

# فصل چهارم

## تجسم فضایی

خط، نقطه و صفحه

تفکر تجسمی

- هریک از عبارت‌های زیر را تعریف کنید.

- الف) دو خط متنافر  
ب) سطح مقطع  
ج) فصل مشترک

الف) دو خط متنافر: دو خط در فضا که نقطه‌ی اشتراکی نداشته و هیچ صفحه‌ای هم وجود نداشته باشد که شامل هر دو باشد را دو خط متنافر می‌گویند.

- ب) سطح مقطع: شکلی را که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع گویند.  
ج) فصل مشترک: خط راستی که اشتراک دو صفحه‌ی متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

- جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

- ۱) در صفحه، دو خط موازی با یک خط .....  
۲) اگر دو صفحه با هم نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند نسبت به هم ..... هستند.

۱) با هم موازی‌اند  
۲) موازی

- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

- ۱) دو صفحه عمود بر هم هستند هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.  
درست  نادرست

- ۲) مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  برابر است با  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ . درست  نادرست

۱) درست  
۲) نادرست

- دو صفحه عمود بر هم را تعریف کنید.

دو صفحه عمود بر هم هستند هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.

- جاهای خالی را پر کنید.

- ۱- اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم ..... هستند.  
۲- اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم ..... هستند.  
۳- خط و صفحه در فضا نسبت به هم ..... یا ..... هستند یا خط بر صفحه ..... است.

۱- موازی

۲- متقاطع

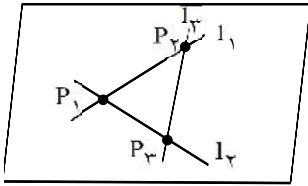
۳- متقاطع - موازی - واقع

- ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه‌ی موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

فرض کنیم که صفحه‌های  $P$  و  $P'$  موازی‌اند و  $l$  با  $P$  موازی است.

فرض خلف: صفحه‌ی  $P'$  با خط  $l$  موازی نیست، بنابراین خط  $l$ ، صفحه‌ی  $P'$  را قطع می‌کند، چون «اگر خطی یکی از صفحات موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند»، خط  $l$  صفحه‌ی  $P$  را نیز باید قطع کند که خلاف فرض اولیه است. پس  $l$ ،  $P'$  را قطع نکرده و با آن موازی است.

- سه خط  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  دو به دو متقاطع هستند ولی هم‌رس نیستند. ثابت کنید که این سه خط در یک صفحه قرار دارند.



چون ۳ خط دو به دو متقاطع هستند، فرض می‌کنیم که  $P_1$  و  $P_2$  و  $P_3$  نقاط برخورد باشند. از طرفی این ۳ نقطه متمایز هستند و بر یک خط واقع نمی‌شوند. هم‌چنین که از ۳ نقطه متمایز یک صفحه عبور می‌کند و از هر خط دو نقطه‌اش روی این صفحه واقع است، بنابراین هر سه روی این صفحه قرار دارند.

- از نقطه‌ی  $A$  خارج خط  $l$ ، یک صفحه‌ی عمود بر  $l$  می‌گذرانیم. ثابت کنید این صفحه یکتا است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم که از نقطه‌ی  $A$  دو صفحه‌ی  $P$  و  $P'$  وجود دارد که بر  $l$  عمود است.  $P$  بر  $l$  عمود است، تمام خطوط که از محل تلاقی  $P$  و  $l$  می‌گذرد نیز بر  $e$  عمود است و فقط یک خط در  $P$  وجود دارد که از  $A$  عبور کرده و بر  $l$  عمود می‌شود که آن را  $l_1$  می‌نامیم. از عمود بودن  $P'$  بر  $l$  نیز می‌توان نتیجه گرفت که خط دومی، مانند  $l_1$  وجود دارد که از  $A$  عبور کرده و بر  $l$  عمود است.

یعنی دو خط  $l_1$  و  $l_2$  از نقطه‌ی  $A$  عبور کرده و بر  $l$  عمود شده‌اند که این متناقض است با این که «از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان بر آن رسم کرد». پس  $P$  و  $P'$  یکی و بر هم منطبق‌اند.

- گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) اگر دو صفحه فقط در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم ..... هستند.

(۱) متقاطع (۲) منطبق

ب) از یک خط در فضا، ..... صفحه می‌گذرد.

(۱) بی‌شمار (۲) یک

الف) گزینه‌ی ۱ ب) گزینه‌ی ۱

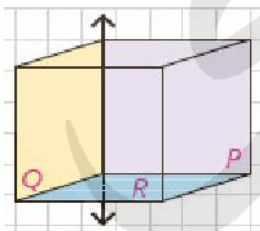
- از هر خط غیرواحد بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

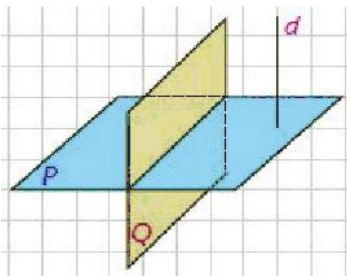
الف) بی‌شمار صفحه می‌توان رسم کرد.

ب) یک صفحه می‌توان رسم کرد.



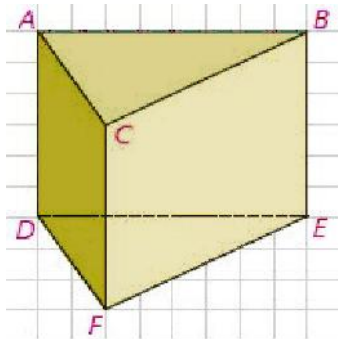
- دو صفحه‌ی متقاطع  $P$  و  $Q$  بر صفحه‌ی  $R$  عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه‌ی  $R$  چه وضعیتی دارد؟

فصل مشترک این دو صفحه، خط  $d$  است که بر صفحه‌ی  $R$  است.



۲ - دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟

خط d با صفحه Q موازی است.



۳ - منشور سه پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط هم‌مرس نام ببرید.

ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید.

الف)  $AB, DE / CF, BE / DF, AC$

ب)  $BE, AC / AB, EF / DE, CB$

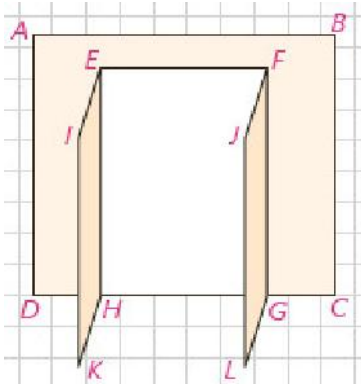
ج)  $EF, DE / BE, BC / BC, AC$

د)  $BE, DE, FE$

ه)  $BC, DEF / FE, ABC / BE, ACFD$

و)  $DEF, ABC$

ز)  $BCEF, ABED, ADFC$



۴ - تصور کنید دو لنگه‌ی در هر کدام  $90^\circ$  باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.  
الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه‌ی EIKH

ج) خط JL و صفحه‌ی EIKH

د) خطوط FJ و EI

ه) خطوط FJ و HK

الف) EIKH و ABCD: متقاطع (عمود)

EIKH و FHIJ: موازی

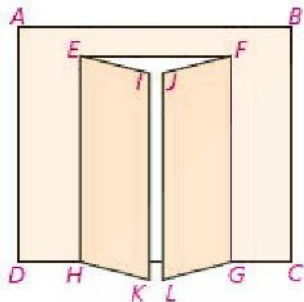
FGLI و ABCD: متقاطع (عمود)

ب) موازی

ج) موازی

د) موازی

ه) موازی



۵ - تجسم کنید دو لنگه‌ی در هر کدام  $30^\circ$  باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.  
الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه‌ی EIKH

ج) خط JL و صفحه‌ی EIKH

د) خط EH نسبت به هر یک از صفحات

ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ز) خطوط FJ و BC

الف) EIKH و ABCD: متقاطع

JFGL و ABCD: متقاطع

EIKH و JFGL: متقاطع (چون صفحه امتدادپذیر است).

