frac{5}{8}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{8}{9}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$R = \text{شعاع کره} = \text{شعاع قاعده استوانه}$$

$$\text{ارتفاع استوانه} = \frac{3}{4} \times \text{قطر کره} = \frac{3}{4} \times \frac{2R}{1} = \frac{3}{2}R$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi R^2 \times \frac{3}{2}R = \frac{3\pi}{2}R^3$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rightarrow \frac{\text{استوانه } V}{\text{کره } V} = \frac{\frac{3}{2}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

۵۰. سطح کره ای که حجم آن  $36\pi$  می باشد برابر است با .....

$16\pi$  (۴)

$36\pi$  (۳)

$4\pi$  (۲)

$9\pi$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{حجم کره} = 36\pi \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \rightarrow \frac{4}{3}r^3 = 36$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{36 \times 3}{4} = 27 \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \rightarrow r = 3$$

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 3^2 = 4 \times \pi \times 9 = 36\pi$$

نکته: اگر شعاع کره ۳ باشد، حجم و مساحت کره مساوی می شوند.

۵۱. برای پوشاندن سطح یک توپ کروی شکل،  $432$  سانتی متر مربع چرم مصرف شده است. قطر این توپ چند سانتی متر است؟ ( $\pi = 3$ )

$36$  (۴)

$18$  (۳)

$12$  (۲)

$6$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2$$

$$4 \times 3 \times r^2 = 432 \rightarrow 12r^2 = 432 \rightarrow r^2 = \frac{432}{12} = 36 \rightarrow r = \sqrt{36} = 6$$

$$d = 2r = 2 \times 6 = 12$$



۵۲. اگر عدد مساحت یک کره ۳ برابر عدد حجم آن باشد، شعاع کره کدام یک از اعداد زیر است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$S = 3V \Rightarrow \text{حجم کره} \times 3 = \text{مساحت کره}$$

$$4\pi r^2 = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r^2 = r^3 \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^3}{r^2} \rightarrow r = 1$$

۵۳. اگر مساحت کره‌ای  $16\pi$  باشد، حجم آن کره کدام است؟

- ۳۲π (۱)       $\frac{8}{3}\pi$  (۲)       $\frac{32}{3}\pi$  (۳)       $\frac{16}{3}\pi$  (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$4\pi r^2 = 16\pi$$

$$4\pi r^2 = 16\pi \rightarrow 4r^2 = 16 \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = \sqrt{4} = 2$$

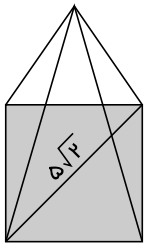
$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8 = \frac{32}{3}\pi$$

۵۴. حجم هرم مربع القاعده‌ای به قطر قاعده‌ی  $5\sqrt{2}$  و ارتفاع ۱۲ کدام است؟

- ۱۰۰ (۱)      ۱۵۰ (۲)      ۲۰۰ (۳)      ۲۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ نکته: قطر هر مربع به ضلع  $a$  برابر است با  $a\sqrt{2}$ . پس ضلع مربع ۵ بوده است.

$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times S \text{ قاعده}}{3} = \frac{(5 \times 5) \times 12}{3} = 100$$



۵۵. در یک هرم با قاعده‌ی مثلث، در یک رأس سه یال آن دوه‌دو بر هم عمودند. اگر اندازه‌ی این یال‌ها ۲ و ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد، حجم هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

- ۴ (۱)      ۸ (۲)      ۱۲ (۳)      ۲۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ کافی است یکی از وجه‌ها را که دو یال عمود بر هم، اضلاع قائمه‌ی آن هستند، به عنوان قاعده و یال دیگر را که بر این وجه عمود است، به عنوان ارتفاع هرم در نظر گرفت.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{قاعده}} \times h_{\text{ارتفاع}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1} \times \frac{3}{1} \right) \right) \times 4 = 4 \text{ cm}^3$$

۵۶. حجم کره‌ای به شعاع  $R$  برابر با حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی  $R$  است. ارتفاع مخروط چند برابر شعاع کره است؟

- ۴ (۴)      ۳ (۳)       $\frac{8}{3}$  (۲)       $\frac{4}{3}$  (۱)

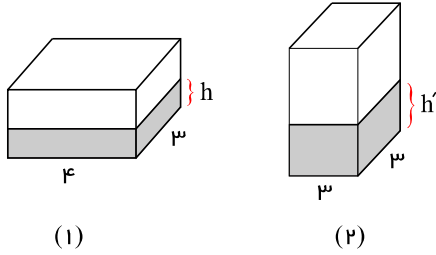
پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{کره}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ V_{\text{مخروط}} &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{کره: با توجه به سؤال} \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^2} = 4R$$

۵۷. در یک مکعب مستطیل در بسته به ابعاد ۳، ۳ و ۴ سانتی‌متر مقداری آب ریختیم. اگر این ظرف را در دو حالت (یک بار روی سطح مستطیل و بار دیگر روی سطح مربع) روی زمین قرار دهیم، نسبت ارتفاع‌های آب در دو حالت کدام است؟

- ۱ (۱)       $\frac{2}{3}$  (۲)       $\frac{3}{4}$  (۴)       $\frac{3}{4}$  (۳)

پاسخ: گزینه ۴



$$(1) \rightarrow \text{حالت در این آب } V = 4 \times 3 \times h = 12h$$

$$(2) \rightarrow \text{حالت در این آب } V = 3 \times 3 \times h' = 9h'$$

چون مقدار آب داخل مکعب ثابت است پس حجم هر دو ثابت و با هم برابر است.

$$12h = 9h' \rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۵۸. مساحت کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۶ سانتی متر است، چند سانتی متر مربع است؟

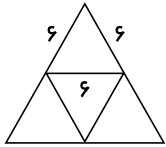
۹√۲ (۴)

۳۶√۳ (۳)

۳۶√۲ (۲)

۹√۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



گسترده‌ی هرم به شکل زیر است. کافی است مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶cm را حساب کرده و در چهار ضرب کنیم تا مساحت کل هرم به دست آید.

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$S \text{ هرم} = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

۵۹. کره‌ای داخل یک استوانه محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه همواره برابر است با:

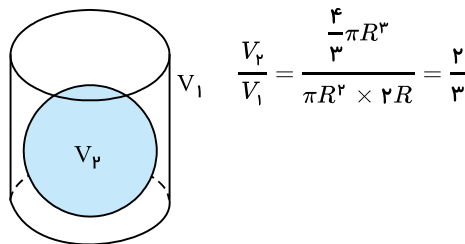
۱/۲ (۴)

۳/۴ (۳)

۱/۳ (۲)

۲/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



۶۰. در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ی زیر،  $SA = 10 \text{ cm}$  و  $SH = 8 \text{ cm}$  است، حجم این هرم کدام است؟

۱۲√۲۸cm³ (۱)

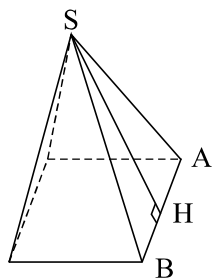
۴۸√۲۸cm³ (۲)

۴۸√۱۴cm³ (۳)

۲۴√۱۴cm³ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا اندازه‌ی AH یعنی نصف ضلع قاعده‌ی مربع را می‌یابیم.

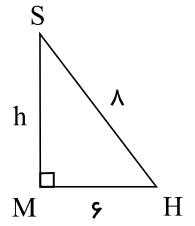
$$AS^2 = SH^2 + AH^2 \text{ بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:}$$



$$AH^2 = AS^2 - SH^2$$

$$\rightarrow AH^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{36} = 6$$



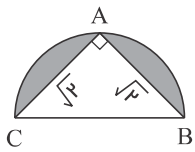
ضلع مربع

$$\rightarrow AB = 2 \times 6 = 12 \rightarrow \text{مساحت قاعده} = 12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$$

حال باید ارتفاع هرم را بیابیم،  $MH$  نصف ضلع مربع است.

$$h^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \rightarrow h = \sqrt{28} \rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}(S)(h)$$

$$= \frac{1}{3} \times 144 \times \sqrt{28} = 48\sqrt{28} \text{ cm}^3$$



$8\pi$  (۴)

$\frac{2}{3}\pi$  (۳)

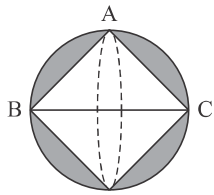
$\pi$  (۲)

$\frac{4}{3}\pi$  (۱)

۶۱. حجم حاصل از دوران قسمت هاشورخورده حول  $BC$  کدام است؟

پاسخ: گزینه ۳

از دوران شکل حول  $BC$  یک کره که در داخل آن دو مخروط که از قاعده به هم متصل هستند، کم شده است.



برای به دست آوردن حجم حاصل از قسمت هاشورخورده، حول  $BC$  کافیست حجم کره را منهای دو مخروط ایجاد شده کنیم.

باتوجه به رابطه فیثاغورس:

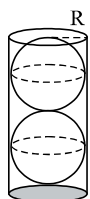
$$AH^2 + BH^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1$$

پس شعاع کره و شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۱ است.

$$V_{\text{کره}} - V_{\text{مخروط}} = \frac{4}{3}\pi r^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$



۶۲. در شکل زیر درون ظرف استوانه‌ای شکل به شعاع  $R$  دو کره محاط کرده‌ایم. کدام گزینه درست است؟

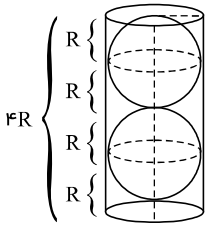
(۲) حجم فضای خالی کم‌تر از حجم هر کره است.

(۱) حجم فضای خالی بیش‌تر از حجم هر کره است.

(۴) حجم دو کره مساوی حجم استوانه است.

(۳) حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.

پاسخ: گزینه ۳



برای پاسخ به این سؤال ابتدا حجم فضای خالی بین استوانه و کره‌ها را به دست می‌آوریم (البته برحسب  $R$ ). شعاع هر کره برابر  $R$ ، شعاع قاعده استوانه برابر  $R$  و ارتفاع آن برابر  $4R$  است.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi R^2 4R = 4\pi R^3$$

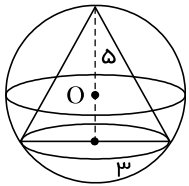
$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V \text{ دو کره} = 2 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$$

$V$  کره‌ها - استوانه = حجم فضای خالی بین کره و استوانه

$$= 4\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{12}{3}\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

پس حجم فضای خالی برابر حجم یک کره است.



۶۳. در کره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ سانتی‌متر محاط شده است، حجم مخروط چقدر است؟

۲۴π (۲)

۲π (۱)

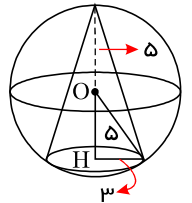
۲۶π (۴)

۲۷π (۳)

پاسخ: گزینه ۳ برای پیدا کردن  $OH$  مثلث قائم‌الزاویه زیر را در نظر بگیرید به کمک فیثاغورس داریم:

$$OH^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow OH = 4 \rightarrow \text{ارتفاع مخروط} = 5 + 4 = 9$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 9}{3} = 27\pi \text{cm}^3$$



۶۴. اگر شعاع قاعده‌ی مخروطی را نصف کنیم و ارتفاع آن را دو برابر کنیم، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

(۴) چهار برابر می‌شود.

(۳) نصف می‌شود.

(۲) دو برابر می‌شود.

(۱) تغییر نمی‌کند.

پاسخ: گزینه ۳

$$V \text{ مخروط اولیه} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \xrightarrow[r=\frac{R}{2}]{h'=2h} V_{\text{جدید}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h'$$

$$\frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \times 2h = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2}{4} \times 2h = \frac{1}{6}\pi R^2 h$$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{مخروط جدید}}}{V_{\text{اولیه}}} = \frac{\frac{1}{6}\pi R^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}$$

مخروط جدید  $\frac{1}{2}$  برابر مخروط اولیه خواهد بود.

۶۵. یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر آن را دوباره باد کرده و  $\frac{148\pi}{3}$  سانتی متر مکعب هوا به آن وارد کنیم، با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی متر مربع افزایش می‌یابد؟

۵۶π (۴)

۶۴π (۳)

۲۸π (۲)

۹π (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا شعاع کره را در حالت اول پیدا می‌کنیم:

مساحت = حجم

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \rightarrow \frac{R}{3} = \frac{4}{4} \rightarrow R = \frac{12}{4} = 3$$

بنابراین مساحت در حالت اول برابر است با:

$$S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi$$

چون در حالت اول مساحت و حجم کره از نظر عددی برابر بودند، بنابراین حجم کره در حالت اول نیز  $36\pi$  است.

در حالت دوم به حجم کره  $\frac{148\pi}{3}$  اضافه شده است. پس حجم کره در حالت دوم برابر است با:

$$36\pi + \frac{148\pi}{3} = \frac{108}{3}\pi + \frac{148}{3}\pi = \frac{256}{3}\pi$$

$$\text{مقدار شعاع در حالت دوم: } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi \rightarrow 4R^3 = 256 \rightarrow R^3 = \frac{256}{4} = 64$$

$$\rightarrow R = \sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow \text{کره در حالت دوم } S: 4\pi R^2 = 4\pi \times 4^2 = 64\pi$$

مساحت حالت ۱ - مساحت حالت ۲ = مساحت افزایش یافته

$$64\pi - 36\pi = 28\pi$$

۶۶. اگر ابعاد مکعب مستطیلی را ۳ برابر کنیم، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم به ترتیب چند برابر می‌شوند؟

۲۷، ۹، ۹، ۹ (۴)

۹، ۹، ۹، ۳ (۳)

۲۷، ۹، ۹، ۳ (۲)

۹، ۳، ۳، ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ فرض کنید ابعاد مستطیل  $a, b, c$  هستند که ۳ برابر می‌شوند:

$$\text{قطر: } \frac{\sqrt{(3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{9a^2 + 9b^2 + 9c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{9(a^2 + b^2 + c^2)}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3$$

$$\text{مساحت جانبی: } \frac{2 \times (3a \times 3b + 3a \times 3c)}{2 \times (ab + ac)} = \frac{9ab + 9ac}{ab + ac} = \frac{9(ab + ac)}{ab + ac} = 9$$

$$\text{مساحت کل: } \frac{2 \times (3a \times 3b + 3a \times 3c + 3b \times 3c)}{2 \times (ab + ac + bc)} = \frac{9ab + 9ac + 9bc}{ab + ac + bc} = \frac{9(ab + ac + bc)}{(ab + ac + bc)} = 9$$

$$\text{حجم: } \frac{3a \times 3b \times 3c}{abc} = \frac{27abc}{abc} = 27$$

۶۷. ورزشگاهی به شکل نیم کره به شعاع ۴۰ متر است. اگر بخواهیم نمای خارجی این ورزشگاه را رنگ کنیم و هر قوطی رنگ، برای رنگ آمیزی ۸۰ متر مربع کافی باشد، حداقل چند قوطی رنگ برای رنگ آمیزی لازم است؟ ( $\pi = 3,14$ )

۲۵۲ (۴)

۲۵۰ (۳)

۱۲۶ (۲)

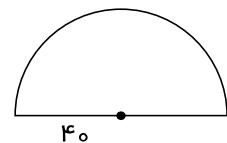
۱۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

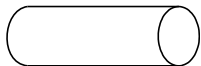
$$S = 4\pi r^2 \rightarrow \text{نیمکره } S = \frac{4\pi r^2}{2}$$

$$\rightarrow \text{نیمکره } S = \frac{4\pi \times 40 \times 40}{2} = 3200\pi \text{ m}^2$$

$$3200\pi \div 80 = 400\pi \rightarrow 400 \times 3.14 = 126$$



۶۸. مساحت سطح برش عرضی یک لوله برابر با  $250 \text{ cm}^2$  می باشد. آب در لوله با سرعت ۳ لیتر بر ثانیه جریان می یابد. سرعتی که در آن آب در لوله بر حسب  $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$  جریان می یابد برابر است با:



۱۲ (۴)

۶ (۳)

۱٫۲ (۲)

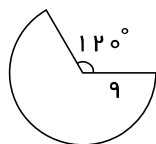
۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

هر لیتر برابر ۱۰۰۰ سانتی مترمکعب می باشد.

$$3 = 3000 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\frac{3000 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}}{250 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}} = \frac{3000 \text{ cm}}{250} = 12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$



۶۹. با قسمتی از دایره‌ای به شعاع  $9 \text{ cm}$  مخروطی ساخته ایم. شعاع قاعده‌ی این مخروط برابر است با:

۶ (۲)

۹ (۱)

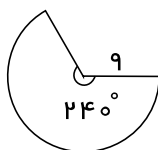
۷ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ محیط شکل داده شده با محیط قاعده‌ی مخروط برابر است.

$$\text{محیط قسمتی از دایره} = \frac{240}{360} (2\pi R) = \frac{240}{360} (2\pi \times 9)$$

$$= \frac{4 \times 9 \times \pi}{3} = 12\pi$$



$$\text{محیط قاعده مخروط} = 2\pi R$$

$$\text{محیط قسمتی از دایره} = 2\pi R = 12\pi \Rightarrow R = 6$$

۷۰. کره‌ای که حجم آن  $36\pi$  است را داخل استوانه محاط می کنیم. حجم استوانه چه قدر است؟

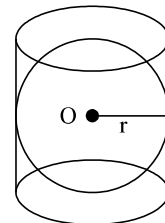
۴۵π (۴)

۲۷π (۳)

۵۴π (۲)

۳۶π (۱)

پاسخ: گزینه ۲ هنگامی که کره‌ای درون استوانه‌ای محاط می شود شعاع قاعده استوانه و کره برابر است و ارتفاع استوانه برابر است با قطر کره.

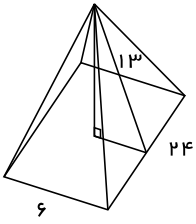


$$R = r \quad \text{و} \quad h = 2r \quad (\text{ارتفاع استوانه})$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \rightarrow r^3 = 36 \times \frac{3}{4} = 27 \rightarrow r = 3$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 \times h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

۷۱. حجم شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



۱۲۹ (۲)

۱۹۶ (۴)

۱۹۲ (۱)

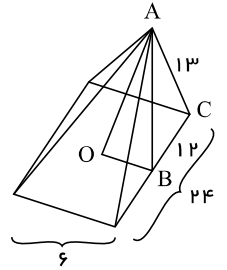
۲۲۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا برای مثلث  $ABC$  رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$AB^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$



حال برای مثلث  $AOB$  داریم:

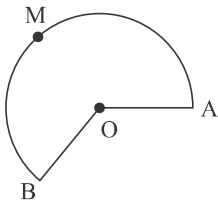
$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$AO^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AO^2 = 16 \Rightarrow AO = 4$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 24 \times 4 = 192$$

پس ارتفاع این هرم برابر ۴ است حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

۷۲. با برشی از دایره مطابق شکل، مخروطی ساخته‌ایم. اگر حجم مخروط ۲۸۸ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازه کمان  $AMB$  چند درجه است؟ ( $\pi = 3$ )



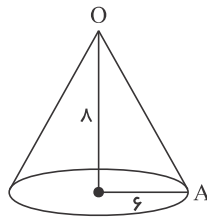
۲۰۰° (۲)

۲۳۰° (۴)

۲۱۶° (۱)

۱۹۷° (۳)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا باتوجه به رابطه حجم مخروط، مساحت قاعده آن را به دست می‌آوریم و سپس شعاع قاعده مخروط را محاسبه می‌کنیم.



$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3r^2 \times 8 = 288$$

حال باتوجه به اینکه کمان  $AB$  برابر محیط دایره‌ای است که در واقع قاعده مخروط است، در نتیجه محیط قاعده مخروط (دایره‌ای به شعاع ۶) را به دست می‌آوریم:

$$2\pi R = 2 \times 3 \times 6 = 36$$

باتوجه به شعاع قاعده مخروط و ارتفاع آن و قضیه فیثاغورس شعاع  $AO$  را محاسبه می‌کنیم.

$$6^2 + 8^2 = AO^2 \Rightarrow AO^2 = 100$$

$$\Rightarrow AO = 10$$

با تقسیم اندازه محیط قاعده  $AB$  بر محیط دایره‌ای به شعاع  $AO$  اندازه کمان  $AB$  (برحسب درجه) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{36}{2\pi R} = \frac{36}{2 \times 3 \times 10} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} \mid \frac{216}{360}$$

در نتیجه  $\widehat{AB} = 216^\circ$

۷۳. قاعدهٔ یک هرم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ می‌باشد اگر ارتفاع آن  $10\sqrt{3}$  باشد حجم هرم کدام است؟

۲۴۰ (۴)

$720\sqrt{3}$  (۳)

۷۲۰ (۲)

$24\sqrt{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴



نکته: مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  برابر  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$  است.

شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  تشکیل شده است.

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  برابر  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  است.

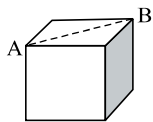
حال با ۶ برابر کردن آن داریم:

$$6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

برای این سؤال:  $\frac{3 \times 4^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$  مساحت شش ضلعی منتظم

حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} \times 10\sqrt{3} = 240$$



۷۴. یک اسفنج مکعب شکل به ضلع ۵ را در راستای پاره خط  $AB$  بریده‌ایم. مساحت کل یکی از قسمت‌های بریده شده چقدر است؟

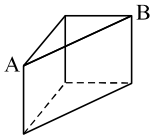
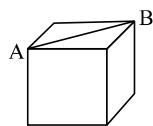
$25(3 + 2\sqrt{2})$  (۴)

$25(3 + \sqrt{2})$  (۳)

۷۵۰ (۲)

۳۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ شکل برش داده شده را رسم می‌کنیم:



این شکل، ۵ وجه دارد: دو وجه به شکل مثلث در بالا و پایین که هر کدام نصف مساحت وجه مکعب سابق را دارد و دو وجه مربع و یک وجه مستطیل، کافی است طول  $AB$  را به دست آوریم باتوجه به رابطهٔ فیثاغورس.

$$AB^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow AB^2 = 50 \Rightarrow AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

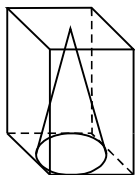
$$\text{مساحت مستطیل} = 5\sqrt{2} \times 5 = 25\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت دو وجه مربع} = 2 \times 5 \times 5 = 50$$

$$25 = 5 \times 5 = \text{مساحت یک مربع} = \text{مساحت دو وجه مثلث}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت کل} = 25\sqrt{2} + 50 + 25 = 75 + 25\sqrt{2} = 25(3 + \sqrt{2})$$

۷۵. مخروطی داخل یک مکعب مستطیل طوری قرار گرفته است که قاعدهٔ آن محاط در قاعدهٔ مکعب مستطیل و رأس آن در محل تلاقی قطرهای قاعدهٔ مکعب مستطیل قرار دارد. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط  $r$  و ارتفاع آن  $h$  باشد، حجم فضای بین دو جسم چقدر است؟ ( $\pi \approx 3$ )



$2r^2h$  (۲)

$r^2h$  (۱)

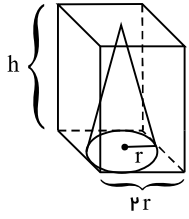
$4r^2h$  (۴)

$3r^2h$  (۳)

پاسخ: گزینه ۳ باتوجه به فرض مسئله قسمت‌های مربوط به ضلع مکعب مستطیل و مخروط را یادداشت می‌کنیم.

حال برای به دست آوردن حجم فضای بین دو جسم حجم مکعب مستطیل را منهای حجم مخروط می‌کنیم.





مکعب مستطیل  $V = 2r \times 2r \times h = 4r^2 h$

مخروط  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 4r^2 h = r^2 h$

$\Rightarrow$  مکعب مستطیل  $V -$  مخروط  $V = 4r^2 h - r^2 h = 3r^2 h$

۷۶. مثلث قائم الزاویه‌ای را حول ضلع قائمه‌ی کوچک آن دوران می‌دهیم. اگر طول ضلع‌های قائمه ۳ و ۴ باشد. حجم شکل حاصل کدام است؟

۱۶π (۴)

۳۶π (۳)

۱۲π (۲)

۴۸π (۱)

پاسخ: گزینه ۴

حجم مخروط  $= \frac{1}{3} \times \pi \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi$

۷۷. هرمی ۱۷ وجه دارد. این هرم چند یال دارد؟

۳۲ (۴)

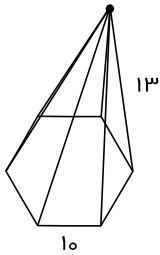
۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ این هرم یک قاعده‌ی ۱۶ ضلعی دارد پس ۱۶ تا از یال‌هایش رأس هرم را به رأس‌های این ۱۶ ضلعی وصل می‌کنند و ۱۶ یال دیگر هم ضلع‌های قاعده‌اند.

۷۸. مساحت جانبی هرم منتظمی با قاعده‌ی شش ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ سانتی‌متر و اندازه‌ی یال ۱۳ سانتی‌متر، کدام است؟



۱۸۰ سانتی‌متر مربع (۱)

۲۴۰ سانتی‌متر مربع (۲)

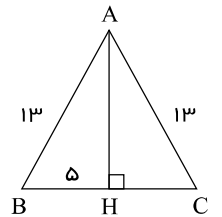
۳۶۰ سانتی‌متر مربع (۳)

۳۹۰ سانتی‌متر مربع (۴)

پاسخ: گزینه ۳

باید ابتدا ارتفاع هر وجه را بدست آوریم. چون مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع  $AH$  میانه است، پس  $BH = 5$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \rightarrow AH^2 = 13^2 - 5^2 \\ = 169 - 25 \Rightarrow AH = \sqrt{144} = 12$$



مساحت هر مثلث جانبی هرم برابر است با:  $\frac{10 \times 12}{2} = 60$  سانتی‌متر مربع

هرم  $S = 6 \times 60 = 360 \text{ cm}^2$  جانبی کل هرم

چون ۶ مثلث جانبی دارد ۶۰ را باید ۶ برابر کنیم.

۷۹. مخروطی به ارتفاع ۳ را با دو صفحه‌ای که موازی قاعده‌اش هستند به سه شکل هم حجم بریده‌ایم. مخروط در چه ارتفاع‌هایی بریده شده است؟

نمی‌توان مخروط را این طور برید (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)

$3 - \sqrt{9}, 3 - \sqrt{18}$  (۲)

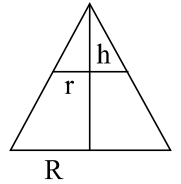
۲ و ۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که مقطع مخروط دایره است. فرض کنید قاعده‌ی مخروط اصلی  $R$  باشد و  $r$  شعاع مقطع دایره‌ای که صفحه‌ای

موازی قاعده در فاصله‌ی  $h$  از رأس مخروط از مخروط جدا می‌کند، باشد.

مطابق شکل زیر  $\frac{r}{h} = \frac{R}{3}$  و در نتیجه  $r = \frac{hR}{3}$  پس حجم مخروط بالایی برابر است با:

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{hR}{3}\right)^2 h$$



اگر بخواهیم این حجم برابر  $\frac{1}{3}$  کل حجم باشد، باید:

$$\frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{9} h^3 R^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \times 3\right) \Rightarrow h = \sqrt[3]{9}$$

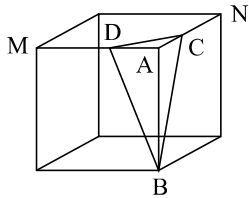
بار دوم مخروط جایی برش می خورد که حجم مخروط جداشونده برابر  $\frac{2}{3}$  حجم کل باشد. یعنی باید:

$$\frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{9} h^3 R^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \times 3\right)$$

$$h = \sqrt[3]{18}$$

پس اگر از طرف قاعده حساب کنیم ارتفاع های برش عبارتند از:  $3 - \sqrt[3]{18}$  و  $3 - \sqrt[3]{9}$

۸۰. در مکعب زیر نقطه  $C$  وسط  $AN$  و نقطه  $D$  وسط  $AM$  است. اگر  $AB = 1$  باشد، حجم هرم  $ABCD$  کدام است؟



۱)  $\frac{1}{8}$

۲)  $\frac{1}{12}$

۳)  $\frac{1}{18}$

۴)  $\frac{1}{24}$

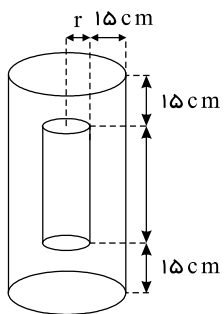
پاسخ: گزینه ۴

برای بدست آوردن حجم هرم، اگر مثلث  $DAC$  را قاعده در نظر بگیریم با توجه به اینکه  $AD = AC$  و هر کدام نصف وجه های مکعب هستند مساحت قاعده از رابطه ی روبرو بدست می آید:

$$\text{مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{\text{ارتفاع} \times S_{\text{قاعده}}}{3} = \frac{\frac{1}{8} \times 1}{3} = \frac{1}{24}$$

۸۱. یک محفظه برای نگهداری مواد شیمیایی مانند شکل زیر طراحی شده است. محفظه دارای ضخامت  $15\text{cm}$  می باشد. فرض کنید گنجایش محفظه ی بیرونی برابر با  $432$  سانتی متر مکعب باشد. ارتفاع محفظه ی درونی  $h$ ، به صورت عبارتی گویا بر حسب  $r$  کدام گزینه است؟



۱)  $h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} + 30$

۲)  $h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} - 30$

۳)  $h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} + 30$

۴)  $h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} - 30$

پاسخ: گزینه ۲ شعاع قاعده ی استوانه ی بزرگ برابر  $r + 15$  و ارتفاع آن برابر  $h + 30$  است. حجم آن نیز  $432$  است. بنابراین:

$$432 = \pi R^2 h = \pi(r+15)^2 \times (h+30)$$

$$h+30 = \frac{432}{\pi(r+15)^2} \rightarrow h = \frac{432}{\pi(r+15)^2} - 30$$

۸۲. کره‌ای فلزی و جامد به شعاع ۱۲۸ را با حرارت دادن ذوب و به ۶۴ قطره‌ی کروی شکل کوچک و مساوی تبدیل می‌کنیم. شعاع کره‌ی کوچک چه کسری از شعاع کره‌ی بزرگ است؟

- ۱)  $\frac{1}{8}$      
  ۲)  $\frac{1}{6}$      
  ۳)  $\frac{1}{4}$      
  ۴)  $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 128^3 = \frac{4}{3}\pi \times (2^7)^3 = \frac{4 \times 2^{21} \times \pi}{3} = \frac{2^2 \times 2^{21} \times \pi}{3} = \frac{2^{23} \times \pi}{3}$$

حجم هر قطره‌ی کروی  $\frac{1}{64}$  حجم کره‌ی فلزی و جامد است، بنابراین حجم هر قطره برابر است با:

$$\frac{2^{23} \times \pi}{3} \div 64 = \frac{2^{23} \times \pi}{3} \div 2^6 = \frac{2^{17} \times \pi}{3}$$

حال شعاع هر قطره را به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2^{17} \times \pi}{3} \Rightarrow r^3 = \frac{2^{17}}{4} = \frac{2^{17}}{2^2} = 2^{15} \rightarrow r = \sqrt[3]{2^{15}} = 2^5 = 32 \rightarrow \frac{r}{R} = \frac{32}{128} = \frac{1}{4}$$

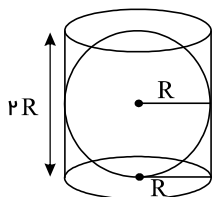
$$r^3 = \frac{2^{17}}{4} = \frac{2^{17}}{2^2} = 2^{15} \rightarrow r = \sqrt[3]{2^{15}} = 2^5 = 32 \rightarrow \frac{r}{R} = \frac{32}{128} = \frac{1}{4}$$

۸۳. کره‌ای در استوانه‌ای محاط شده است، اگر حجم استوانه  $12\sqrt{2}$  سانتی‌متر مکعب باشد، حجم کره کدام است؟ ( $\pi = 3$ )

- ۱)  $4\sqrt{2}cm^3$      
  ۲)  $6\sqrt{2}cm^3$      
  ۳)  $8\sqrt{2}cm^3$      
  ۴)  $32cm^3$

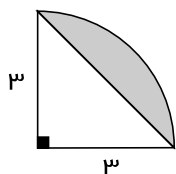
پاسخ: گزینه ۳

ارتفاع و شعاع قاعده‌ی استوانه به ترتیب برابر  $2R$  و  $R$  است.



$$V = \pi(R)^2 \times H = 3 \times R^2 \times 2R = 6R^3 = 12\sqrt{2} \rightarrow R^3 = 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}cm^3$$



۸۴. حجم قسمت هاشورخورده حول دوران ضلع ۳ سانتی‌متر برابر است با:

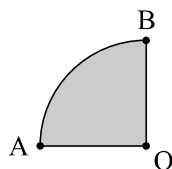
- ۱)  $9\pi$      
  ۲)  $6\pi$      
  ۳)  $3\pi$      
  ۴)  $12\pi$

پاسخ: گزینه ۱ شکل حاصل یک نیم‌کره با شعاع ۳ می‌شود که باید یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳ را از آن کسر کرد.