ب) متقاطع

ج) موازی

د) EH و EIKH: منطبق

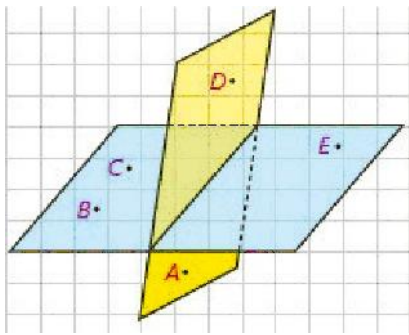
EX و ABCD: منطبق، با توجه به تصویر فصل مشترک دو صفحه‌ی ABCD و EIKH است.

EH و JFHL: موازی

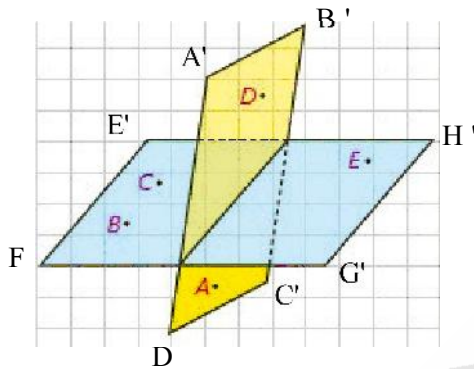
ه) متقاطع

و) متنافر

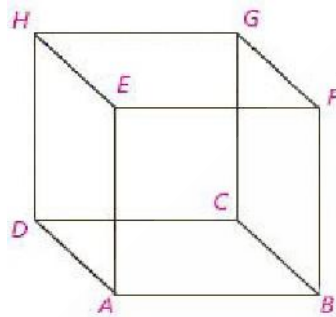
ت) متنافر



- ۶ - با توجه به شکل به سوالات پاسخ دهید:
- الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.
- ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.
- ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.
- د) دو خط  $AB$  و  $CE$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟  $AC$  و  $CE$  چطور؟



- الف) ۲ صفحه‌ی متقاطع  $A'B'C'D'$  و  $E'F'G'H'$
- ب)  $B, C, E$
- ج)  $B, E, A, D$
- د) متنافر - متقاطع، در نقطه‌ی  $C$  هم‌دیگر را قطع می‌کنند.



- ۷ - به این مکعب دقت کنید:
- الف) خط‌های  $DA$  و  $GF$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟
- $DC$  و  $HG$  چطور؟
- $GC$  و  $EF$  چطور؟
- ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟
- با چند خط موازی است؟
- با چند خط متنافر است؟
- ج)  $HD$  با کدام صفحه موازی است؟
- با کدام متقاطع است؟
- بر کدام واقع است؟
- د) دو صفحه‌ی موازی و دو صفحه‌ی متقاطع نام ببرید.

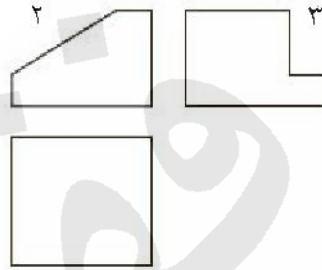
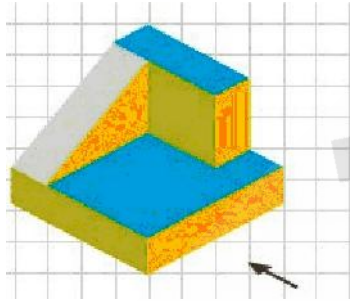
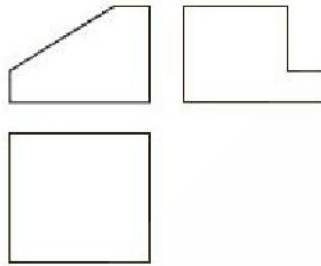
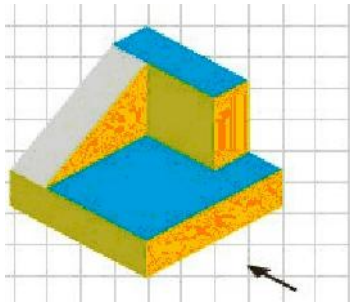
- الف) موازی - موازی - متنافر
- ب) ۴ خط - ۳ خط - ۴ خط
- ج)  $HGCD$  و  $HEAD$  -  $HGFE$  و  $BCDA$  -  $EFBA$  و  $GFBC$
- د) صفحه‌ی موازی:  $EFBA$  و  $HGCD$
- صفحه‌ی متقاطع:  $GCDH, HGFE$

- جاهای خالی را پر کنید.

- ۱- اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم ..... هستند.
- ۲- اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم ..... هستند.
- ۳- دو صفحه در فضا نسبت به هم ..... یا ..... هستند.

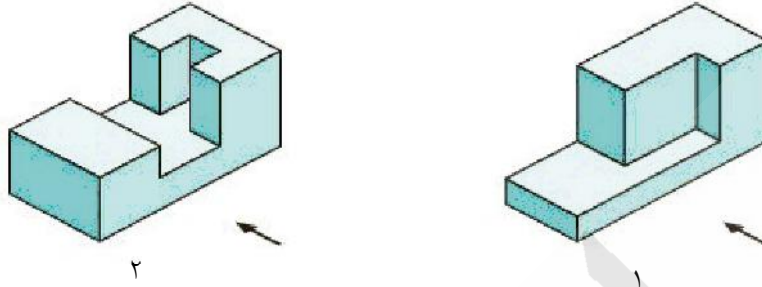
- ۱- موازی
- ۲- متقاطع
- ۳- متقاطع یا موازی

- شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

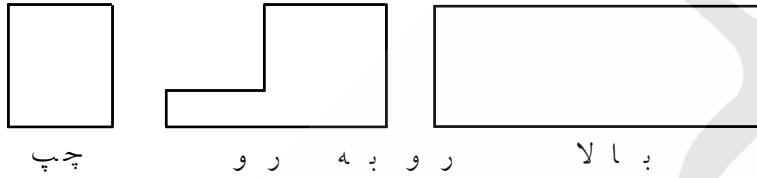


- نمای بالا ← (۱)  
 نمای روبه‌رو ← (۲)  
 نمای چپ ← (۳)

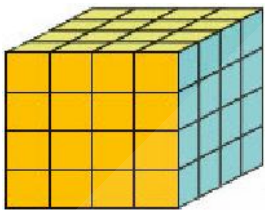
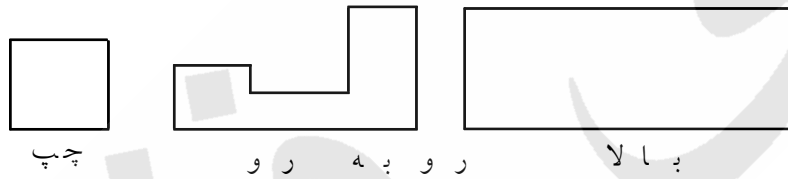
- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.



شکل ۱



شکل ۲



- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.
- الف) چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟
- ب) چند مکعب، رنگ نشده است؟
- ج) چند مکعب، رنگ شده است؟
- د) چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟
- ه) چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟

الف)  $16 \times 4 = 64$

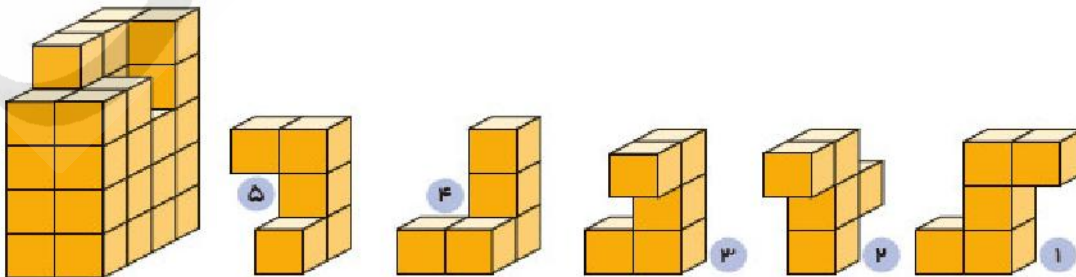
ب) ۸

ج)  $64 - 8 = 56$

د)  $16 + 8 = 24$

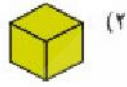
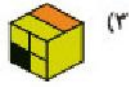
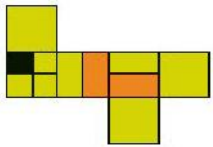
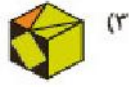
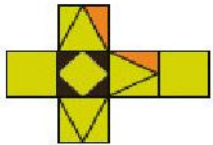
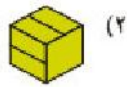
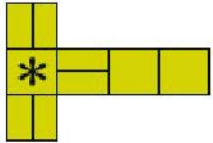
ه) ۸ مکعب‌های واقع در گوشه

- کدام قطعه، شکل سمت چپ را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟

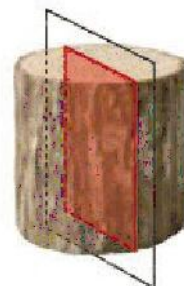
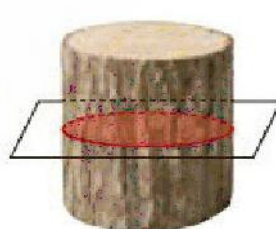
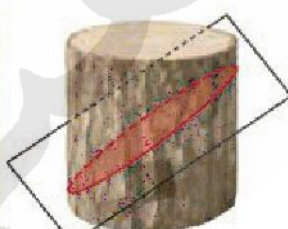
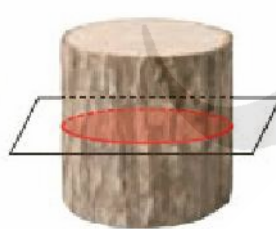
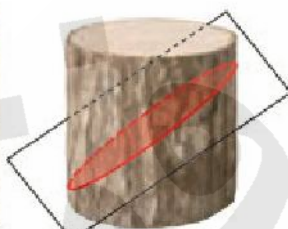




۳ - در هر شکل، مکعب گسترده‌ی سمت چپ مربوط به کدام یک از مکعب‌های سمت راست است؟



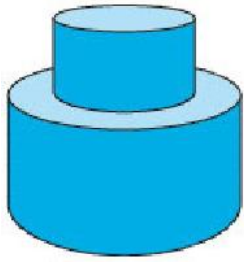
۴ - سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحه‌ی مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد به چه شکل است؟



دایره

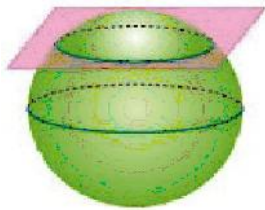
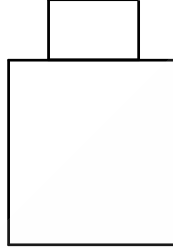
بیضی

مستطیل



۵ - دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

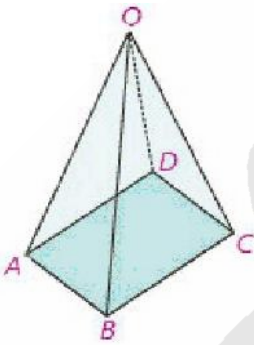
دو مستطیل که روی قرار گرفته‌اند تقریباً به این صورت است.



۶ - الف) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟  
ب) در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

الف) ؟

ب) سطح مقطع به صورت دایره است و زمانی بیشترین مساحت را خواهد داشت که صفحه از مرکز عبور کند.



۷ - قاعده‌ی هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ی P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

الف) صفحه‌ی P بر ارتفاع هرم عمود باشد.

ب) صفحه‌ی P از O بگذرد و بر قاعده‌ی هرم عمود باشد.

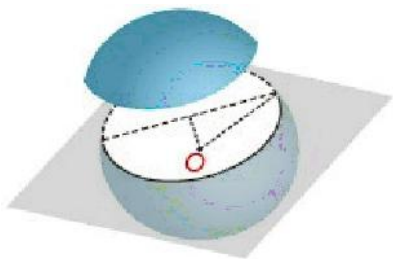
ج) صفحه‌ی P از O نگذرد ولی بر قاعده‌ی هرم عمود باشد.

الف) مربع

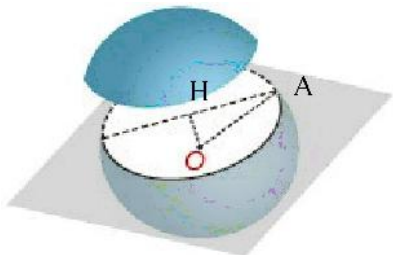
ب) مثلث

ج) ذوزنقه

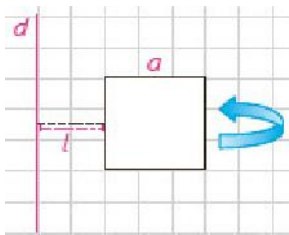
- ۸ - صفحه‌ی P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چه قدر است؟



با توجه به شکل می‌توان با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورت شعاع سطح مقطع (کره) را حساب کرد.

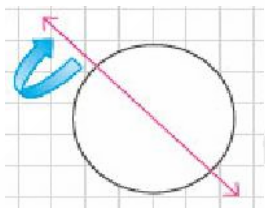


- ۹ - مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



شکلی شبیه به لاستیک ماشین

- ۱۰ - دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم، شکل حاصل چیست؟



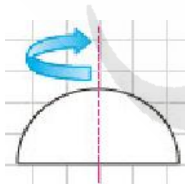
کره

- ۱ - یک نیم‌دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟

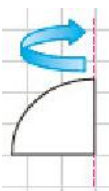


کره

- ۲ - یک نیم‌دایره را حول شعاع عمود بر قطر شده دوران می‌دهیم. چه شکلی ساخته می‌شود؟



نیم‌کره



۳ - اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

نیم کره

۴ - دو خط موازی در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم چه جسم هندسی ساخته می شود؟



استوانه‌ی توخالی که از هر دو طرف باز است.



۵ - اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم چه جسم هندسی حاصل می شود؟

استوانه



۶ - اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

استوانه

۷ - گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) از دوران دایره حول قطرش ..... به دست می آید.

۱) کره

۲) بیضی

ب) در تفکر تجسمی از ..... برای تفکر استفاده می کنیم.

۱) عبارت و جملات زبانی

۲) تصاویر

الف) گزینه‌ی ۱ (کره)

ب) گزینه‌ی ۲ (تصاویر)

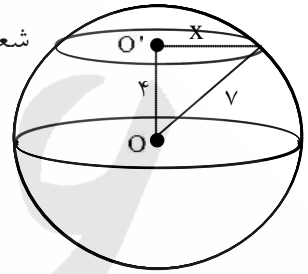
۸ - سطح مقطع یک شکل را تعریف کنید.

شکی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود سطح مقطع آن نامیده می شود.

۹ - مساحت شکل حاصل از برخورد صفحه P با کره به شعاع ۷ سانتی‌متر را به دست آورید. (فاصله صفحه تا مرکز کره ۴ سانتی‌متر است.)

شکل سطح مقطع، دایره است که شعاع آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$7^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 49 - 16 \Rightarrow x^2 = 33 \Rightarrow x = \sqrt{33}$$



۱۰ - مستطیلی داریم به طول a و عرض b. حجم حاصل از دوران حول طول و عرض آنرا به دست آورید. نسبت حجم‌ها را محاسبه کنید.