$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \times 3^3 = \frac{2 \times 27}{3}\pi = 18\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 3 = 9\pi$$

$$\rightarrow V_{\text{هاشور خورده}} = 18\pi - 9\pi = 9\pi$$



۸۵. ربع دایره مقابل به شعاع  $r$  را حول  $OB$  دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟

- ۱)  $\frac{2\pi r^3}{3}$      
  ۲)  $\frac{\pi r^3}{3}$      
  ۳)  $\frac{1}{4} \times \frac{4\pi r^3}{3}$      
  ۴)  $\frac{\pi r^3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: از دوران ربع دایره نیم کره حاصل می شود.

اگر حول  $OB$  دوران بدهیم شکل حاصل یک نیم کره خواهد شد و حجم آن نصف حجم کره است.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 2\pi r^3$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

۸۶. متوازی الاضلاعی با اندازه اضلاع ۵ و ۹ سانتی متر و مساحت ۲۷ سانتی متر مربع را حول ضلع بزرگ آن دوران داده ایم. حجم شکل حاصل از دوران برابر چند سانتی متر مکعب می باشد؟

۲۴۳π (۴)

۲۲۵π (۳)

۸۱π (۲)

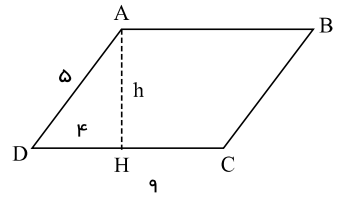
۲۷π (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$S = h \times 9 = 27$$

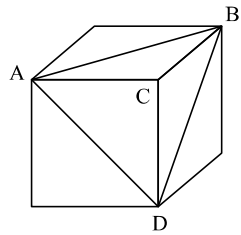
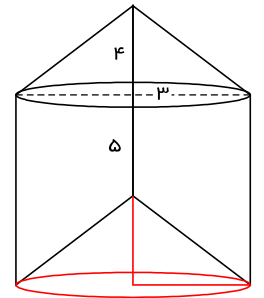
$$h = 3$$

$$AH = 3 \xrightarrow{\text{پیتاغورث}} DH = 4$$



مطابق شکل حجم جسم حاصل برابر است با حجم استوانه ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۹. پس:

$$V = sh = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 9 = 81\pi$$



۸۷. اگر حجم مکعب مقابل برابر ۴۳۲ واحد باشد، حجم هرم  $ABCD$  برابر کدام گزینه است؟

۳۲√۲ (۲)

۳۲√۳ (۱)

۱۴۴ (۴)

۷۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنیم ضلع مربع  $a$  باشد:

$$\text{حجم مکعب} = a^3 = 432$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}a^2\right) \times a = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6} \times 432 = 72$$

۸۸. اگر قطر مکعبی  $3a$  باشد، مساحت جانبی آن چه قدر است؟

۶  $a^2$  (۴)

۱۸  $a^2$  (۳)

۱۲  $a^2$  (۲)

۳۶  $a^2$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲ قطر مکعب = ضلع مکعب  $\times \sqrt{3}$

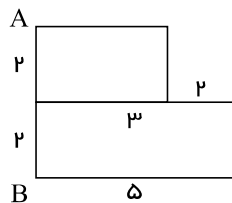
پس ضلع مکعب را بر حسب  $a$  به دست می آوریم:

$$\sqrt{3} \times \text{ضلع مکعب} = 3a \rightarrow \text{ضلع مکعب} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}a}{3} = \sqrt{3}a$$

مساحت جانبی مکعب برابر است با:

$$4 \times (\sqrt{3}a)^2 = 4 \times 3a^2 = 12a^2$$

۸۹. حجم حاصل از دوران شکل زیر حول  $AB$  برابر است با:  $(\pi = 3)$



۱۵۰ (۴)

۴۰۸ (۳)

۲۰۴ (۲)

۱۰۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ شکل حاصل دو استوانه هستند که روی هم قرار گرفته اند.

$$V_{\text{استوانه کوچک}} = \pi r^2 \times h \xrightarrow{r=3, h=2} V = 3 \times 3^2 \times 2 = 54$$

$$V_{\text{استوانه بزرگ}} = \pi r'^2 \times h' \xrightarrow{r'=5, h=2} V' = 3 \times 5^2 \times 2 = 150$$

$$\rightarrow V + V' = 150 + 54 = 204$$

۹۰. یک لوزی به قطرهای ۶ و ۸ را حول قطر ۸ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

۹۶π (۴)

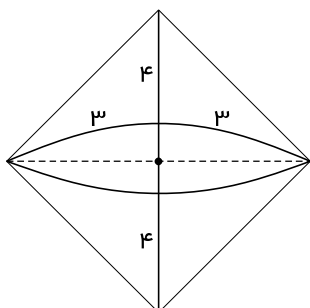
۳۲π (۳)

۲۴π (۲)

۱۲π (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هنگامی که یک لوزی را حول قطر آن دوران می‌دهیم دو مخروط هم اندازه ایجاد می‌کند مانند شکل رو به رو داریم:



$$V_{\text{شکل}} = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times (3)^2 \times 4 = 2 \times \frac{1}{3} \times 9\pi \times 4 = 24\pi$$

۹۱. صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم که ارتفاع آن را نصف کند، نسبت حجم هرم مخروط بزرگ به حجم هرم کوچک چه قدر است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا طبق قضیهٔ تالس نسبت شعاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \xrightarrow{h' = \frac{1}{2}h} \frac{r'}{r} = \frac{1}{2} \rightarrow r = 2r'$$

$$\frac{V_{\text{مخروط بزرگ}}}{V_{\text{مخروط کوچک}}} = \frac{\frac{1}{3} \times r^2 \pi \times h}{\frac{1}{3} \times r'^2 \pi \times h'} = \frac{(2r')^2 \times 2h'}{(r')^2 \times h'} = \frac{8r'h'}{r'h'} = 8$$

۹۲. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع  $a$ ،  $b$  و  $c$  که در آن  $a < b < c$  است، را هر بار حول یکی از اضلاعش دوران دهیم، حجم حاصل حول کدام ضلع از

بقیه بیشتر است؟

هر سه برابر است. (۴)

$c$  (۳)

$b$  (۲)

$a$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ حجم حول هر ضلع را به دست آورده و مقایسه می‌کنیم:

$$a \text{ حول: } \frac{1}{3} \times b^2 \times \pi \times a = \frac{\pi}{3} ab^2 = V_1$$

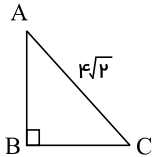
$$b \text{ حول: } \frac{1}{3} \times a^2 \times \pi \times b = \frac{\pi}{3} a^2 b = V_2$$

$$c \text{ حول } \frac{1}{3} \times \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \times \pi \times c = \frac{\pi}{3} \times \frac{a^2 b^2}{c} = V_1$$

تمام حجم‌ها را ضرب در عدد ثابت  $\frac{3c}{\pi}$  می‌کنیم که مقایسه راحت‌تر شود:

$$\begin{aligned} \frac{3c}{\pi} \times V_1 &= ab^2 c \\ \frac{3c}{\pi} \times V_2 &= a^2 bc \\ \frac{3c}{\pi} \times V_3 &= a^2 b^2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} V'_1 = bc \\ V'_2 = ac \\ V'_3 = ab \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{عامل‌های مشترک} \\ \text{را ساده می‌کنیم.} \end{array} \quad \begin{array}{l} a < b < c \\ \rightarrow V_3 < V_2 < V_1 \end{array}$$

۹۳. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین زیر را حول یکی از اضلاع زاویه قائمه آن دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟ (اندازه وتر  $4\sqrt{2}$  سانتی‌متر است.)



$\frac{16\pi}{3}$  (۴)

$\frac{32\pi}{3}$  (۳)

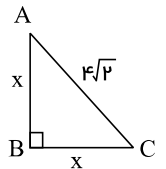
$\frac{128\pi}{3}$  (۲)

$\frac{64\pi}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا بنا بر قضیه فیثاغورس برای مثلث، اندازه ضلع AB و BC را به دست می‌آوریم.

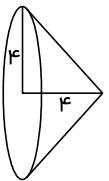
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + x^2 &= (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2x^2 = 32 \\ \Rightarrow x^2 &= 16 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$



شکل حاصل از دوران حول یک ضلع قائم مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع ۴ است. پس:

$$\begin{aligned} \text{مخروط } V &= \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi 4^2 \times 4 = \frac{64}{3}\pi \end{aligned}$$



۹۴. در کدام گزینه زیر، نسبت حجم به مساحت کل بزرگ‌تر از بقیه است؟

(۴) کره به قطر a

(۳) استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعده a

(۲) کره به شعاع a

(۱) مکعب به ضلع a

پاسخ: گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

نسبت حجم به مساحت کل هر کدام از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینه ۱:

$$\frac{\text{حجم مکعب}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

گزینه ۲:

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{مساحت کل}} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

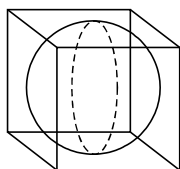
گزینه ۳:

$$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{مساحت کل استوانه}} = \frac{\pi a^2 a}{2\pi a \cdot a + 2\pi a^2} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2 + 2\pi a^2} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

گزینه ۴:

$$\frac{\text{حجم کره با شعاع } \frac{a}{2}}{\text{مساحت کل با شعاع } \frac{a}{2}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3}{4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \frac{a^3}{8}}{4\pi \frac{a^2}{4}} = \frac{\frac{a^3}{6}}{a^2} = \frac{a}{6}$$

باتوجه به اینکه  $\frac{a}{6} < \frac{a}{4} < \frac{a}{3}$ ، در نتیجه گزینه ۲ درست است.



۹۵. در شکل مقابل، حجم کره محاط شده در مکعب برابر  $36\pi$  می باشد. اندازه ضلع مکعب برابر کدام گزینه است؟

۲

۱

۴

۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

$$\frac{4}{3}r^3 = 36 \Rightarrow r^3 = \frac{36 \times 3}{4} = 27 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

و ضلع مکعب دو برابر شعاع کره است، پس:

$$3 \times 2 = 6$$

۹۶. کره ای در استوانه ای به ارتفاع ۶ سانتی متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی متر مکعب است؟

۲۷π

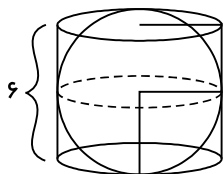
۱۸π

۳۶π

۵۴π

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا باتوجه به راهبرد رسم شکل، شکل مناسبی رسم می کنیم.



باتوجه به شکل، کره ای به شعاع ۳ سانتی متر در داخل استوانه ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ قرار دارد، پس از حجم استوانه، حجم کره را کم می کنیم.

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi(3)^2(6) - \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 54\pi - 36\pi = 18\pi$$

۹۷. چه تعداد از عبارت های زیر صحیح است؟

• درجه عبارت  $-3ax^3 + 5a^3x^2b + 4a^7$  نسبت به متغیرهای  $x$  و  $a$  برابر ۵ است.

• عبارت  $\frac{6}{y} - y^2$  گویا است.

• اگر  $a > 0$  و  $b < 0$  آنگاه،  $ab < ab^2$ .

• اگر ارتفاع مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن نیز دو برابر می شود.

۴

۳

۲

۱

پاسخ: گزینه ۳ به بررسی عبارت ها می پردازیم:

\* درجه عبارت  $-3ax^3 + 5a^3 + 5a^3x^2b + 4a^7$  نسبت به متغیر  $a$  برابر ۷ و نسبت به متغیر  $x$  برابر ۳ است، پس درجه این عبارت نسبت به  $a$  و  $x$  برابر  $3 + 7 = 10$  است.

\* عبارت  $\frac{6}{y} - y^2$  گویا است، درست است.

\* اگر  $a > 0$  و  $b < 0$  آنگاه  $ab < ab^2$ ، درست است. چون  $ab^2 > 0$  و  $ab < 0$  است.

\* اگر ارتفاع مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن نیز دو برابر می شود.

درست است.

$$\text{مخروط } v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{\text{اگر } h \text{ دو برابر شود}} v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

پس ۳ تا از ۴ عبارت درست است.

۹۸. یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر دهانهٔ بادکنک را باز بگذاریم تا  $\frac{۷۶}{۳}\pi$  سانتی متر مکعب هوا از داخل بادکنک خارج گردد. با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی متر مربع کاهش می‌یابد؟

۶۴π (۴)

۳۲π (۳)

۱۶π (۲)

۲۰π (۱)

پاسخ: گزینه ۱ حجم و مساحت بادکنک را با هم برابر در نظر می‌گیریم:

$$V = S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$$

$$\Rightarrow \frac{R}{3} = 1 \Rightarrow R = 3$$

حجم اولیهٔ بادکنک برابر است با:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \stackrel{R=3}{\Rightarrow} V = 36\pi$$

حال حجم باقیماندهٔ بادکنک را پس از باز کردن دهانهٔ آن به دست می‌آوریم:

$$36\pi - \frac{76}{3}\pi = \frac{32}{3}\pi$$

حال شعاع کره را بعد از باز کردن دهانهٔ کره به دست می‌آوریم:

$$\frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\Rightarrow R'^3 = 8 \Rightarrow R' = 2$$

حال کافی است مساحت کره‌ای به شعاع ۲ را به دست آوریم:

$$S' = 4\pi R'^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

مساحت اولیهٔ بادکنک را منهای مساحت ثانویهٔ آن می‌کنیم:

$$36\pi - 16\pi = 20\pi$$

۹۹. مکعبی به ضلع  $\sqrt{12}$  درون یک کره محاط شده است. حجم کره چند است؟

۳۶π (۴)

۲۸۸π (۳)

۶۴√۶π (۲)

۳۲√۳π (۱)

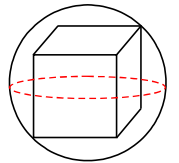
پاسخ: گزینه ۴

اگر ضلع مکعب برابر  $a$  باشد، آنگاه قطر مکعب  $\sqrt{3}a$  است که برابر قطر کره است.

$$\Rightarrow \sqrt{3}a = 2R \stackrel{a=\sqrt{12}}{\Rightarrow} \sqrt{3} \times \sqrt{12} = 2R$$

$$\Rightarrow \sqrt{36} = 2R \rightarrow 2R = 6 \rightarrow R = 3$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi$$



۱۰۰. قاعدهٔ یک هرم منتظم مربعی به ضلع ۶ است. اگر وجه‌های این هرم مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، حجم هرم کدام است؟

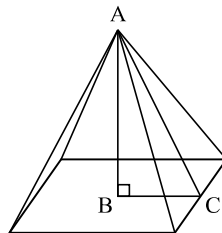
۷۲√۲ (۴)

۳۶√۲ (۳)

۲۴√۲ (۲)

۱۸√۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



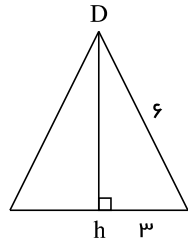
باتوجه به مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$

در شکل ارتفاع این هرم را محاسبه می‌کنیم (البته ابتدا باید ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ را به دست بیاوریم):



$$Dh^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow (Dh)^2 = 36 - 9$$

$$Dh^2 = 27 \Rightarrow Dh = \sqrt{27}$$



حال برای مثلث  $ABC$  داریم:

$$AB^2 + BC^2 = (AC)^2$$

$$AB^2 + 3^2 = (\sqrt{27})^2 \Rightarrow AB^2 = 27 - 9 \Rightarrow AB = \sqrt{18}$$

حال باتوجه به رابطه حجم هرم داریم:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \sqrt{18} = 12\sqrt{18} = 12\sqrt{9 \times 2} = 36\sqrt{2}$$

۱۰۱. کره‌ای را در یک استوانه به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط می‌کنیم. حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر است؟

۲۱۶π (۴)

۱۴۴π (۳)

۲۸۸π (۲)

۴۳۲π (۱)

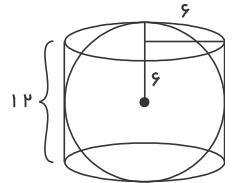
پاسخ: گزینه ۳

باتوجه به شکل برای به دست آوردن حجم فضای خالی بین کره و استوانه کافیست حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۱۲ را منهای حجم کره‌ای به شعاع ۶ کنیم.

$$\Rightarrow V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi(r^2 h - \frac{4}{3}r^3)$$

$$\Rightarrow \pi(6^2 \times 12 - \frac{4}{3} \times 6^3) = 6^2 \pi(12 - \frac{4}{3} \times 6)$$

$$= 6^2 \pi(12 - 8) = 6^2 \pi(4) = 144\pi$$



۱۰۲. مساحت کل یک نیم‌کره توپر  $27\pi$  است. حجم این نیم‌کره کدام است؟

۴۵π (۴)

$36\sqrt{3}\pi$  (۳)

۱۸π (۲)

۲۷π (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مساحت کل یک نیم‌کره برابر با مساحت نصف کره به علاوه مساحت دایره زیرین آن است.