دوران حول a



$$U_1 = a(\pi b^2)$$

استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعده b

دوران حول b



$$U_2 = b(\pi a^2)$$

استوانه به ارتفاع b و شعاع قاعده‌ی a

نسبت: 
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{ab^2\pi}{ba^2\pi} = \frac{b}{a}$$

- در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت قطع حاصل، چند برابر، مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

$$(1) \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2) \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (3) \frac{3}{2} \quad (4) \sqrt{2}$$

کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= ریاضی

- خط  $d$  و صفحه‌ی  $P$  و نقطه‌ی  $A$  در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه‌ی  $A$ ، موازی صفحه‌ی  $P$  و متقاطع با خط  $d$ ، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟

$$(1) \text{الزاماً عمود} \quad (2) \text{منطبق} \quad (3) \text{موازی} \quad (4) \text{متقاطع}$$

کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= ریاضی

- در یک مکعب، صفحه‌ی گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آنرا به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{3} \quad (3) \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (4) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

سراسری <= ریاضی <= ۹۸

- نقطه‌ی  $A$  و خط  $d$  و صفحه‌ی  $P$  مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطه‌ی  $A$ ، موازی خط  $d$  و عمود بر صفحه  $P$ ، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟

$$(1) d \cap p = d \quad (2) d \cap p \neq \emptyset \quad (3) d \parallel p \quad (4) d \perp p$$

سراسری <= ریاضی <= ۹۸

- چهار نقطه‌ی  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  در فضا مفروض است به طوری که امتدادهای  $AB$  و  $CD$  متناظرند. تصاویر این نقاط بر صفحه‌ی عمود بر خطی که از وسط  $AC$  و وسط  $BD$  بگذرد، رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

$$(1) \text{متوازی الاضلاع} \quad (2) \text{لوزی} \quad (3) \text{دوزنقه} \quad (4) \text{غیر مشخص}$$

کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= ریاضی

- در یک هرم منتظم با قاعده‌ی مربع، ارتفاع هرم ۴ و ارتفاع مثلث جانبی آن  $2\sqrt{7}$  واحد است. حجم این هرم، چند واحد مکعب است؟

$$(1) 36 \quad (2) 48 \quad (3) 54 \quad (4) 64$$

کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= ریاضی

- قاعده‌ی منشور قائم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن  $7/5$  واحد است. حجم بزرگ‌ترین استوانه که در داخل این منشور جای گیرد، چند برابر  $\pi$  است؟

$$(1) 75 \quad (2) 84 \quad (3) 90 \quad (4) 105$$

کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= تجربی

- در داخل یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۴ و ارتفاع ۶ واحد، بزرگ‌ترین منشور قائم با قاعده مربع، جای گرفته است. حجم این منشور، کدام است؟

$$(1) 174 \quad (2) 186 \quad (3) 192 \quad (4) 198$$

سراسری <= تجربی <= ۹۷

مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) در صفحه  $P$  است. نقطه  $M$  خارج صفحه  $P$  است، به طوری که  $MA \perp AB$  و  $MB = MC$ ، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- (۱)  $MB \perp BC$  (۲)  $MA \perp AC$  (۳)  $MA \perp P$  (۴)  $MA \perp BNC$

سراسری < = ریاضی < = ۹۷

در یک چهاروجهی منتظم، هر وجه آن مثلث متساوی الاضلاع است. طول هر یال آن  $2\sqrt{6}$  واحد است. ارتفاع این هرم، کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۳ (۴) ۴

سراسری < = ریاضی < = ۹۷

در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که تا سه ضلع مثلث فاصله‌ای مساوی داشته باشد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمایشی سنجش < = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۸-۹۹

یک مخروط دوار را با صفحه‌ای موازی قاعده آن طوری قطع می‌دهیم که حجم دو قسمت جدا شده برابر هم باشند. فاصله صفحه قاطع تا صفحه قاعده چند برابر ارتفاع آن است؟

- (۱)  $\frac{2 - \sqrt{4}}{2}$  (۲)  $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{2 - \sqrt{2}}{3}$  (۴)  $\frac{-1 + \sqrt{4}}{3}$

آزمایشی سنجش < = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷-۹۸

نقطه  $M$  از تمام رأس‌های یک مکعب به طول یال ۱۲ واحد، به یک فاصله است. این فاصله کدام است؟

- (۱)  $7/5$  (۲) ۹ (۳)  $6\sqrt{3}$  (۴)  $8\sqrt{3}$

آزمایشی سنجش < = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷-۹۸

حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم  $4/5$  و  $6$  واحد حول و ترش، چند واحد مکعب است؟

- (۱)  $28/8\pi$  (۲)  $32/4\pi$  (۳)  $31/5\pi$  (۴)  $34/2\pi$

آزمایشی سنجش < = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷-۹۸

تصویر قائم و تصویر جانبی جسمی داده شده است. حجم آن کدام است؟



- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵

آزمایشی سنجش < = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷-۹۸

در یک منشور سه پهلو، چند یال متمایز متناظر با یکی از اضلاع سه ضلعی آن وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمایشی سنجش < = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۷ - حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  واحد حول ارتفاع خود کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{\pi}{6}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$

آزمایشی سنجش <= یازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

۸ - حجم یک چهارضلعی منتظم به طول یال ۲ کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (۳) (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

آزمایشی سنجش <= یازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

۹ - نقطه A در صفحه P است. مکان هندسی نقاطی که از صفحه P به فاصله ۴ واحد و از نقطه A به فاصله ۵ واحد باشند، کدام است؟

- (۱) یک خط موازی صفحه (۲) دو خط موازی (۳) دو دایره (۴) یک دایره
- آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

۱۰ - یک صفحه و یک استوانه از نظر مجموعه نقاط مشترک آنها، چه حالتی اتفاق نمی افتد؟

- (۱) بیضی (۲) دایره (۳) مستطیل (۴) ذوزنقه
- آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

۱۱ - دو خط d و l در نقطه A با زاویه  $\alpha$  متقاطع هستند و خط d حول خط l دوران می کند. سطح فضایی حاصل را با صفحه‌ای عمود بر l با فاصله ۴ واحد از نقطه A قطع می دهیم. محیط مقطع حاصل کدام است؟

- (۱)  $4\pi \sin \alpha$  (۲)  $4\pi \cos \alpha$  (۳)  $8\pi \tan \alpha$  (۴)  $4\pi \tan \alpha$
- آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

۱۲ - خط d غیر متقاطع با دو صفحه متقاطع P و Q و نقطه B بر روی فصل مشترک آنها است صفحه گذرا بر (d, B) با دو صفحه مفروض چگونه اند؟

- (۱) در یک خط مشترک (۲) در یک نقطه مشترک (۳) نقطه مشترک ندارند (۴) بستگی به وضعیت d دارد
- آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

۱۳ - نمای بالا و نمای روبه‌رو از شکلی به صورت زیر است.

حجم این شکل فضایی چند برابر  $\pi$  است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۴۵

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸ - ۹۷

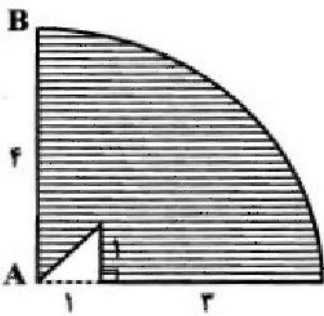


۱۴ - کدام عبارت نادرست است؟

- (۱) دو صفحه عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.  
 (۲) دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.  
 (۳) دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.  
 (۴) اگر صفحه‌ای بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۷ - ۹۶



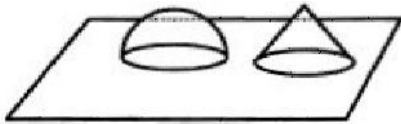


اگر شکل روبه‌رو را حول شعاع AB دوران دهیم، حجم شکل حاصل، کدام است؟

- (۱)  $39\pi$
- (۲)  $40\pi$
- (۳)  $42\pi$
- (۴)  $45\pi$

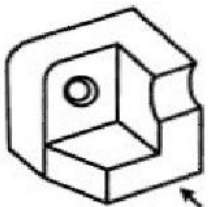
آزمایشی سنجش < = دهم < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۷

در شکل زیر، قاعده‌های یک نیم‌کره و یک مخروط با شعاع‌های مساوی روی صفحه P قرار دارند. اگر صفحه‌ای که از رأس مخروط به موازات صفحه P رسم می‌شود بر نیم‌کره مماس باشد. آن‌گاه نسبت حجم نیم‌کره به حجم مخروط، کدام است؟

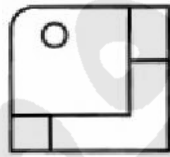


- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳)  $\frac{3}{2}$
- (۴)  $\frac{9}{4}$

آزمایشی سنجش < = دهم < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۷



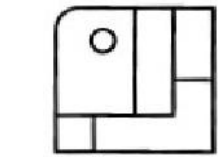
رو به رو



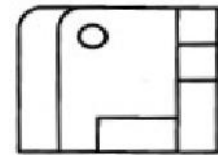
(۲)



(۴)



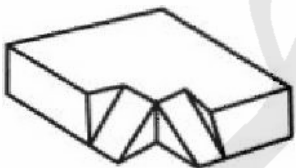
(۱)



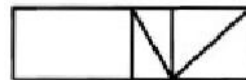
(۳)

نمای روبه‌روی شکل مقابل، کدام است؟

آزمایشی سنجش < = دهم < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۷



چپ



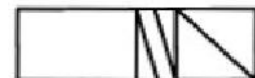
(۲)



(۴)



(۱)



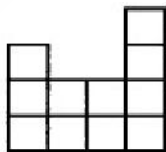
(۳)

نمای چپ شکل روبه‌رو، کدام است؟

آزمایشی سنجش < = دهم < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۷



نمای سمت چپ

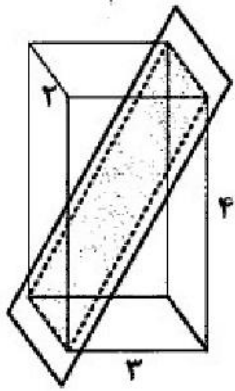


نمای روبه‌رو

نمای روبه‌رو و سمت چپ یک حجم فضایی داده شده است. اگر اندازه ضلع هر مربع کوچک یک واحد باشد شکل فضایی کدام است؟

- (۱) ۴۰
- (۲) ۴۲
- (۳) ۵۵
- (۴) ۴۶

آزمایشی سنجش < = یازدهم < = سال تحصیلی ۹۷ - ۹۸



- مساحت مقطع حاصل از برش شکل مقابل کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲)  $2\sqrt{29}$

(۳) ۲۹

(۴) ۲۰

آزمایشی سنجش <= یازدهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

- صفحه‌ای به فاصله ۴ واحد از مرکز کره‌ای به شعاع ۸ واحد، کره را برش می‌دهد. مساحت قسمت کوچکتر کره به همراه سطح مشترک صفحه و کره چقدر است؟

(۴)  $\frac{300\pi}{3}$

(۳)  $\frac{272\pi}{3}$

(۲)  $\frac{256\pi}{3}$

(۱)  $\frac{400\pi}{3}$

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

- در یک مکعب، زاویه صفحه قطری با یک وجه آن که در یال مکعب مشترک نباشند، چند درجه است؟

(۴) ۳۰

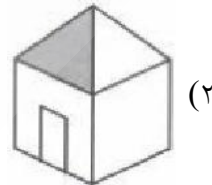
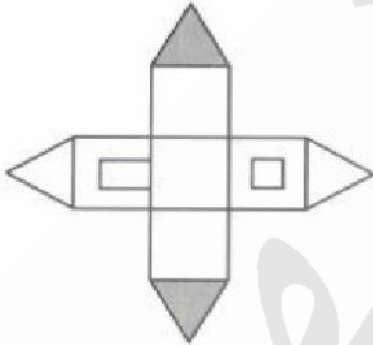
(۳) ۴۵

(۲) ۶۰

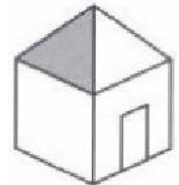
(۱) ۹۰

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

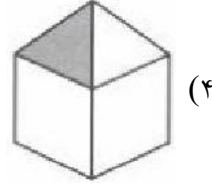
- در شکل زیر، گسترده رسم شده، مربوط به کدام شکل است؟



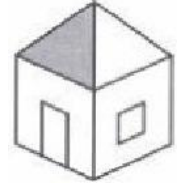
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۶-۹۵

- دو خط  $d$  و  $d'$  یک‌دیگر را در نقطه‌ی  $O$  قطع می‌کنند. اگر خط  $d$  از نقطه‌ی  $O$  نگذرد، چند نقطه روی  $d$  وجود دارد که از  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشد؟

(۴) ۱ یا ۰

(۳) ۱ یا بیشمار

(۲) ۲ یا بیشمار

(۱) ۱ یا ۲

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۶-۹۵

-  $L_1$  و  $L_2$  دو خط متقاطع و عمود بر هم هستند. اگر  $P_1$  صفحه‌ای شامل  $L_1$  و  $P_2$  صفحه‌ای شامل  $L_2$  باشد، وضعیت دو صفحه  $P_1$  و  $P_2$  نسبت به هم چگونه نمی‌تواند باشد؟

(۴) عمود بر هم

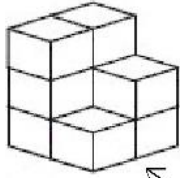
(۳) متقاطع

(۲) منطبق

(۱) موازی و غیر منطبق

آزمونهای گزینیه ۲ <= دهم <= سال تحصیلی ۹۶-۹۵

- ۶ -  $D$  و  $D'$  دو خط موازی با صفحه  $P$  هستند. در این صورت .....  
 (۱)  $D$  و  $D'$  موازی اند.  
 (۲)  $D$  و  $D'$  متقاطع نباشند، موازی اند.  
 (۳)  $D$  و  $D'$  لزوماً متنافر یا متقاطع اند.  
 (۴)  $D$  و  $D'$  می توانند موازی، متقاطع یا متنافر باشند.  
 آزمونهای گزینه ۲ = ریاضی < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵



نمای روبه رو

- ۷ - نمای چپ شکل مقابل کدام است؟



- آزمونهای گزینه ۲ = دهم < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۷

- ۸ - یک مثلث قائم الزاویه را که کوچکترین زاویه آن  $\alpha$  است، یک بار حول ضلع متوسط و یک بار حول کوچکترین ضلع، دوران می دهیم. نسبت حجمهای دو شکل حاصل کدام است؟  
 (۱)  $\tan \alpha$  (۲)  $\sin \alpha$  (۳)  $\cos \alpha$  (۴)  $\sin \alpha \cos \alpha$   
 آزمونهای گزینه ۲ = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷ - ۹۸

- ۹ - دو خط در فضا با هم متنافر هستند. کدام گزینه درست است؟

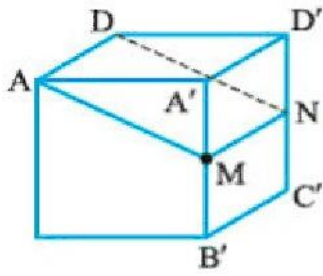
- (۱) هر صفحه‌ای مانند  $P$  که با  $d_1$  موازی است، با  $d_2$  متقاطع است.  
 (۲) هر صفحه‌ای مانند  $P$  که شامل  $d_1$  باشد، با  $d_2$  متقاطع است.  
 (۳) فقط یک صفحه مانند  $P$  وجود دارد که شامل  $d_1$  بوده و با  $d_2$  موازی است.  
 (۴) هر صفحه‌ای مانند  $P$  که با  $d_1$  متقاطع باشد، با  $d_2$  نیز متقاطع است.