مساحت دایره زیرین + مساحت نصف کره = مساحت کل نیم‌کره

$$= \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$3\pi r^2 = 27\pi \rightarrow 3r^2 = 27 \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

حال مساحت کل نیم‌کره را برابر  $27\pi$  قرار می‌دهیم.

حال حجم نیم‌کره را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi 3^3 = 18\pi$$

۱۰۳. بزرگترین هرمی که می‌تواند به طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر و عرض ۱۲ متر و عمق ۴ متر ساخته شود را در نظر بگیرید. حداکثر چه

تعداد هرم با حجم این هرم می‌توان درون این استخر ساخت؟

چهار تا (۴)

سه تا (۳)

دو تا (۲)

یکی (۱)

پاسخ: گزینه ۳ بزرگترین هرمی که در داخل استخر قرار می‌گیرد، هرمی با قاعده مستطیل شکل به ابعاد ۲۰ و ۱۲ و ارتفاع ۴ متر است. چون حجم هرم،  $\frac{1}{3}$  حجم منشور با

قاعده‌ی مساوی با آن است، بنابراین از این نوع هرم نیز ۳ تا داخل استخر جای می‌گیرد.

۱۰۴. ارتفاع وارد بر قاعده‌ی هرمی که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ و اندازه‌ی یال‌های آن نیز ۶ باشد، کدام است؟

۲√۶ (۴)

۳√۲ (۳)

۲√۳ (۲)

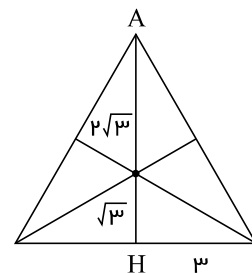
۳√۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$AH^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow AH = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$x^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 36 - 12 = 24 \rightarrow x = \sqrt{24}$$

$$\rightarrow \sqrt{24} = \sqrt{6 \times 4} = 2\sqrt{6} \rightarrow x = 2\sqrt{6}$$



۱۰۵. ارتفاع یک مخروط ۱۲cm و شعاع قاعده‌ی آن ۶cm است. یک حفره‌ی استوانه‌ای به قطر ۲cm در آن ایجاد کردیم به طوری که محور استوانه بر محور مخروط منطبق باشد، حجم جسم باقی‌مانده چقدر است؟

۴۳۲π سانتی‌متر مکعب (۴)

۱۳۴π سانتی‌متر مکعب (۳)

۱۲۴π سانتی‌متر مکعب (۲)

۱۴۴π سانتی‌متر مکعب (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ارتفاع استوانه  $h = \frac{1}{6} \rightarrow h = \frac{12}{6} = 2 \rightarrow 12 - 2 = 10$

حجم مخروط  $= \frac{1}{3}(\pi \times 6^2) \times 12 = \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 12 = 144\pi$

حجم استوانه  $= \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \pi \times (1)^2 \times 10 = 10\pi$

حجم مخروط - حجم استوانه  $= 144\pi - 10\pi = 134\pi \text{cm}^3$

۱۰۶. قاعده‌ی هرمی مربعی است به ضلع ۳cm، اگر حجم هرم ۲۴ سانتی‌متر مکعب باشد، ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟

۸ (۴)

$\frac{8}{3}$  (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} = \text{حجم} \rightarrow \frac{(3 \times 3) \times x}{3} = 24 \rightarrow \frac{3 \times x}{3} = \frac{24}{1}$$

$$\rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm}$$

۱۰۷. شعاع قاعده‌ی یک مخروط با شعاع یک نیم‌کره مساوی است. اگر ارتفاع مخروط سه برابر شعاع قاعده‌اش باشد، نسبت حجم این مخروط به حجم نیم‌کره کدام گزینه است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

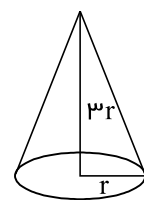
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

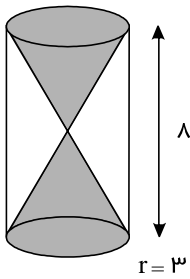
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 \times 3r}{3} = \pi r^3, \quad h = 3r$$

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{4\pi r^3}{6} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{نیم کره}}} = \frac{\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{3\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{3}{2}$$



۱۰۸. در یک ساعت شنی مطابق شکل، حجم فضایی که توسط شن‌ها اشغال شده است، کدام است؟



۱۲π (۲)

۱۶π (۱)

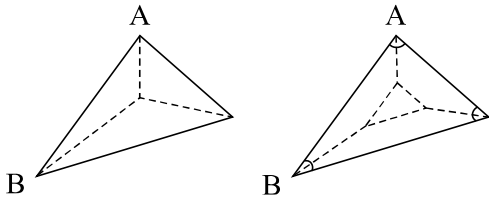
۴۸π (۴)

۲۴π (۳)

پاسخ: گزینه ۳ شکل از دو مخروط یکسان به شعاع قاعده‌ی ۳ و هر ارتفاع ۴ تشکیل شده است.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 4}{3} = 12\pi \xrightarrow{\text{هر دو با هم}} 12\pi + 12\pi = 24\pi$$

۱۰۹. هرمی ۶ یال دارد و ۴ گوشه‌ی آن را می‌بریم. شکل جدید چند یال دارد؟



۱۲ (۲)

۲۴ (۱)

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ با برش زدن هر گوشه‌ی هرم، سه یال به هرم اضافه می‌شود و با توجه به این‌که ۴ گوشه وجود دارد پس  $4 \times 3 = 12$  یال به هرم اضافه می‌شود.

$12 + 6 = 18$

۱۱۰. با استفاده از سه هرم مربع‌القاعده متساوی‌الشکل، می‌توانیم یک مکعب به بعد  $a$  بسازیم، طول بلندترین یال این هرم کدام است؟

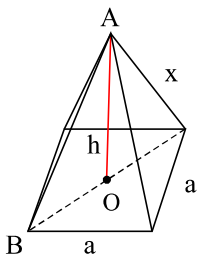
$2a\sqrt{3}$  (۴)

$a\sqrt{3}$  (۳)

$a$  (۲)

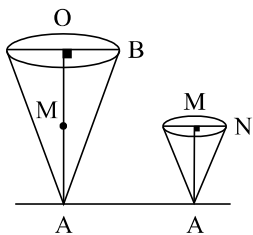
$a\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳ برای ساختن یک مکعب به وسیله سه هرم مربع‌القاعده یکسان بایستی شکل هرم‌ها به صورت زیر باشد: یال  $AB$  بزرگترین یال این هرم است که همان قطر اصلی مکعب می‌باشد. پس داریم:



$AB = a\sqrt{3}$

۱۱۱. ظرفی مخروطی مانند شکل زیر داریم، اگر از نقطه‌ی  $M$  وسط ارتفاع مخروط موازی با سطح قاعده‌ی مخروط برش بزنیم، حجم مخروط به دست آمده چند برابر مخروط اولیه خواهد بود؟



$\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

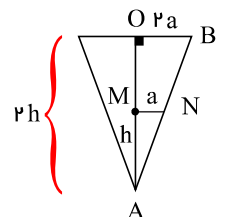
پاسخ: گزینه ۳ دو مثلث  $AOB$  و  $AMN$  متشابه هستند و چون  $M$  وسط ضلع  $OA$  است، نسبت تشابه آنها برابر  $\frac{1}{2}$  است. بنابراین شعاع  $MN$  نیز نصف شعاع  $OB$  است.

اگر  $AM = h$  و  $MN = a$  باشد، در این صورت  $AO = 2h$  و  $OB = 2a$  است، پس داریم:

مخروط کوچک  $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$

مخروط بزرگ  $V = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 2h = \frac{1}{3}\pi \times 4a^2 \times 2h = \frac{8}{3}\pi a^2 h$

$\rightarrow \frac{\text{مخروط کوچک } V}{\text{مخروط بزرگ } V} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2 h}{\frac{8}{3}\pi a^2 h} = \frac{1}{8}$



۱۱۲. ظرفی به شکل مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۹ سانتی‌متر را ۶ بار پر از آب کرده و در ظرفی مکعب شکل به ضلع ۹ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در این مکعب بالا می‌آید؟ ( $\pi \simeq 3$ )

۱ سانتی‌متر (۴)

۳ سانتی‌متر (۳)

۶ سانتی‌متر (۲)

۹ سانتی‌متر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

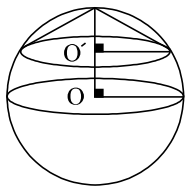
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times (3)^2 \times 9 = 81 \text{ cm}^3$$

$$\text{حجم آب جابه‌جا شده} = 6 \times 81 = 486 \text{ cm}^3$$

حال کافی است این حجم آب را بر مساحت قاعده‌ی مکعب تقسیم کنیم تا ارتفاع آب به دست آید:

$$\text{مساحت قاعده‌ی مکعب} = 9 \times 9 = 81 \text{ cm}^2$$

$$\text{ارتفاع آب} = 486 \div 81 = 6 \text{ cm}$$



(۴)  $\frac{27}{2}$

(۳)  $\frac{27}{4}$

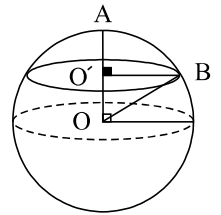
(۲)  $\frac{8}{3}$

(۱)  $\frac{4}{3}$

۱۱۳. در شکل زیر شعاع کره R و  $OO' = \frac{R}{3}$  می‌باشد. نسبت حجم کره به حجم مخروط چقدر است؟

پاسخ: گزینه ۳ از O به B وصل می‌کنیم. اندازه‌ی OB مساوی شعاع کره یعنی R است. بنابراین  $O'B$  یعنی شعاع قاعده‌ی مخروط را با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث  $OO'B$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} O'B^2 &= OB^2 - OO'^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 \\ &= R^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{9R^2}{9} - \frac{R^2}{9} = \frac{8R^2}{9} \\ \rightarrow O'B &= \sqrt{\frac{8R^2}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} R \end{aligned}$$



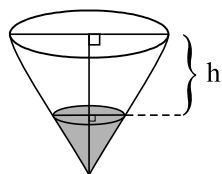
همچنین ارتفاع مخروطی یعنی  $AO'$  برابر است با:

$$AO' = AO - OO' = R - \frac{R}{3} \Rightarrow \frac{3R - R}{3} = \frac{2R}{3}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (O'B)^2 \times AO' = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{8}}{3} R\right)^2 \times \frac{2R}{3} = \frac{1}{3} \pi \times \frac{8}{9} R^2 \times \frac{2}{3} R = \frac{16}{81} \pi R^3$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{16}{81} \pi R^3} = \frac{4}{3} \times \frac{81}{16} = \frac{1}{1} \times \frac{27}{4} = \frac{27}{4}$$

۱۱۴. مخزنی به شکل مخروط واژگون شده حاوی مایع مخصوصی است. مقدار h که برابر با فضای خالی بالای مایع است، توسط فرمول  $h = 21 - \frac{V}{\pi}$  بر حسب متر محاسبه می‌گردد. در فرمول مذکور برابر با شعاع مایع بر حسب متر است. محیط قاعده‌ی دایره‌ای شکل مخزن برابر است با:



(۲)  $12\pi$

(۱)  $9\pi$

(۴)  $18\pi$

(۳)  $15\pi$

پاسخ: گزینه ۲ اگر  $h = 0$  باشد یعنی تمام مخزن از مایع پر شده است:

$$21 - \frac{V}{\pi} = 0$$

$$\frac{V}{2}r = 21 \Rightarrow r = 6m$$

$$\text{محیط قاعده} = 2\pi r = 2 \times 6 \times \pi = 12\pi$$

۱۱۵. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

۲π (۴)

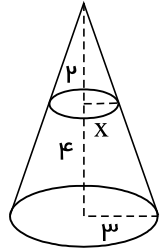
$\frac{4\pi}{3}$  (۳)

π (۲)

$\frac{2\pi}{3}$  (۱)

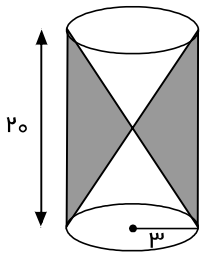
پاسخ: گزینه ۱ ابتدا شعاع مخروط کوچک را به کمک قضیه تالس به دست می‌آوریم:

$$\text{جزء کل} \quad \frac{2}{6} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{2 \times 3}{6} = 1 \rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 1^2 \times 2}{3} = \frac{2}{3}\pi$$



۱۱۶. در زمان‌های قدیم برای اندازه‌گیری زمان از ساعت شنی استفاده می‌کردند. ساعت شنی از دو مخروط هم‌اندازه تشکیل شده است که درون یک استوانه قرار دارد. حجم فضای خالی این مخروط‌ها را بیابید. (قسمت رنگی)

(شعاع دایره = ۳cm، ارتفاع = ۲۰cm)



۱۸۰π (۲)

۱۲۰π (۱)

۹۰π (۴)

۶۰π (۳)

پاسخ: گزینه ۱

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$

حجم استوانه =  $\pi r^2 \times h$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 10 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 10 = 30\pi$$

$$\pi \times 3^2 \times 20 = \pi \times 9 \times 20 = 180\pi$$

$$30\pi \times 2 = 60\pi \text{ حجم ۲ تا مخروط}$$

$$\Rightarrow 180\pi - 60\pi = 120\pi$$

۱۱۷. حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع ۳cm که وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند، کدام گزینه است؟

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۳)

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$  (۲)

$\frac{9\sqrt{2}}{2}$  (۱)

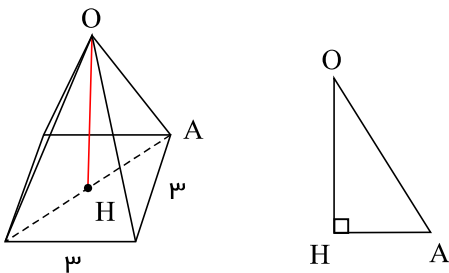
پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم، مطابق شکل داریم:

اندازه‌ی AH نصف قطر مربع است.

$$(\text{قطر مربع})^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \rightarrow \text{قطر مربع} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



همچنین OA برابر ضلع مربع یعنی ۳cm است، پس داریم:

$$OH^2 = OA^2 - HA^2 \rightarrow OH^2 = 3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$9 - \frac{18}{4} = \frac{36 - 18}{4} = \frac{18}{4} \rightarrow OH = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \text{حجم هرم} = \frac{1}{3}(\text{مساحت مربع}) \times OH = \frac{1}{3}(3)^2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

۱۱۸. هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع  $10\text{cm}$  می‌باشد. اگر مساحت کل این هرم  $360$  سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

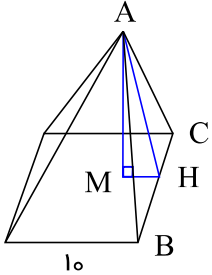
۴۰۰ (۴)

۴۴۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۲۶۰ (۱)

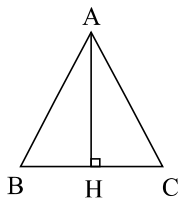
پاسخ: گزینه ۴ مساحت کل این هرم شامل ۴ مثلث متساوی‌الساقین و یک مربع است. مساحت مربع برابر است با  $10 \times 10 = 100\text{cm}^2$  بنابراین مساحت ۴ مثلث اطراف برابر است با:



$$360 - 100 = 260\text{cm}^2$$

مساحت هر کدام از مثلث‌ها، مساوی است با:  $260 \div 4 = 65\text{cm}^2$

طبق شکل  $AH$  ارتفاع وجه برابر  $13$  سانتی متر،  $MH$  نصف ضلع برابر  $5\text{cm}$  است. بنابراین می‌توان از رابطه‌ی فیثاغورس ( $MA$ ) ارتفاع هرم را یافت.



$$\text{ارتفاع وجه } \triangle ABC = 65 = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$\rightarrow 65 = \frac{5 \times AH}{1} \rightarrow AH = 13\text{cm}$$

$$13^2 = 5^2 + MA^2 \rightarrow MA^2 = 144 \rightarrow MA = 12$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3}a^2 \times b = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 12 = 400\text{cm}^3$$

۱۱۹. هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع  $6$  سانتی‌متر است. اگر مساحت جانبی این هرم  $60$  سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چقدر است؟

۲۴ (۴)

۴۸ (۳)

۱۲ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ نکته: مساحت جانبی یک هرم برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(\text{محیط قاعده}) \times (\text{ارتفاع وجه})$$

مربعی به ضلع  $6$  سانتی‌متر است. بنابراین محیط آن محیط قاعده برابر است با:

$$4 \times 6 = 24\text{cm}$$

باتوجه به این که مساحت جانبی برابر  $60\text{cm}^2$  است. می‌توان ارتفاع هر وجه را از تساوی زیر به دست آورد:

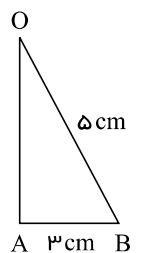
$$60 = \frac{1}{2}(24)(\text{ارتفاع وجه}) \rightarrow \text{ارتفاع وجه} = \frac{60}{12} = 5\text{cm}$$

طبق شکل  $OB$  ارتفاع وجه برابر  $5\text{cm}$ ،  $AB$  نصف ضلع مربع برابر  $3\text{cm}$  است. بنابراین می‌توان با رابطه‌ی فیثاغورس ( $OA$ ) ارتفاع هرم را یافت:

$$OA^2 = OB^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow OA = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{حجم هرم } V = \frac{1}{3}(\text{قاعده}) \times (\text{ارتفاع})$$

$$= \frac{1}{3}(24 \times 4) = 32\text{cm}^3$$



۱۲۰. دو مخروط وجود دارند که ارتفاع آنها یکسان و شعاع‌های قاعده‌ی آنها یک واحد اختلاف دارند. اگر اختلاف حجم‌های این دو مخروط  $۱۲\pi$  باشد و ارتفاع هر یک از آنها به اندازه‌ی شعاع قاعده کوچکتر باشد، شعاع قاعده‌ی مخروط بزرگتر کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ ارتفاع مخروط یعنی  $h_1$  و  $h_2$  برابر شعاع قاعده‌ی مخروط کوچکتر یعنی  $r$  است. شعاع قاعده‌ی مخروط بزرگتر برابر  $r + 1$  است. پس داریم:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi(r+1)^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi(r+1)^2 \times r$$

$$\rightarrow V_2 - V_1 = 12\pi = \frac{1}{3}\pi \underbrace{(r+1)^2 \times r - r^3}_{(r^2+2r+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\pi(\cancel{r^3} + 2r + r - \cancel{r^3}) \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{3}\pi(2r^2 + r)$$

$$\rightarrow 2r^2 + r = 36 \xrightarrow{\text{با حدس و آزمایش}} r = 4 \rightarrow \begin{cases} r=1 \rightarrow 2 \times 1 + 1 \neq 36 \\ r=2 \rightarrow 2 \times 2^2 + 2 \neq 36 \\ r=3 \rightarrow 2 \times 8 + 3 \neq 36 \\ r=4 \rightarrow 2 \times 16 + 4 \neq 36 \end{cases}$$

بنابراین شعاع قاعده مخروط بزرگتر برابر ۵ است.

۱۲۱. از نقطه‌ای روی سقف یک اتاق مکعب شکل، چهار نخ به رأس‌های کف اتاق وصل می‌کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

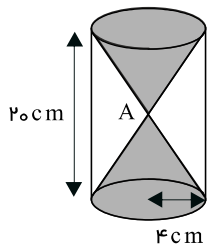
- ۱) برابر  $\frac{1}{3}$       ۲) برابر  $\frac{1}{4}$       ۳) برابر  $\frac{2}{3}$       ۴) برابر  $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ ارتفاع هرم برابر با ضلع مکعب و مساحت قاعده‌ی آن برابر با مساحت مربع است. پس داریم:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}(S_{\text{مربع}}) \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3}(\text{ضلع})^2 \times (\text{ضلع}) = \frac{1}{3}(\text{ضلع})^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{هرم}}}{V_{\text{اتاق}}} = \frac{\frac{1}{3}(\text{ضلع})^3}{(\text{ضلع})^3} = \frac{1}{3}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حجم هرم  $\frac{1}{3}$  حجم مکعب است.

۱۲۲. در ساعت شنی زیر در هر ثانیه، ۰٫۵ سانتی‌متر مکعب شن از منفذ A خارج می‌شود. اگر مخروط بالای ساعت شنی پر باشد، پس از چند ثانیه خالی می‌شود؟



۲)  $\frac{6400\pi}{2}$

۴)  $\frac{160\pi}{3}$

۱)  $\frac{320\pi}{3}$

۳)  $\frac{3200\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ شعاع قاعده‌ی مخروط برابر ۴ و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است.

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (4)^2 \times 10 = \frac{160\pi}{3} \text{ cm}^3$$

در هر ثانیه ۰٫۵ سانتی‌متر مکعب شن خارج می‌شود باید ببینیم برای خروج  $\frac{160\pi}{3}$  سانتی‌متر مکعب چند ثانیه زمان لازم است.

$$\frac{160\pi}{3} \div 0.5 = \frac{160\pi}{3} \div \frac{5}{100} = \frac{160\cancel{\pi}}{3} \times \frac{100}{\cancel{5}} = \frac{3200\pi}{3} \text{ ثانیه}$$

۱۲۳. یک کره را در یک استوانه به ارتفاع  $h$  قرار داده‌ایم. اگر این کره بر وجه جانبی و دو قاعده‌ی استوانه مماس باشد، کدام رابطه درست است؟ (حجم  $V =$

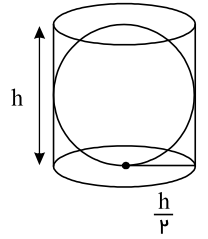
- ۱) استوانه  $V = \frac{4}{3}V_{\text{کره}}$       ۲) استوانه  $V = \frac{1}{3}V_{\text{کره}}$       ۳) استوانه  $V = \frac{2}{3}V_{\text{کره}}$       ۴) استوانه  $V = \frac{1}{2}V_{\text{کره}}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به شکل می توان نتیجه گرفت که شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر  $\frac{h}{۲}$  است. بنابراین داریم:

$$\text{استوانه } V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{h}{۲}\right)^2 h = \pi \left(\frac{h^3}{۴}\right) h = \frac{\pi}{۴} h^3$$

$$\text{کره } V = \frac{۴}{۳} \pi R^3 = \frac{۴}{۳} \pi \left(\frac{h}{۲}\right)^3 = \frac{۴}{۳} \pi \frac{h^3}{۸} = \frac{\pi}{۶} h^3$$

$$\text{استوانه } V = \frac{\pi}{۴} \times \frac{h^3}{\frac{\pi}{۶}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \text{کره } V = \frac{۲}{۳} V \text{ استوانه}$$



۱۲۴. در کره‌ای به شعاع  $R$  یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم این کره به مکعب نام برده کدام است؟

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \pi$  (۴)

$\frac{\sqrt{۶}}{۳} \pi$  (۳)

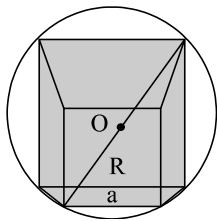
$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \pi$  (۲)

$\frac{\sqrt{۳}}{۳} \pi$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴

قطر کره با قطر مکعب برابر است.

نکته: اندازه‌ی قطر مکعبی به ضلع  $a$  برابر است با:  $\sqrt{۳}a$  بنابراین داریم:



$$\text{مکعب} = \text{قطر کره} = ۲R = \sqrt{۳}a \rightarrow a = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{مکعب } V = (\text{ضلع})^3$$

$$\text{حجم مکعب} = \left(\frac{۲R}{\sqrt{۳}}\right)^3 = \frac{۸R^3}{۳\sqrt{۳}} \rightarrow \frac{\text{کره } V}{\text{مکعب } V} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^3}{\frac{۸R^3}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۴}{۳}\pi \times \frac{\sqrt{۳}}{۸} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$$

۱۲۵. کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

$۵۴\pi$  (۴)

$۳۶\pi$  (۳)

$۲۷\pi$  (۲)

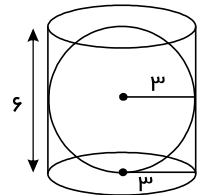
$۱۸\pi$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ارتفاع استوانه برابر قطر کره است. بنابراین شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر نصف ارتفاع یعنی ۳ است.

$$\text{حجم استوانه} : \pi R^2 h = \pi \times (۳)^2 \times ۶ = ۵۴\pi$$

$$\text{حجم کره} : \frac{۴}{۳}\pi R^3 = \frac{۴}{۳}\pi \times (۳)^3 = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲۷ = ۳۶\pi$$

$$\text{حجم فضای بین استوانه و کره} = ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$$



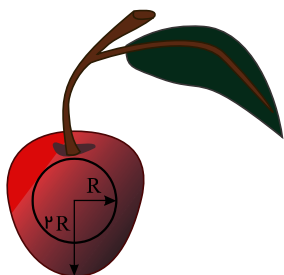
۱۲۶. می توان پذیرفت که ضخامت گوشت یک گیلان با ضخامت هسته آن برابر است. همچنین می توان پذیرفت که گیلان و هسته‌ی آن هر دو کره‌ی هستند. نسبت حجم گوشت گیلان به حجم هسته‌ی آن برابر کدام گزینه است؟

$۳$  (۱)

$۷$  (۲)

$۸$  (۳)

$۲۷$  (۴)





پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم کره کوچک} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

شعاع کره بزرگ تر ۲ برابر شعاع کره کوچکتر (هسته گیلان) می باشد.

$$\text{حجم کره بزرگ} = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = \frac{4\pi \times 2 \times 2 \times 2 \times R^3}{3} = \frac{4}{3} \times 8\pi R^3$$

$$\text{حجم گوشت گیلان} = \text{اختلاف حجمها} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 8 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 7 \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\text{نسبت حجمها} = \frac{7 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 7$$

۱۲۷. سه کره داریم که مرکزهایشان هم خط نیستند. حداکثر چند صفحه را می توان بر همه ی کره ها مماس کرد؟

- ۱) ۴      ۲) ۶      ۳) ۸      ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه ۳

۱۲۸. فرض کنید  $K$  رویه ی مکعبی به ضلع ۲ است و  $G$  رویه ای کره ای به شعاع  $r$  که هم مرکز  $K$  است. اگر  $K \cap G$  دقیقاً از شش دایره تشکیل شده باشد،  $r$  در کدام شرط صدق می کند؟

- ۱)  $1 < r \leq \sqrt{2}$       ۲)  $1 \leq r < \sqrt{2}$       ۳)  $r \leq \sqrt{2}$       ۴)  $1 < r < \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱ شعاع کره باید به اندازه ای باشد که از وجه بگذرد پس  $r > 1$  اما در ضمن نباید از ضلع بگذرد پس  $r \leq \sqrt{2}$

۱۲۹. چند کره به شعاع ۱ را باید کنار هم بگذاریم تا جمعشان برابر حجم کره ای به شعاع ۲ بشود؟

- ۱) ۲      ۲) ۴      ۳) ۶      ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ نسبت حجم کره ها برابر مکعب نسبت شعاعها است که در اینجا برابر است با:  $\left(\frac{2}{1}\right)^3 = 8$

۱۳۰. مکعبی به ضلع ۱ و هشت کره ی متمایز به شعاع  $\frac{1}{4}$  داریم که مرکز هر کدامشان یکی از رأسهای مکعب است. قطر کره ای که مماس خارج این هشت کره است کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{3}-1$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $\sqrt{2}-1$       ۴)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

پاسخ: گزینه ۱ قطر مکعب برابر است با  $\sqrt{3}$  و مرکز کره ی مطلوب همان مرکز مکعب است. پس قطر کره برابر است با:

$$\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{4} = \sqrt{3} - 1$$

۱۳۱. کره ای به شعاع ۳ را در نظر بگیرید که مرکزش بر مبدأ مختصات دکارتی منطبق است. چند نقطه روی سطح این کره هستند که همه ی مختصاتشان عددی صحیح است؟

- ۱) ۳۰      ۲) ۲۹      ۳) ۱۲      ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱ دنبال سه تایی های  $(x, y, z)$  می گردیم که  $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$  واضح است که  $x$  و  $y$  و  $z$  باید از عددهای ۰ و  $\pm 1$  و  $\pm 2$  و  $\pm 3$  انتخاب شوند. به این ترتیب یکی از این سه متغیر می تواند  $\pm 3$  باشد و دو تای دیگر صفر، یا انتخابی از  $\pm 1$  و  $\pm 2$  و  $\pm 3$ . بنابراین تعداد کل حالت های ممکن برابر است با:  $2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$

۱۳۲. در نوعی دستگاه صنعتی با حجم ترکیبی، استوانه ای بر یک کره محیط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه چقدر است؟

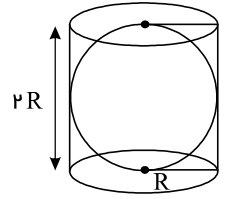
- ۱)  $\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{3}{2}$       ۳)  $3\sqrt{2}$       ۴)  $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ طبق شکل، شعاع کره و شعاع قاعده ی استوانه برابر  $R$  است. همچنین ارتفاع استوانه برابر  $2R$  است.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ کره}$$

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3 \text{ استوانه}$$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{استوانه}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



۱۳۳. کره‌ای داخل استوانه‌ای محاط شده است. اگر حجم فضای بین کره و استوانه  $18\pi$  باشد، شعاع و حجم کره به ترتیب برابر است با:

(۴)  $(36\pi, 6)$

(۳)  $(72\pi, 6)$

(۲)  $(18\pi, 3)$

(۱)  $(36\pi, 3)$

پاسخ: گزینه ۱ شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه را  $R$  در نظر می‌گیریم. بنابراین ارتفاع استوانه  $2R$  می‌شود:

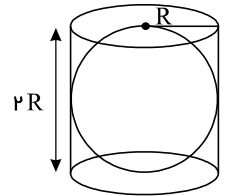
$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3 \text{ استوانه}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ کره}$$

$V$  کره - استوانه = حجم فضای بین کره و استوانه

$$= 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^3 \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \pi R^3 \left(\frac{6-4}{3}\right) = \pi R^3 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

فضای بین کره و استوانه طبق صورت مسأله برابر  $18\pi$  است.  $\leftarrow \frac{2}{3}\pi R^3 = 18\pi$



$$\rightarrow R^3 = \frac{18}{\frac{2}{3}} \rightarrow R^3 = \frac{54}{2} = 27 = 3^3 \rightarrow R = 3 \rightarrow \text{کره } V = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = \frac{4}{3}\pi \times 27 = 36\pi$$

۱۳۴. یک نیم کره‌ی چوبی توپُر را به طور کامل رنگ آمیزی کرده‌ایم. مساحت کل قسمت رنگ شده  $120$  سانتی‌متر مربع شده است. اگر بخواهیم کره‌ای با همان شعاع نیم کره را به طور کامل رنگ آمیزی کنیم، مساحت رنگ شده در این حالت چند سانتی‌متر مربع خواهد بود؟

(۴)  $360$

(۳)  $320$

(۲)  $240$

(۱)  $160$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: مساحت یک نیم کره توپُر به شعاع  $R$  برابر است با:  $3\pi R^2$

$$3\pi R^2 = 120 \rightarrow R^2 = \frac{120}{3\pi} = \frac{40}{\pi} \rightarrow R = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \text{ cm}$$

$$R \text{ مساحت کره با شعاع } R = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \left(\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)^2 = 4 \times \frac{40}{\pi} = 160 \text{ cm}^2$$

۱۳۵. دو کره داریم که شعاع یکی، ۲ برابر دیگری است. اگر کره کوچک را داخل کره بزرگ قرار دهیم، حجم فضای بین دو کره، چه کسری از حجم کره بزرگ‌تر است؟

(۴)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{5}{6}$

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۱)  $\frac{7}{8}$

پاسخ: گزینه ۱ شعاع کره‌ی کوچک را  $R$  و شعاع کره‌ی بزرگ را  $2R$  در نظر می‌گیریم:

حجم کره‌ی کوچکتر - حجم کره‌ی بزرگتر = فضای بین دو کره

$$V = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{32}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^3 \left(\frac{32}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{28}{3}\pi R^3$$

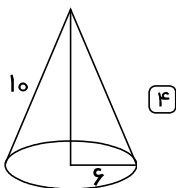
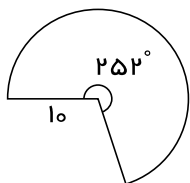
$$\frac{V_{\text{فضای بین دو کره}}}{V_{\text{حجم کره‌ی بزرگتر}}} = \frac{\frac{28}{3}\pi R^3}{\frac{32}{3}\pi R^3} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

۱۳۶. مقداری آب را در استوانه‌ای که سر و ته آن بسته است، ریخته‌ایم. با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف، سطح آب به کدام شکل نمی‌تواند باشد؟ (به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده‌ایم.)

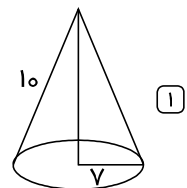
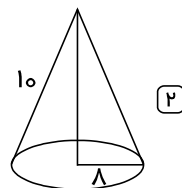


پاسخ: گزینه ۱ به سادگی و تجسم می‌تواند گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ را تشکیل داد.

۱۳۷. برای ساختن مخروط از شکل مقابل دو شعاع را روی هم قرار می‌دهیم. کدام مخروط زیر حاصل می‌شود؟



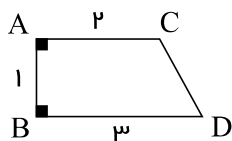
هیچکدام (۳)



پاسخ: گزینه ۱ ۲۵۲ درجه یعنی ۰٫۷ از محیط دایره پس محیط دایره را حساب کرده و در ۰٫۷ ضرب می‌کنیم:

$$\text{محیط مکانی} = ۲۰ \times \pi \times ۰٫۷ = ۱۴\pi \rightarrow \text{محیط مکانی} = \text{قطر} \times \pi$$

$$\text{شعاع} = ۷ \rightarrow ۱۴ = x\pi \rightarrow x = ۱۴ \rightarrow \text{محاسبه‌ی شعاع قاعده‌ی مخروط}$$



۳π (۴)

۱۹/۳ π (۳)

۸π (۲)

۸/۳ π (۱)

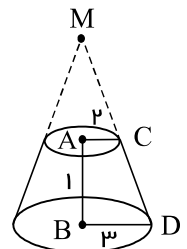
۱۳۸. حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع AB چقدر می‌شود؟

پاسخ: گزینه ۳ حجم حاصل، مخروط ناقص می‌باشد، یعنی یک مخروط بزرگ که مخروط کوچکی از آن کم شده است.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

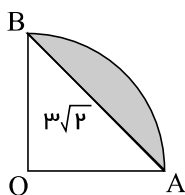
$$\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3} \rightarrow 3x = 2(x+1) \rightarrow 3x = 2x + 2$$

$$\rightarrow 3x - 2x = 2 \rightarrow x = 2$$



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{مخروط بزرگ}} V_1 = \frac{\pi \times 3^2 \times 3}{3} = 9\pi \\ \xrightarrow{\text{مخروط کوچک}} V_2 = \frac{\pi \times 1^2 \times 2}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{کل}} = V_1 - V_2 = 9\pi - \frac{2\pi}{3} \\ = \frac{27\pi - 2\pi}{3} = \frac{25\pi}{3} \end{array} \right.$$

۱۳۹. ربع دایره مقابل را حول OA دوران می‌دهیم، اگر وتر AB برابر  $3\sqrt{2}$  باشد، حجم شکل حاصل از دوران قسمت رنگی کدام است؟



۶π (۲)

۹π (۱)

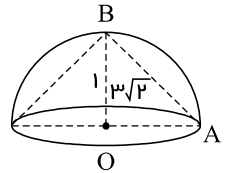
۱۲π (۴)

۳π (۳)

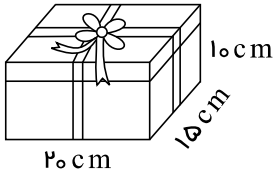
پاسخ: گزینه ۱ اگر شکل را دوران دهیم به یک نیم کره می‌رسیم که شعاع آن طبق فیثاغورس برابر ۳ است.

$$OB = OA \rightarrow (OB)^2 + (OA)^2 = (AB)^2 \rightarrow 2(OA)^2 = (3\sqrt{2})^2 \rightarrow OA = 3$$

$$\begin{aligned} \text{حجم نیم کره} &= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{\frac{4}{3} \times \pi \times 3 \times 3 \times 3}{2} = 18\pi \\ \text{حجم مخروط} &= \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 3}{3} = 9\pi \\ \text{حجم رنگی} &= \text{حجم نیم کره} - \text{حجم مخروط} = 18\pi - 9\pi = 9\pi \end{aligned}$$



۱۴۰. یک هدیه‌ی تولد به وسیله‌ی روبان به شکلی که نشان داده‌ایم گره خورده است. پاپیون، گره‌ها و انتهای روبان ۴۷ سانتی‌متر است. طول کل روبان استفاده شده چقدر است؟ (برحسب سانتی‌متر)



۱۶۷ (۲)

۱۵۷ (۱)

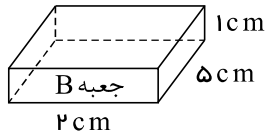
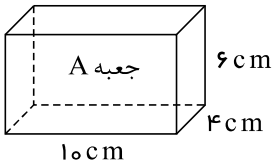
۱۳۷ (۴)

۱۷۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۱. باتوجه به شکل ۲ تا طول جعبه، ۲ تا عرض و ۴ تا ارتفاع داریم یعنی:

$$2(20) + 2(15) + 4(10) = 110$$

$$\text{طول کل روبان} = 110 + 47 = 157 \text{ cm}$$



۱۴۱. چند تا جعبه مثل جعبه‌ی B در جعبه‌ی A جا می‌شود؟

۲۴ (۱)

۱۰ (۲)

۱۲ (۳)

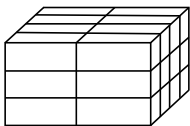
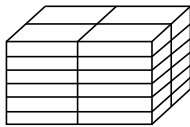
۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

دو روش برای چیدن جعبه‌ها وجود دارد:

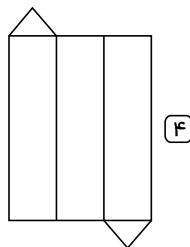
(۱) ۶ طبقه در هر طبقه ۴ جعبه (۲) ۳ طبقه و در هر طبقه ۸ جعبه

هم روش دیگر این است که حجم جعبه‌ی A بر حجم جعبه‌ی B تقسیم شود.

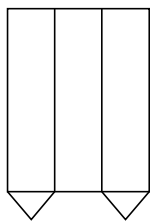


$$\begin{aligned} \text{حجم } V_A &= 10 \times 4 \times 6 = 240 \text{ cm}^3 \\ \text{حجم } V_B &= 5 \times 2 \times 1 = 10 \text{ cm}^3 \\ \frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } B} &= \frac{240}{10} = 24 \text{ عدد} \end{aligned}$$

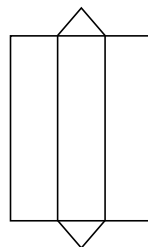
۱۴۲. کدام شکل زیر منشور مثلث القاعده تشکیل نمی‌دهد؟



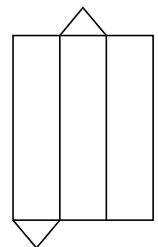
(۴)



(۳)



(۲)

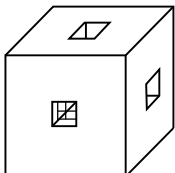


(۱)

پاسخ: گزینه ۳ زیرا در این گزینه یک طرف قاعده ندارد.

۱۴۳. مکعبی به ضلع ۳m همانطور که در شکل معلوم است دارای سوراخ مربعی شکل به ضلع ۱ در وسط هر وجه می‌باشد. سه سوراخ در وسط مکعب

طوری برخورد می‌کنند که مکعبی در وسط مکعب ایجاد می‌شود. مساحت کل مکعب به متر مربع برابر است با:



۷۶ (۲)

۷۲ (۱)

۸۰ (۴)

۷۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ مساحت بیرونی هر وجه مکعب برابر است با:  $3 \times 3 = 9$  اما یک مربع  $1 \times 1$  از آن کم می‌شود  $9 - 1 = 8 \text{ cm}^2$  پس مساحت ۶ وجه مکعب برابر است با:  $6 \times 8 = 48 \text{ m}^2$

از هر وجه یک سوراخ مربع شکل ایجاد شده و دور تا دور این سوراخ ۴ مربع  $1 \times 1$  وجود دارد.

$$4 \times 6 \times 1 \times 1 = 24$$

$$\text{مساحت کل} = 48 + 24 = 72$$

۱۴۴. یک شرکت جعبه‌های مکعب شکل می‌سازد. حجم کل جعبه برابر است با  $640 \text{ cm}^3$  و ارتفاع هر کدام  $10 \text{ cm}$  است. اگر هزینه‌ی رنگ کردن برای هر سانتی‌متر مربع ۱۵ دلار باشد، هزینه‌ی رنگ‌آمیزی یک مکعب چند دلار است؟

۶۰۲۰ (۴)

۷۰۴۰ (۳)

۶۷۲۰ (۲)

۶۴۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم} = x^2 \times 10 = 640 \rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\text{مساحت کل} = 2x^2 + 4(10x) = 128 + 320 = 448 \text{ cm}^2$$

$$\text{هزینه‌ی رنگ‌آمیزی یک مکعب} = 448 \times 15 = 6720$$

۱۴۵. ۱۵ مکعب  $1 \text{ cm}^3$  به رنگ آبی و ۱۶ مکعب  $1 \text{ cm}^3$  زرد و ۳۳ مکعب  $1 \text{ cm}^3$  سیاه را به هم چسبانده‌ایم تا یک مکعب بزرگ تشکیل شود. کمترین تعداد مکعب‌های سیاه را در سطوح بیرونی مکعب چند تا است؟

۳۲ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ مکعب‌هایی که در گوشه قرار می‌گیرند هر سه وجه‌شان و مکعب‌های روی یال دو وجه آن‌ها قابل دیدن است. ۴ تا از مکعب‌های وسط هر وجه، فقط یک وجه قابل دیدن دارند. بنابراین ۸ تا از مکعب‌های سیاه را در وسط مکعب قرار می‌دهیم که هیچ وجهی از آن‌ها دیده نشود. در هر وجه ۴ مکعب وسط را سیاه قرار می‌دهیم  $8 + 4 \times 6 = 32$

یک مکعب سیاه می‌ماند که آن را روی یال می‌گذاریم که دو وجه آن دیده می‌شود

$$\text{تعداد سطوح سیاه بیرونی} = (4 \times 6) + (2 \times 1) = 26$$

۱۴۶. جمع طول لبه‌های یک مکعب مستطیل  $68 \text{ cm}$  است. اگر طول اضلاع اعداد صحیح و مساحت قاعده  $18 \text{ cm}^2$  باشد، به این ترتیب حجم‌های ممکن برای مکعب مستطیل کدام است؟

۱۴۴ و ۱۰۸ (۴)

۱۴۴ و ۲۷ (۳)

۷۲ و ۱۰۸ (۲)

۷۲ و ۵۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ اگر طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را با  $a$  و  $b$  و  $c$  نشان دهیم:

$$4(a + b + c) = 68 \Rightarrow a + b + c = 17$$

$$ab = 18 \Rightarrow a = 2, b = 9$$

$$\text{یا } a = 3, b = 6$$

مقدار  $a = 18$  و  $b = 1$  قابل قبول نیست چون جمع  $a + b + c$  از ۱۷ بزرگتر می‌شود. طبق مقادیر  $a$  و  $b$  مقدار  $c$  می‌تواند ۶ یا ۸ باشد.

$$2 \times 9 \times 6 = 108$$

$$\text{حجم‌های ممکن: } 3 \times 6 \times 8 = 144$$

۱۴۷. می‌خواهیم از قطعه کاغذی مربعی به ابعاد  $n \times n$ ، مکعبی به ضلع ۲ در بیاوریم. کوچکترین مقدار ممکن برای  $n$  چند است؟

۷ (۴)

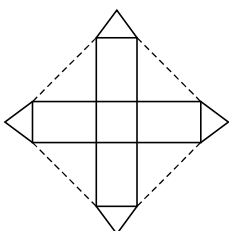
۶ (۳)

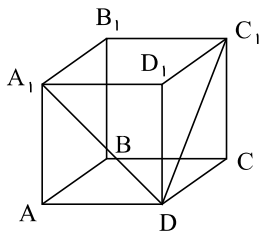
۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

الگوی مکعب را به شکل مقابل در نظر بگیرید. به این ترتیب، مربعی به ضلع  $4\sqrt{2} = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2}$  برای ساختن مکعب کافی است. کوچکترین عدد طبیعی کمتر از  $4\sqrt{2}$  برابر است با ۶.





۱۴۸. زاویه بین دو قطر  $DC_1$  و  $A_1D$  از مکعب  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  چقدر است؟

- ۱)  $60^\circ$   
 ۲)  $80^\circ$   
 ۳)  $45^\circ$   
 ۴)  $75^\circ$

پاسخ: گزینه ۱ توجه کنید که مثلث  $A_1DC_1$  متساوی الاضلاع است.