- آزمونهای گزینه ۲ = دوازدهم < = سال تحصیلی ۹۷ - ۹۸

- ۱۰ - در فضا از سه خط دوجه دو متقاطع، چند صفحه می گذرد؟

- (۱) دقیقاً ۱ (۲) ۲ (۳) حداکثر ۱ (۴) بی شمار

- آزمونهای گزینه ۲ = دهم < = سال تحصیلی ۹۶ - ۹۷

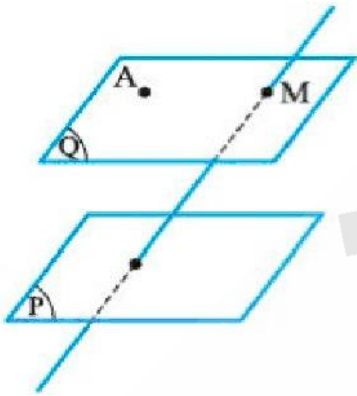


- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفحه‌ای که از یال  $AD$  و از وسط یال  $A'B'$  (یعنی نقطه  $M$ ) بگذرد از وسط یال  $C'D'$  (یعنی نقطه  $N$ ) نیز می‌گذرد و مستطیل  $AMND$  سطح مقطع آن صفحه با مکعب است. اگر طول یال مکعب  $a$  باشد، آن‌گاه  $DD' = a$  و  $D'N = \frac{a}{2}$  است و در مثل قائم‌الزاویه  $DD'N$  داریم:

$$DN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DN = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

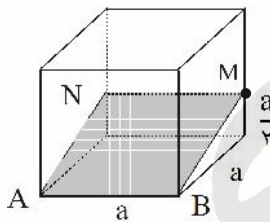
$$S_{\text{مقطع}} = S_{AMND} = AD \cdot DD' = a \times \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2} \text{ پس:}$$

مساحت هر وجه مکعب  $a^2$  است، پس مساحت مقطع  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  برابر آن است.



- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تمام خطهایی که از  $A$  می‌گذرند و موازی با صفحه  $P$  هستند روی صفحه‌ای قرار دارند که شامل نقطه  $A$  است و با صفحه  $P$  موازی می‌باشد. (صفحه  $Q$ )  
 اگر خط  $d$  موازی با  $P$  باشد ولی روی  $Q$  نباشد هر خطی که نقطه  $A$  را به یک نقطه از  $d$  وصل کند،  $P$  را قطع می‌کند. در این صورت مسأله جواب ندارد.  
 اگر روی  $d$  نقطه  $Q$  باشد، آن‌گاه هر خطی که نقطه  $A$  را به یک نقطه از  $d$  وصل کند جواب مسأله است و مسأله بی‌نهایت جواب دارد.  
 اما اگر  $d$ ، صفحه  $P$  را قطع کند،  $Q$  را نیز در  $M$  قطع می‌کند و  $AM$  تنها جواب مسأله است. یعنی اگر خط  $d$  صفحه  $P$  را قطع کند، آن‌گاه فقط یک خط وجود دارد که از  $A$  می‌گذرد،  $d$  را قطع می‌کند و با صفحه  $P$  موازی است.

- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مکعب مقابل صفحه‌ی گذرا بر یال  $AB$  و نقطه‌ی  $M$  وسط یال دیگر مکعب رسم شده است. اگر طول ضلع مکعب  $a$  باشد آن‌گاه داریم:



$$\text{حجم منشور (قسمت کوچکتر)} = Sh = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

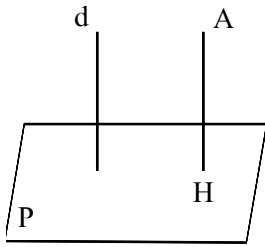
$$\text{حجم منشور} - \text{حجم مکعب} = \text{حجم قسمت بزرگتر} = a^3 - \frac{a^3}{4} = \frac{3a^3}{4}$$

$$\frac{\text{حجم قسمت کوچکتر}}{\text{حجم قسمت بزرگتر}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^3}{4}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در صورتی که خط  $d$  بر صفحه  $P$  عمود باشد آن گاه از  $A$  فقط یک خط عمود بر  $P$  مثل  $AH$  می توان رسم کرد. به طوری که  $AH$  موازی خط  $d$  است. (زیرا  $AH$  و  $d$  هر دو بر صفحه  $P$  عمودند) حال هر صفحه گذرا از  $AH$  هم بر  $P$  عمود است و هم موازی  $d$  است پس در این حالت تعداد صفحات رسم شده بی شمار است.

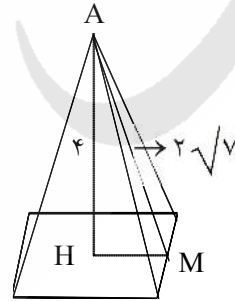


- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جایی که خط واصل صفحه را قطع می کند، محل برخورد قطرهای چهارضلعی  $A'B'C'D'$  است. این نقطه از طرفی وسط  $A'C'$  است زیرا تصویر نقطه وسط  $AC$  است. از طرفی وسط  $B'D'$  است باز به همان دلیل. بنابراین قطرهای این چهارضلعی یک دیگر را نصف کرده اند لذا چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

چهارضلعی می تواند لوزی نباشد. کافی است دو پاره خطی که با هم زاویه  $60^\circ$  درست می کنند در نظر بگیرید. یکی از آنها را در جهت عمود بر صفحه دو خط ۱ واحد بالا ببرید. این یکی را  $AC$  و دیگری را  $BD$  بنامید. تصویری که سؤال می خواهد، برای این  $BD$  و  $AC$  یک متوازی الاضلاع است که زاویه بین دو قطر آن  $60^\circ$  است. پس لوزی نیست.

- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ارتفاع هرم و ارتفاع مثلث کناری یک مثلث قائم الزاویه ایجاد می کنند.

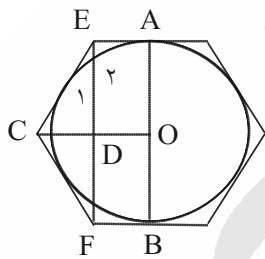
$$HM = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - 4^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



$$\text{حجم هرم} : \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} (16 \times 3) \times 4 = 64$$

- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ ترین دایره ای که داخل ۶ ضلعی قرار می گیرد بر همه اضلاع آن مماس است.

$120^\circ = \text{هر زاویه} \Rightarrow 720 = \text{مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی}$



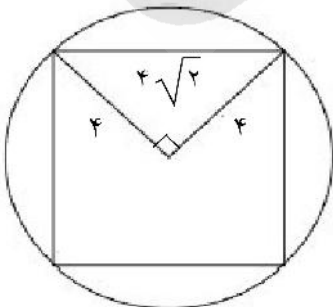
$$E_1 = 120 - 90 = 30 \Rightarrow ED = \frac{\cos 120}{4} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow EF = 4\sqrt{3} \xrightarrow{EF = AB} AB = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$V = \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 7/5 = 90$$

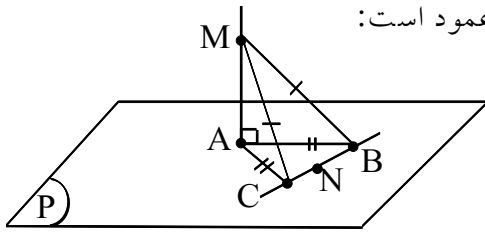
- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S_{\text{مربع}} = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

$$\text{حجم منشور} = 32 \times 6 = 192$$

- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



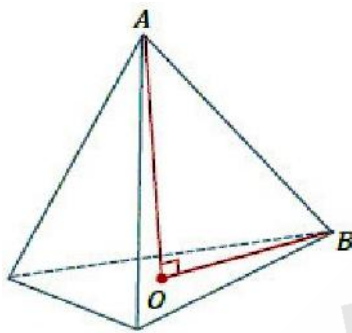
نکته: اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد، بر کل صفحه عمود است:

$$MA \perp AB, MA \perp AC \rightarrow MA \perp P$$

نکته: زمانی که یک خط بر صفحه‌ای عمود باشد، بر همه‌ی خطوط آن صفحه هم عمود می‌شود، لذا:

$$MA \perp AN$$

بنابراین تنها گزینه‌ی نادرست این سؤال عبارت  $MB \perp BC$  خواهد بود. زیرا در مثلث متساوی‌الساقین  $MBC$  زاویه‌ی مجاور قاعده نمی‌تواند  $90^\circ$  باشند.

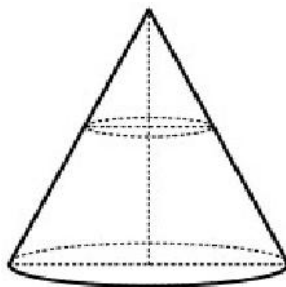


- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهاروجهی منتظم، یک هرم منتظم است. لذا ارتفاعی که از رأس A خارج می‌شود بر مرکز قاعده فرود می‌آید. قاعده هم مثلث متساوی‌الاضلاع است، لذا مرکز آن محل برخورد میانه‌ها و ارتفاع‌ها و نیمسازها است. بنابراین اولاً مثلث  $AOB$  به دلیل رسم ارتفاع  $AO$  قائم‌الزاویه است، ثانیاً  $OB$  برابر است با  $\frac{2}{3}$  طول یال هرم. (میانه‌های به نسبت ۱ و ۲ هم‌دیگر را قطع می‌کنند.)

$$AB = a, OB = \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{3}{4}} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

۱ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک نقطه محل برخورد سه نیمساز داخلی و سه نقطه از محل برخورد هر نیمساز داخلی یک رأس با دو نیمساز خارجی رأس‌های دیگر، در کل ۴ نقطه وجود دارد.

۲ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع مخروط  $h$  و فاصله دو صفحه  $x$  باشد.



$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2}$$

۳ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
 نقطه M در وسط قطر مکعب است قطر مکعب  $12\sqrt{3}$  می باشد پس فاصله از رأسها برابر است با  $6\sqrt{3}$

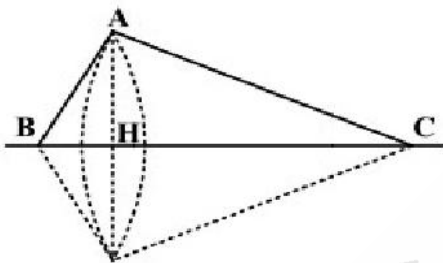
۴ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 جسم دوار حاصل دو مخروط به شعاع قاعده AH و ارتفاعهای CH و BH است.

$$BC^2 = (6)^2 + (4/5)^2 \Rightarrow BC = 7/5$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{6 \times 4/5}{7/5} = 3/6$$

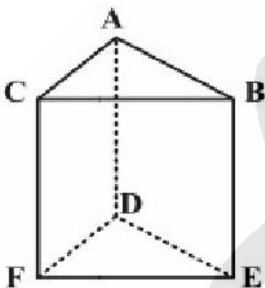
$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = 2/5 \pi AH^2$$

$$V = 32/4\pi$$



۵ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۴ واحد یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲ و ۳ و ۳ واحد بریده شده است پس حجم جسم مفروض  $(5 \times 3 \times 4) - (3 \times 3 \times 2) = 42$

۶ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
 خط AB با هر یک از سه خط CF و FD و FE متناظر است پس ۳ خط متمایز موجود است.



۷ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم حاصل دو مخروط به شعاع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  و ارتفاع  $\frac{1}{2}$  است پس داریم.

$$V = 2 \times \frac{1}{3} (\pi) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

۸ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

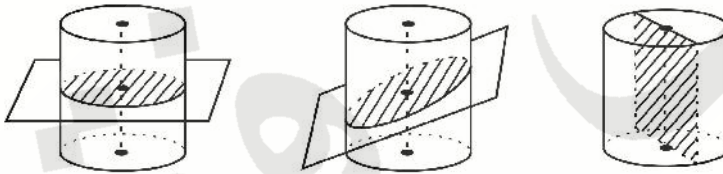
$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right) \times h$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}a}{3}$$

حجم

۹ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی اول دو صفحه موازی که در دو طرف صفحه  $P$  هستند. مکان دوم یک کره به شعاع ۵ واحد است. فصل مشترک آن‌ها دو دایره مساوی و متمایزند.

۰ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی تنها در حالتی است که صفحه قاطع موازی محور باشد. در غیر این صورت بخشی از مقطع منحنی است.

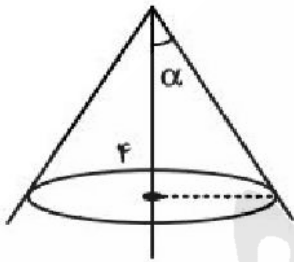


۱ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مقطع حاصل دایره به شعاع  $r$  می‌باشد.  $\frac{r}{4} = \tan \alpha$

پس  $r = 4 \tan \alpha$  در نتیجه محیط دایره

است.



۲ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط  $d$  با هر دو صفحه موازی است پس با فصل مشترک آن‌ها موازی است. صفحه گذرا بر  $(d, B)$  فصل مشترک دو صفحه مفروض می‌گذرد پس سه صفحه در یک خط مشترک‌اند.

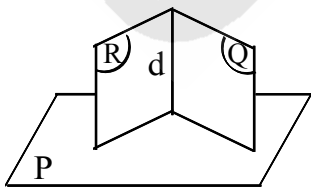
۳ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع ۵ بر روی استوانه دیگری به شعاع ۵ و ارتفاع ۴ قرار دارد حجم شکل فضایی برابر مجموع حجم‌های دو استوانه است.

$$V = \pi(9 \times 5) + \pi(25 \times 4)$$

پس اندازه حجم ۱۴۵ برابر  $\pi$  است.

۴ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو صفحه عمود بر یک صفحه می‌توانند متقاطع و حتی بر هم عمود باشند.

در حالت متقاطع بودن، فصل مشترک آن‌ها بر صفحه اول عمود است.





۵ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{حجم نیم کره به شعاع } ۴ = \frac{\frac{4}{3}\pi(4)^3}{2} = \frac{128\pi}{3}$$

$$\text{حجم مخروط به شعاع قاعده } ۱ \text{ و ارتفاع } ۱ - \text{ حجم استوانه به ارتفاع } ۱ \text{ و شعاع قاعده } ۱ = \text{ حجم ناحیه برداشته شده}$$

$$= \pi(1)^2 \times 1 - \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{حجم جسم حاصل} = \frac{128\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{126\pi}{3} = 42\pi$$

۶ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

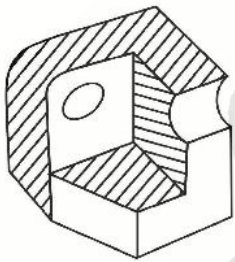
$r =$  شعاع نیم کره،  $h =$  ارتفاع مخروط  
 $h = r \Rightarrow$  شعاع قاعده مخروط = شعاع نیم کره = ارتفاع مخروط

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

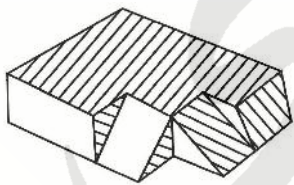
$$\text{حجم نیم کره} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{\text{حجم نیم کره}}{\text{حجم مخروط}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^3} = 2$$

۷ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در نمای روبرو سطح‌هایی که هاشور خورده‌اند دیده نمی‌شوند.

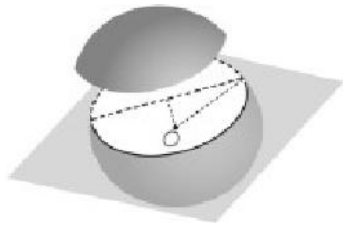


۸ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نمای چپ، سطح‌هایی که هاشور خورده‌اند، دیده نمی‌شوند. دو مستطیل در کنار هم و دو مثلث در کنار هم دیده خواهند شد.



۹ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت مقطع روبه‌رو برابر با ۱۱ است در نتیجه حجم آن برابر است با  $5 \times 11 = 55$

۱۰ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مقطع حاصل یک مستطیل به عرض ۲ و طول  $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$  می‌باشد. پس مساحت  $2 \times 5 = 10$  است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$  نصف وتر است.