۱۴۹. علی تعداد زیادی مکعب مستطیل با ابعاد  $1 \times 2 \times 3$  دارد. کمترین تعداد مکعب مستطیل‌هایی که برای ساختن یک مکعب توپر لازم دارد چند تا است؟

- ۱) ۱۲۱۲      ۲) ۱۸      ۳) ۲۴      ۴) ۳۶

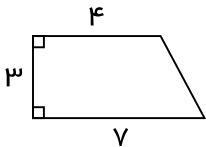
پاسخ: گزینه ۴ ابعاد آن مکعب باید کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۱ و ۲ و ۳ باشد. بنابراین طول این مکعب ۶ و حجم آن ۲۱۶ است. از طرف دیگر حجم مکعب مستطیل  $1 \times 2 \times 3 = 6$  می‌باشد بنابراین تعداد مکعب مستطیل‌های لازم برابر است با:  $216 \div 6 = 36$

۱۵۰. ۱۵۰ هلیا ۵ تا مکعب دارد و ۳ تا چهاروجهی. این حجم‌ها روی هم چند وجه دارند؟

- ۱) ۴۲      ۲) ۴۸      ۳) ۵۰      ۴) ۵۲

پاسخ: گزینه ۱ هر مکعب ۶ وجه و هر چهاروجهی ۴ وجه دارد. این حجم‌ها روی هم  $42 = 3 \times 4 + 5 \times 6$  وجه دارند.

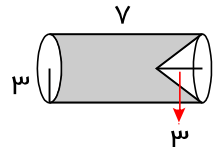
۱۵۱. اگر یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه را با اندازه‌ی اضلاع مشخص شده در شکل زیر، حول قاعده‌ی کوچک‌تر دوران دهیم، حجم شکل حاصل را به دست آورید.



- ۱)  $36\pi$       ۲)  $45\pi$   
 ۳)  $54\pi$       ۴)  $60\pi$

پاسخ: گزینه ۳ شکل حاصل یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۷ است که یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۳ از آن کم شده است.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{استوانه}} &= \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi \\ V_{\text{مخروط}} &= \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3 = 9\pi \end{aligned} \right\}$$

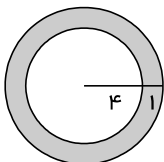


$$\rightarrow V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = 63\pi - 9\pi = 54\pi$$

۱۵۲. یک ظرف چوبی توخالی به شکل نیم کره داریم که قطر خارجی آن  $10\text{ cm}$  و ضخامت آن  $1\text{ cm}$  است. می‌خواهیم سطح کل این ظرف را رنگ کنیم. اگر برای هر متر مربع، به  $100$  گرم رنگ نیاز باشد، چند گرم رنگ مصرف می‌شود؟ ( $\pi \approx 3$ )

- ۱) ۷,۲۴      ۲) ۲۲,۲۹      ۳) ۷,۴۳      ۴) ۲,۷۳

پاسخ: گزینه ۴ قسمت‌هایی که باید رنگ شوند، شامل سطح یک نیم کره بیرونی به شعاع ۵ سانتی‌متر، سطح یک نیم کره داخلی با شعاع ۴ سانتی‌متر و ضخامت ظرف که شکلی مانند شکل روبرو دارد:



$$\text{مساحت نیم کره‌ی بیرونی} = 2\pi R^2 = 2 \times 3 \times 5^2 = 150\text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت نیم کره‌ی داخلی} = 2\pi R'^2 = 2 \times 3 \times 4^2 = 96\text{ cm}^2$$

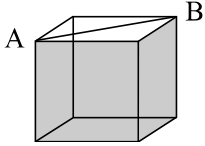
$$\text{مساحت شکل بالایی} = (\pi \times 5^2) - (\pi \times 4^2) = 25\pi - 16\pi = 9\pi = 9 \times 3 = 27\text{ cm}^2$$

$$\text{مساحت کل رنگ شده} = 150 + 96 + 27 = 273\text{ cm}^2 = 0,273\text{ m}^2$$

$$\text{گرم} = 100 \times 0,273 = 27,3$$

که در بین گزینه‌ها موجود نیست.

۱۵۳. یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $3b$  را در راستای پاره خط  $AB$  بریده‌ایم، مساحت کل یکی از قسمت‌های ایجاد شده چقدر است؟



(۲)  $(18\sqrt{2} + 54)b^2$

(۱)  $3\sqrt{2}b^2$

(۴)  $(27 + 9\sqrt{2})b^2$

(۳)  $27b^2$

پاسخ: گزینه ۴ شکل جدید از ۲ وجه مربع به ضلع  $3b$ ، یک وجه مستطیل شکل به طول  $AB$  و عرض  $3b$  و همچنین دو مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائمه  $3b$  تشکیل می‌شود. ابتدا طول  $AB$  را به دست می‌آوریم:

$$(AB)^2 = (3b)^2 + (3b)^2 = 9b^2 + 9b^2 = 18b^2 \rightarrow AB = \sqrt{18b^2}$$

$$\text{مساحت وجه مستطیل} = 3\sqrt{2}b \times 3b = 9\sqrt{2}b^2$$

$$\text{مساحت‌های دو وجه مربعی} = 2 \times 3b \times 3b = 18b^2$$

$$\text{مساحت‌های دو وجه مثلثی} = 2 \times \frac{3b \times 3b}{2} = 9b^2$$

$$\text{مساحت کل شکل} = 9\sqrt{2}b^2 + 18b^2 + 9b^2 = 9\sqrt{2}b^2 + 27b^2 = b^2(9\sqrt{2} + 27)$$

۱۵۴. اندازه‌ی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین  $6\sqrt{2}$  است. اگر این مثلث را حول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن دوران دهیم حجم حاصل از این دوران چقدر است؟

(۴)  $216\pi$

(۳)  $144\pi$

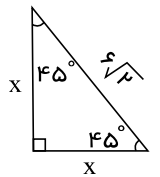
(۲)  $72\pi$

(۱)  $36\pi$

پاسخ: گزینه ۲ در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین دو ساق برابرند و دو زاویه ۴۵ درجه هم دارد.

$$(\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2 = (\text{وتر})^2 \rightarrow x^2 + x^2 = (6\sqrt{2})^2$$

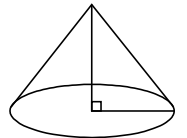
$36 \times 2 = 72$



$$\rightarrow 2x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times \pi \times (6)^2 \times 6$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 216 = \frac{216\pi}{3} = 72\pi$$



۱۵۵. یک لوزی با قطرهای ۶ و ۴ را حول قطر بزرگش دوران می‌دهیم. حجم حاصل از این دوران برابر است با:

(۴)  $12\pi$

(۳)  $16\pi$

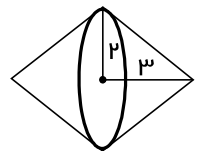
(۲)  $4\pi$

(۱)  $8\pi$

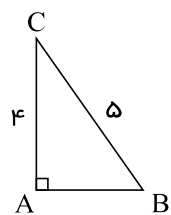
پاسخ: گزینه ۱ دو مخروط یکسان با شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۳ تشکیل می‌شود.

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 2^2 \times 3}{3} = 4\pi$$

$$\rightarrow \text{هر دو مخروط } V = 2 \times 4\pi = 8\pi$$



۱۵۶. شکل زیر را یک بار حول ضلع  $AB$  و بار دیگر حول ضلع  $AC$  دوران می‌دهیم. اختلاف حجم دو مخروط حاصل کدام است؟



(۲)  $6\pi$

(۱)  $4\pi$

(۴)  $8\pi$

(۳)  $2\pi$

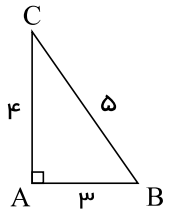
پاسخ: گزینه ۱

$$AB^2 = 5^2 - 4^2 \rightarrow AB^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow AB = \sqrt{9} = 3$$

دوران حول ضلع  $AB$  یعنی ارتفاع  $3\text{cm}$  و شعاع  $4\text{cm}$  می‌باشد.

ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده  $= \frac{1}{3}$  حجم

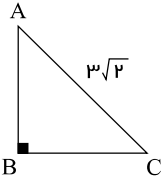
$$V_1 = \frac{1}{3} \times (\pi \times 4^2) \times 3 = \frac{1}{3} \pi \times 16 \times 3 = 16\pi$$



دوران حول ضلع AC یعنی ارتفاع 4cm و شعاع 3cm می‌باشد.

$$V_2 = \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 4 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = \frac{36\pi}{3} = 12\pi$$

$$V_1 - V_2 = 16\pi - 12\pi = 4\pi$$



۱۵۷. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل برابر کدام گزینه است؟

۱۲π (۲)

۹π (۱)

۲۷π (۴)

۱۸π (۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \xrightarrow{AB=BC} (AC)^2 = 2(AB)^2$$

$$\rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 2(AB)^2 \rightarrow 9 \times 2 = 2(AB)^2 \rightarrow AB = \sqrt{9} = 3$$

$$AB = BC = 3\text{cm}$$

از دوران حول AB نیز مخروط به شعاع و قاعده‌ی ۳ به وجود می‌آید.

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 3}{3} = 9\pi$$

۱۵۸. مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگتر دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

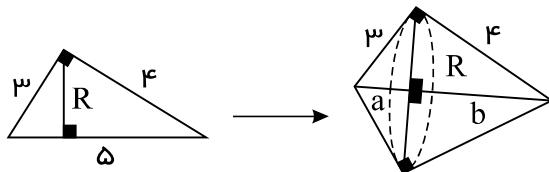
۱۲π (۴)

۱۰π (۳)

$\frac{48\pi}{5}$  (۲)

$\frac{26\pi}{5}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲ مثلث گفته شده قائم‌الزاویه است، چرا که  $5^2 = 4^2 + 3^2$ . حال این مثلث را حول وتر دوران می‌دهیم. دو مخروط قائم به شعاع R و ارتفاع‌های a و b تشکیل می‌شود.



$$\text{مثلث } S = \frac{3 \times 4}{2} = 6 = \frac{R \times 5}{2} \rightarrow R = \frac{12}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مخروط سمت چپ } V &= \frac{1}{3} \pi R^2 a \\ \text{مخروط سمت راست } V &= \frac{1}{3} \pi R^2 b \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{کل } V = \frac{1}{3} \pi R^2 a + \frac{1}{3} \pi R^2 b$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 (a + b) = \frac{5}{3} \pi R^2 = \frac{5}{3} \pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{1}{3} \pi \times \frac{144}{5} = \frac{48\pi}{5}$$

۱۵۹. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  $\sqrt{5}$  سانتی‌متر است. این مثلث را حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟

۳۷۵π (۴)

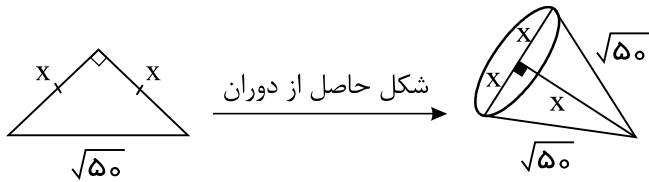
۲۲۵π (۳)

$\frac{375\pi}{3}$  (۲)

$\frac{125\pi}{3}$  (۱)



پاسخ: گزینه ۱



$$\rightarrow x^2 + x^2 = (\sqrt{50})^2 \Rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

در نتیجه شعاع قاعده‌ی مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۵ سانتی متر است. پس حجم مخروط برابر است با:

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 5 = \frac{125}{3}\pi$$

۱۶۰. صفحه‌ی کاغذی به شکل مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۲ cm و ۳ cm را حول ضلع ۳ cm به اندازه‌ی ۱۸۰° دوران می‌دهیم. حجم شکل به وجود آمده چقدر است؟

$\pi$  (۴)

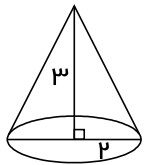
$6\pi$  (۳)

$4\pi$  (۲)

$2\pi$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون صفحه‌ی کاغذ به اندازه‌ی ۱۸۰° دوران یافته است، بنابراین حجم به دست آمده، نصف حجم مخروط است.

$$\text{شکل } V = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6} \times \pi \times (2)^2 \times 3 = \frac{12}{6}\pi = 2\pi \text{ cm}^3$$



۱۶۱. حجم حاصل از دوران ربع دایره‌ای به شعاع ۲ cm حول شعاع خود، برابر با کدام گزینه است؟

$\frac{20\pi}{3}$  (۴)

$\frac{16\pi}{3}$  (۳)

$\frac{8\pi}{3}$  (۲)

$\frac{32\pi}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳

کره  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V \text{ نیم کره} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 2 \times 2 \times 2}{2} = \frac{16\pi}{3}$$

۱۶۲. مستطیلی به طول  $a$  و عرض  $b$  را یکبار حول طول و بار دیگر حول عرض آن دوران می‌دهیم. حجم شکل اول چند برابر حجم شکل دوم است؟

$\frac{1}{b}$  (۴)

$\frac{1}{a}$  (۳)

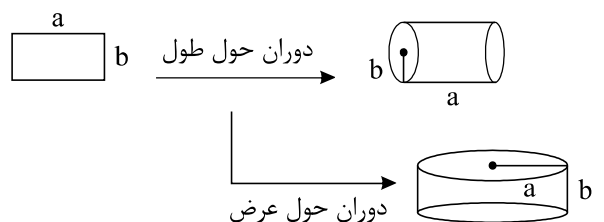
$\frac{b}{a}$  (۲)

$\frac{a}{b}$  (۱)

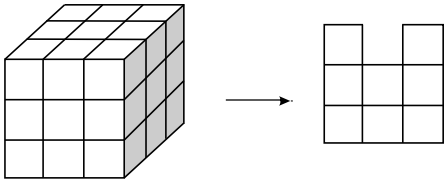
پاسخ: گزینه ۲

استوانه  $V = \pi b^2 a$

$$\text{استوانه } V = \pi a^2 b \rightarrow \frac{\pi \cancel{a^2} \cancel{b}}{\pi \cancel{a} \cancel{b}} = \frac{b}{a}$$



۱۶۳. مکعب زیر از ۲۷ مکعب کوچک و مساوی به ضلع ۱ سانتی متر تشکیل شده است. پنج مکعب از آن طوری برداشتیم که وقتی از روبرو و از راست به آن نگاه می‌کنیم، شکل سمت راست دیده می‌شود. اندازه‌ی سطح شکل باقی‌مانده چند سانتی متر مربع است؟



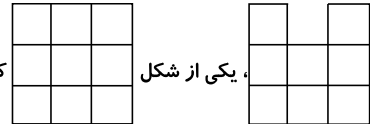
۶۲ (۴)

۴۹ (۳)

۵۸ (۲)

۵۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ اندازه‌ی ضلع مربع کوچک برابر یک سانتی متر است. با برداشتن ۵ مکعب سطح‌هایی که به وجود می‌آیند به شکل زیر هستند.



۴ تا از شکل ، یکی از شکل که در کف قرار دارد. همچنین ۱۷ تا سطح به صورت □ خواهیم داشت. در مجموع کل سطح شکل جدید برابر است با:

$$(4 \times 8) + (1 \times 9) + (17 \times 1) = 32 + 9 + 17 = 58$$

۱۶۴. ارتفاع یک مخروط دو برابر شعاع قاعده آن و حجم آن با حجم یک نیم کره برابر است. نسبت شعاع نیم کره به شعاع قاعده مخروط چه قدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

حجم مخروط = حجم نیم کره

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h, \quad h = 2R$$

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 (2R) \Rightarrow \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 \Rightarrow r = R$$

۱۶۵. در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی  $48\pi$  محاط شده است. بیش‌ترین حجم این استوانه چه قدر است؟

$144\pi$  (۴)

$108\pi$  (۳)

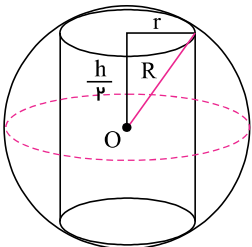
$98\pi$  (۲)

$96\pi$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h = 48\pi \Rightarrow r h = 24 \\ r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r h = 24 \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{12}{r} \Rightarrow \frac{h^2}{4} = \frac{144}{r^2} \\ r^2 + \frac{h^2}{4} = 25 \Rightarrow r^2 + \frac{144}{r^2} = 25 \end{cases} \Rightarrow (r^2)^2 - 25r^2 + 144 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 9 \Rightarrow h = 8 \Rightarrow V = \pi r^2 h = 72\pi \\ r^2 = 16 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow V = \pi r^2 h = 96\pi \end{cases}$$



۱۶۶. کره‌ای از تمام رأس‌های یک مکعب مستطیل به ابعاد  $5, 2, 6$  و  $5$  گذشته است، سطح این کره چند برابر  $\pi$  است؟

۱۳۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

۸۱ (۲)

۶۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ قطر اصلی مکعب مستطیل مفروض نقش قطر کره را ایفا می‌کند و می‌توان چنین نوشت:

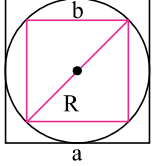
$$2R \Rightarrow \sqrt{20 + 36 + 25} = 2R \Rightarrow R = \frac{9}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 81\pi$$

۱۶۷. کره‌ای در داخل مکعبی محاط و بر مکعب دیگری محیطی است. اگر سطح کره  $S_p$  و سطح مکعب‌ها  $S_1$  و  $S_3$  باشد، حاصل کسر  $\frac{S_1 + S_3}{2S_p}$  چه قدر است؟

- ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴

پاسخ: گزینه ۳ یادآوری: هرگاه مکعبی در کره‌ای محاط باشد، قطر مکعب برابر قطر کره است.