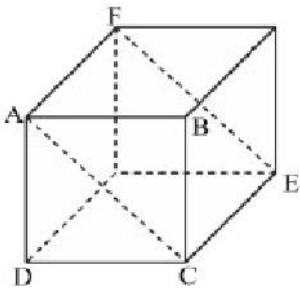
$$\widehat{Q} = 90 - 30 = 60^\circ$$

سطح کل کره برابر  $4\pi r^2$  است، پس سطح قسمت جدا شده از کره برابر:

$$S_1 = \frac{120}{360} \times 4 \times \pi \times 8^2 = \frac{256}{3} \pi$$

سطح مشترک صفحه و کره، دایره‌ای به شعاع  $\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$  است.

$$S_2 = \pi r^2 = 48\pi \Rightarrow S = S_1 + S_2 = \frac{256}{3} \pi + 48\pi = \frac{400}{3} \pi$$



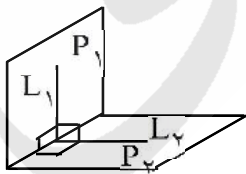
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون  $AF \perp AD$  و  $AF \perp AB$ ، پس زاویه بین صفحه قطر ACEF و وجه ABCD،  $90^\circ$  است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به گسترده داده شده، مربع و مستطیل در دو وجه مقابل قرار دارند. پس گزینه ۳ غلط است. گزینه ۴ هم باید حداقل مربع یا مستطیل دیده شود. پس این گزینه هم غلط است. مستطیل در وجهی قرار دارد که مثلث نزدیک آن سفید است. پس گزینه ۲ هم غلط است.

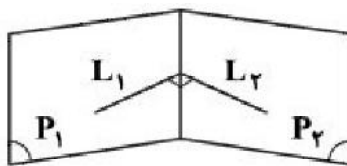
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط می‌باشند و دو نیمساز وجود دارد. از طرفی، خط  $d''$  نیمساز نمی‌باشد، چون از نقطه‌ی O نمی‌گذرد. پس پاسخ، محل برخورد  $d''$  و دو نیمساز می‌باشد:

(آ) اگر  $d''$  با یکی از دو نیمساز موازی باشد، دیگری را در یک نقطه قطع می‌کند.  
 (ب) اگر  $d''$  با هیچ‌یک از نیمسازها موازی نباشد، دو نیمساز را در دو نقطه قطع می‌کند.

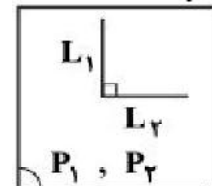
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ ممکن است درست باشد، ولی گزینه ۱ نمی‌تواند در هیچ حالتی درست باشد. (به شکل‌های زیر دقت کنید).  
 دو خط متقاطع‌اند: پس صفحه‌های آنها باید نقطه مشترک داشته باشند.



گزینه ۴

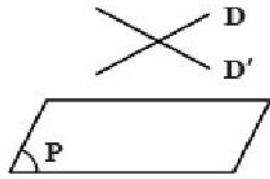


گزینه ۳

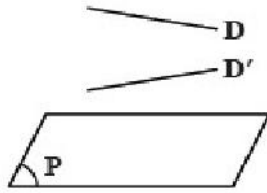


گزینه ۲

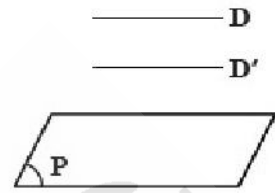
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو خط موازی با یک صفحه، هر وضعیت می‌تواند داشته باشند (مطابق شکل زیر).



متقاطع



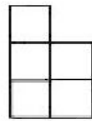
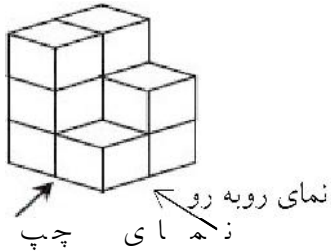
متناظر



موازی

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

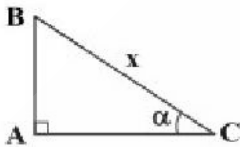
نکته: در تفکر تجسمی، نمایی از جسم را که مورد نیاز است بر یک صفحه تصویر می‌کنیم. آنچه مشاهده می‌شود نمای مورد نظر است. در نمای چپ، یک مربع در بالا و سمت راست نما دیده نمی‌شود. پس گزینه ۳ درست است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

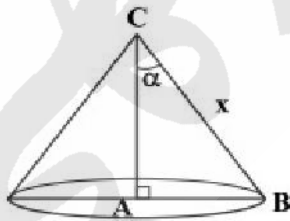
نکته: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی  $r$  و ارتفاع  $h$  برابر با  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  است.

نکته: در شکل مقابل داریم:

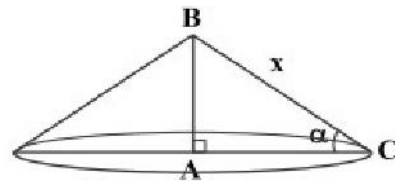


$$\begin{cases} AB = x \sin \alpha \\ AC = x \cos \alpha \end{cases}$$

شکل‌های حاصل از دوران دو مخروط به شکل‌های زیر است:



شکل «۱»

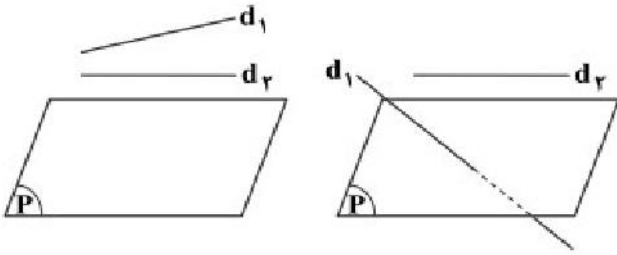


شکل «۲»

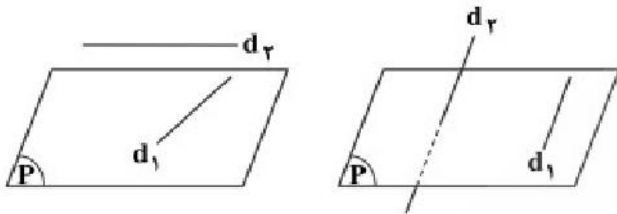
نسبت حجم این دو مخروط برابر است با:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi \times AB^2 \times AC}{\frac{1}{3} \pi \times AC^2 \times AB} = \frac{\frac{1}{3} \pi (x \sin \alpha)^2 (x \cos \alpha)}{\frac{1}{3} \pi (x \cos \alpha)^2 (x \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

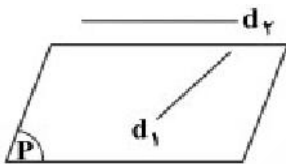
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
 نکته: در مورد دو خط متنافر  $d_1$  و  $d_2$  نکات زیر را داریم:  
 هر صفحه مانند  $P$  که با یکی موازی باشد، با دیگری موازی یا متقاطع است.



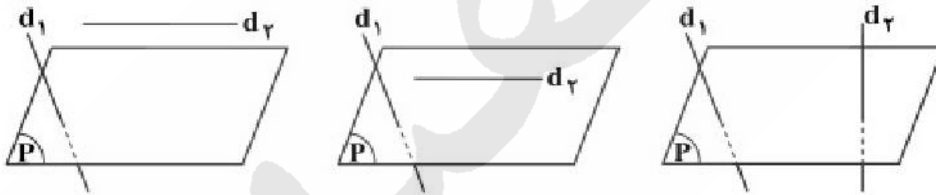
هر صفحه مانند  $P$  که شامل یکی باشد، با دیگری موازی یا متقاطع است.



فقط یک صفحه مانند  $P$  وجود دارد که شامل یکی بوده و با دیگری موازی است.

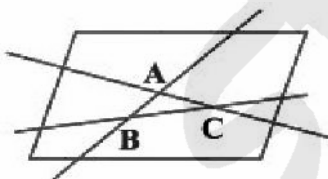


صفحه‌ای که با یکی متقاطع باشد، با دیگری، موازی یا متقاطع با آن است.

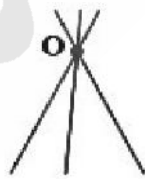


با توجه به نکات بالا، گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر نقطه تقاطع دوبه‌دوی این خطوط متمایز باشد، یک صفحه وجود دارد که از این سه نقطه می‌گذرد و خطوط نیز در این صفحه قرار دارند. (شکل ۱)  
 اگر سه خط در یک نقطه هم‌رس باشند، ممکن است در یک صفحه قرار نگیرند. (شکل ۲)  
 تذکر: از سه نقطه غیرهم‌راستا در فضا، یک و فقط یک صفحه می‌گذرد.



شکل (۱)



شکل (۲)