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 6a^2 = 6(2R)^2 = 24R^2 \\ S_p &= 4b^2 \\ b\sqrt{3} &= 2R \\ S_p &= 4\pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_p = 6\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 = 8R^2 \Rightarrow \frac{S_1 + S_p}{2S_p} = \frac{32R^2}{16\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$$



۱۶۸. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟

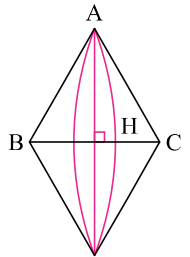
- ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴

پاسخ: گزینه ۲ هرگاه مثلث  $ABC$  را حول ضلع  $BC$  دوران دهیم،  $A$  روی دایره‌ای به مرکز  $H$  و شعاع  $AH$  و در صفحه‌ای عمود بر  $BC$  حرکت می‌کند. بنابراین شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که در قاعده مشترک هستند. بال هر مخروط ضلع مثلث و شعاع قاعده آن ارتفاع مثلث و ارتفاع آن  $(BH)$  نصف ضلع مثلث است.

می‌دانیم حجم مخروط برابر است با  $\frac{1}{3}$  مساحت قاعده ضربدر ارتفاع آن پس:

یادآوری: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع نظیر هر ضلع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  طول ضلع مثلث است.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{کل}} &= 2 \times \frac{1}{3} (\pi (AH)^2) CH \\ AH &= \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2\sqrt{3} \\ CH &= \frac{1}{2} a = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 16\pi$$



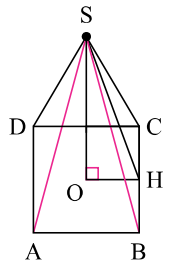
۱۶۹. در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعده  $2\sqrt{3}$  واحد، زاویه صفحه هر وجه با صفحه قاعده آن برابر  $60^\circ$  است. حجم هرم چه قدر است؟

- ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴

پاسخ: گزینه ۳ چون هرم منتظم است. محور هرم از مرکز قاعده آن می‌گذرد.

(زاویه  $H$ ، زاویه مسطحه فرجه با قاعده هرم است.)

$$\begin{aligned} OH &= \frac{1}{2} AB = \sqrt{3}, \hat{H} = 60^\circ \\ S = 30^\circ \Rightarrow SH &= 2OH = 2\sqrt{3} \\ SO^2 &= SH^2 - OH^2 = 12 - 3 = 9 \Rightarrow SO = 3 \end{aligned}$$



$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} (2\sqrt{3})^2 \times 3 = 12$$

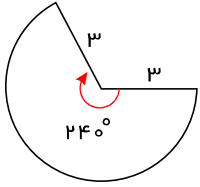
۱۷۰. شعاع قاعده یک جعبه استوانه‌ای شکل  $8\text{cm}$  و ارتفاع آن  $3\text{cm}$  است. چند سانتی‌متر به شعاع یا به ارتفاع اضافه کنیم، تا حجم استوانه، در هر دو حالت به یک اندازه افزایش یابد؟

- ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱  ۲  ۳  ۴

پاسخ: گزینه ۲ مقدار افزایش ارتفاع و یا شعاع قاعده را  $x$  می‌گیریم بنابراین داریم:

$$(\lambda + x)^2 \pi \times 3 = \lambda^2 \pi (3 + x) \Rightarrow (64 + 16x + x^2) 3\pi = 64\pi (3 + x) \Rightarrow 3x^2 + 48x = 64x \Rightarrow 3x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x(3x - 16) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3} \end{cases}$$



۱۷۱. از یک دایره کاغذی به شعاع ۳cm، قطاع مقابل را بریده و با آن مخروط می‌سازیم، حجم این مخروط کدام است؟

۲)  $\frac{4\sqrt{5}}{3}\pi$

۱)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}\pi$

۴)  $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$

۳)  $2\sqrt{5}\pi$

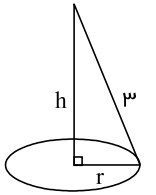
پاسخ: گزینه ۲

$$\text{محیط قاعده مخروط} = \frac{24^\circ}{360^\circ} (2 \times 3 \times \pi) = 4\pi$$

$$2r\pi = 4\pi \Rightarrow r = 2$$

$$h^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow h^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}\pi}{3}$$



پس:

۱۷۲. یک مخروط دوار (قائم) را با یک صفحه که بر وسط ارتفاع مخروط عمود است، به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. نسبت حجم مخروط کوچک بالا به حجم مخروط ناقص برابر است با:

۴)  $\frac{1}{8}$

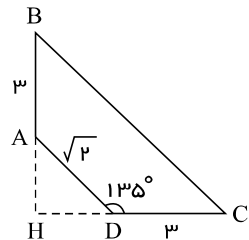
۳)  $\frac{1}{7}$

۲)  $\frac{1}{4}$

۱)  $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ مخروط توسط یک صفحه به موازات صفحه قاعده قطع شده است پس در مخروط متشابه داریم نسبت حجم مخروط حاصل به مخروط اولیه برابر است با مکعب نسبت تشابه که همان مکعب نسبت ارتفاعها می‌باشد. پس اگر  $V'$  حجم مخروط حاصل و  $V$  حجم مخروط اولیه باشد داریم:

$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V'}{V - V'} = \frac{1}{8 - 1} \Rightarrow \frac{V'}{V - V'} = \frac{1}{7}$$



۱۷۳. شکل زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل چقدر است؟

۲)  $21\pi$

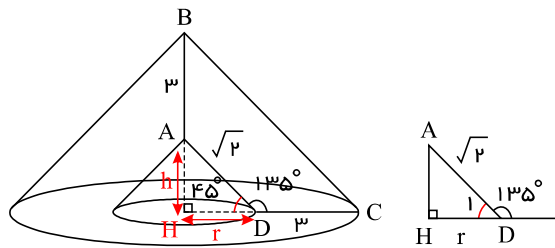
۱)  $63\pi$

۴)  $\frac{63\pi}{4}$

۳)  $\frac{64\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ شکل ایجاد شده به صورت زیر است. اگر شعاع قاعده مخروط کوچک را  $r$  بگیریم با توجه به این که:

$$\hat{D}_1 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$



پس  $\hat{A} = 45^\circ$  و مثلث  $AHD$  قائم الزاویه و متساوی الساقین است. ضلع مقابل به زاویه  $45^\circ$  در مثلث قائم الزاویه  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  برابر وتر است. پس:

$$h = r = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$$

با در نظر گرفتن  $R$  و  $h_1$  به عنوان شعاع قاعده و ارتفاع مخروط بزرگ و  $h_p$  به عنوان ارتفاع مخروط کوچک داریم:

$$R = 1 + 3 = 4 \text{ حاصل } V = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 h_p \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 4\right) - \left(\frac{1}{3} \times \pi \times 1 \times 1\right) = \frac{64}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi$$

$$= \frac{63}{3} \pi = 21\pi$$

۱۷۴. نیم دایره‌ای به قطر  $20\text{ cm}$  را حول قطرش به اندازه  $60^\circ$  دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل کدام است؟

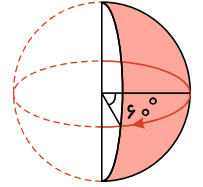
۱۵۰π (۴)

$\frac{1500}{4} \pi$  (۳)

$\frac{2000}{9} \pi$  (۲)

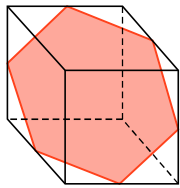
۱۰۰π (۱)

پاسخ: گزینه ۲ شکل حجم ایجاد شده یک قاچ کروی می‌باشد:



$$R = \frac{20}{2} = 10$$

$$V = \frac{\alpha}{360} \times (\text{حجم کره}) = \frac{60}{360} \times \left( \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \right) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{3} \times \frac{1000}{1} \times \pi = \frac{2000}{9} \pi$$



۱۷۵. مساحت شش ضلعی رنگی  $48\sqrt{3}$  و رأس‌های شش ضلعی سایه خورده وسط یال‌های مکعب هستند. حجم مکعب کدام است؟

۵۱۲ (۲)

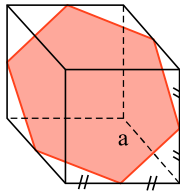
۵۰۰ (۱)

۴۹۲ (۴)

۴۸۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

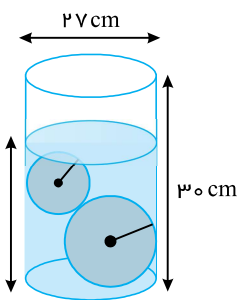
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 48\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 192 \Rightarrow a = 12$$



$$x \text{ نصف ضلع مکعب} = x \Rightarrow x^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow 2x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$$

$$\text{ضلع مکعب} = 2 \times 6\sqrt{2} = 12, V = 12^3 = 1728$$

۱۷۶. استوانه‌ای که دارای قطر  $27\text{ cm}$  و ارتفاع  $30\text{ cm}$  است، شامل دو کره با شعاع  $6\text{ cm}$  و  $9\text{ cm}$  است. کره بزرگ‌تر در کف استوانه قرار دارد. (طبق شکل) آب درون استوانه ریخته می‌شود به گونه‌ای که فقط دو کره را بپوشاند. حجم آب لازم برابر با کدام گزینه است؟



$3672\pi$  (۱)

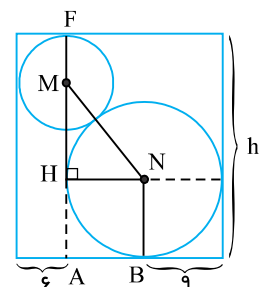
$3660\pi$  (۲)

$3375\pi$  (۳)

$3114\pi$  (۴)

پاسخ: گزینه ۴ شعاع قاعده استوانه  $\frac{27}{2}$  و ارتفاع آب را  $h$  فرض می‌کنیم:

برای محاسبه  $h$  از جلو تصویر را می‌بینیم:



$$R_1 = 6, R_2 = 9, h = ?$$

$$AB = 27 - (6 + 9) = 12, MN = 6 + 9 = 15$$

$$MH^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow MH = 9$$

$$h = MF + MH + NB = 6 + 9 + 9 = 24$$

حجم دو کره و آب روی هم برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع  $\frac{۲۷}{۲}$  و ارتفاع ۲۴: حجم آب  $V_W =$

$$\frac{۴}{۳}\pi \times ۶^۳ + \frac{۴}{۳}\pi \times ۹^۳ + V_W = \pi \times \left(\frac{۲۷}{۲}\right)^۲ \times ۲۴$$

$$۲۸۸\pi + ۹۷۲\pi + V_W = ۴۳۷۴\pi$$

$$\Rightarrow V_W = ۴۳۷۴\pi - ۱۲۶۰\pi \Rightarrow V_W = ۳۱۱۴\pi$$

۱۷۷. اگر بخواهیم با تراشیدن اطراف یک زیگورات به ارتفاع ۳ آجر خشتی، یک هرم مصری با بیش‌ترین مساحت قاعده ممکن بسازیم، ارتفاع آن هرم حداکثر برابر چند آجر خشتی می‌شود؟

۵ × (۵ -  $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ) (۴)

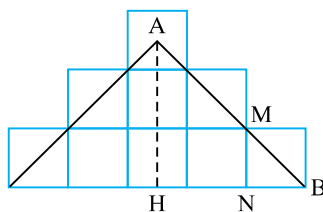
۳ (۳)

۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو:



باید ارتفاع  $AH$  را به دست آوریم. واضح است مثلث  $AHB$  با  $MNB$  متشابه است و هر دو متساوی‌الساقین هستند، پس:  $AH = HB = ۲٫۵$  (برخلاف ظاهر سؤال حل آن خیلی ساده بود! شاید هم من خیلی قشنگ برایتان حل کردم و ساده شد!)

۱۷۸. برای محاسبه ارتفاع یک زیگورات، تعداد آجرهای اطراف قاعده آن را شمرده‌ایم، که ۸۰ عدد بود. ارتفاع این زیگورات چند آجر خشتی است؟

چنین زیگوراتی نداریم. (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

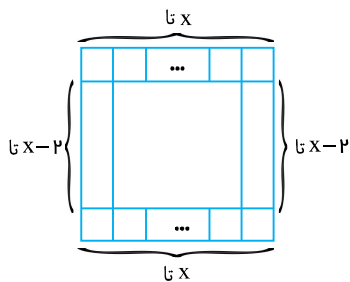
۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ تعداد آجرهای قاعده:

$$x + x + x - ۲ + x - ۲ = ۴x - ۴ = ۸۰ \Rightarrow ۴x = ۸۴ \Rightarrow x = ۲۱$$

پس قاعده  $۲۱ \times ۲۱$  است. حالا باید دید ۲۱ چندمین عدد فرد است؟

$$۲n - ۱ = ۲۱ \Rightarrow n = ۱۱ \Rightarrow \text{ارتفاع ۱۱ است.}$$



۱۷۹. در شکل مقابل، حجم حادث از دوران سطح هاشور زده حول محور  $OX$  کدام است؟

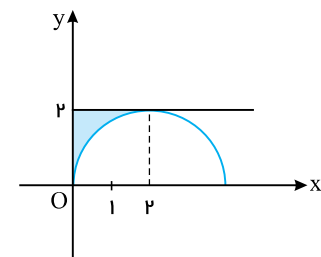
$۲\pi$  (۱)

$\frac{۴\pi}{۳}$  (۲)

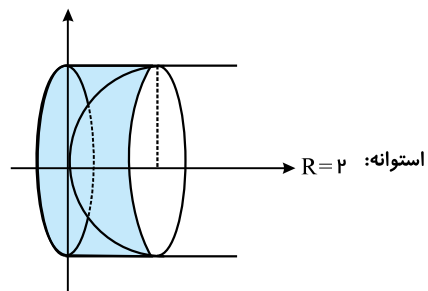
$\frac{۸\pi}{۳}$  (۳)

$۳\pi$  (۴)

پاسخ: گزینه ۳ یک استوانه منهای یک نیم‌کره است:



$$h = ۲, R = ۲$$



نیم کره:

$$V = V_2 - V_1 = \pi R^2 h - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$= \pi \times 4 \times 2 - \frac{2}{3} \pi \times 8$$

$$= 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

۱۸۰. صفحه‌ای به فاصله ۳cm از مرکز کره‌ای به شعاع ۵، کره را قطع می‌کند. مساحت قاعده شکل جدا شده از کره چند برابر عدد  $\pi$  است؟

۲۵ (۴)

۱۶ (۳)

۹ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$r^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

$$S = \pi r^2 = 16\pi$$

۱۸۱. مساحت کل مکعبی که داخل کره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر محاط شده باشد، چقدر است؟

$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

۳ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ در این صورت قطر مکعب با قطر کره برابر است پس:

$$a\sqrt{3} = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad S = 6a^2 = 6 \times \frac{4}{3} = 8$$