به نام خدا	جزوه درس: مباحثی در ترکیبیات	پایه: دوازدهم رشته: ریاضی
فصل ۳ ترکیبیات	نام کتاب: ریاضی گسسته صفحات: ۶۱-۵۶	تهیه و تنظیم: اسفند ملیح ملکی

یادآوری:

تعریف جایگشت: هر یک از حالات قرارگرفتن اعضای یک مجموعه کنار هم را یک جایگشت می‌گویند

* تذکر: از جایگشت زمانی استفاده می‌شود که ترتیب مهم باشد

تعداد جایگشت‌های r شی متمایز از n شی متمایز $(n)_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

* نکته: اگر ترتیب قرارگرفتن اعضای یک مجموعه مهم نباشد از ترکیب استفاده می‌شود

تعداد ترکیبات r شی متمایز از n شی متمایز $\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

انواع جایگشت:

۱- جایگشت دایره‌ای:

نکته: n نفر به $(n-1)!$ طریق دور یک میز دایره‌ای شکل می‌نشینند

مثال: ۵ نفر به چند روش دور یک میز دایره‌ای شکل می‌نشینند به طوری که دو نفر مخصوص مقابل هم باشند.

چون هر جایی که از آن دو نفر نشست نفر دوم هم مقابل اوست پس نفر دوم حق انتخاب ندارد مثل آن است که ۴ نفر دور یک میز دایره‌ای شکل می‌نشینند $(4-1)! = 3! = 6$

۲- جایگشت کنار هم

مثال: چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که ارقام زوج کنار هم و ارقام فرد کنار هم قرار گیرند

ارقام زوج را یک بسته و ارقام فرد را یک بسته در نظر می‌گیریم حتماً دو بسته داریم به $2!$ جابجا می‌شوند اما ارقام زوج در داخل بسته به $2!$ روش و ارقام فرد در داخل بسته به $4!$ روش جابجا می‌شوند

$\underbrace{\boxed{1, 3, 5, 7}}_{4!} \quad \underbrace{\boxed{2, 4}}_{2!}$ $\quad 2! \Rightarrow 2! \times 4! \times 2! = 96$

۳- جایگشت یک در میان

مثال: به چند طریق ۳ سیب و ۴ پرتقال کنار هم قرار می‌گیرند $3! \times 4!$

مثال: به چند طریق ۳ سیب و ۳ پرتقال کنار هم قرار می‌گیرند

چون تعداد مساوی است دو حالت پیش می‌آید ممکن است سیب در اول باشد ممکن است پرتقال در اول باشد

$2 \times 3! \times 3!$

به نام خدا	ادامه جزوه درس: مباحثی در ترکیبیات	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی
فصل: ۳ ترکیبیات	نام کتاب:	صفحات ۶۱-۵۶	تهیه و تنظیم: اسفند ملیح ملکی

ص ۲

۴ - جایگشت با تکرار

قضیه: اگر n شیء مفروض باشند به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت های این اشیاء برابر است با

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

مثال: با حروفات کلمه تراکتور چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت. تراکتور از ۷ حرف تشکیل شده در صورت ۷! می نویسیم اما چون حرف ر ۲ بار و حرف ت دو بار تکرار شده به ۲!۲! تقسیم می شود

$$\frac{7!}{2!\times 2!}$$

مثال: با ارقام ۳،۳،۳،۳،۲،۲،۱،۱،۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت

$$\frac{9!}{3!\,2!\,4!}$$

رقم ۳ چهار بار تکرار شده
رقم ۱ سه بار تکرار
رقم ۲ دو بار تکرار

مثال: ضریب a^2bc^3 در بسط $(a+b+c)^6$ چقدر است

در واقع می خواهیم جایگشت تکراری $aabccc$ را پیدا کنیم

$$\frac{6!}{2!\,3!}$$

مثال: ۹ نفر را به چند طریق می توان در ۳ اتاق ۲ نفره ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان داد

روش ۱: $\binom{9}{2}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{4}$

۲ نفر از اتاق ۲ نفره
۳ نفر از ۷ نفر در اتاق ۳ نفره

روش ۲: $\frac{9!}{2!\,3!\,4!}$

مثال: ۶ نفر به چند طریق می توانند در دو تیم ۳ نفره به بازی فوتبال بپردازند

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!}$$

به خاطر تکرار پیروز شده
۳ دو بار تکرار شده

تمرین ۱: ۸ نفر را به چند طریق می توان در یک گروه ۲ نفره و دو گروه ۳ نفره قرار داد

تمرین ۲: ۵ نفر را به چند طریق می توان به ۳ گروه حداقل یک نفره تقسیم کرد

۱۵
۱۰
۲۵
۳۰

مثال: ۷ سکه بهار آزادی را به چند روش می‌توان بین ۳ نفر تقسیم کرد بطوریکه به هریک از آنها لااقل یک سکه برسد

○|○|○|○|○|○|○ تمام حالات

○ ○|○ ○ ○|○ ○ یکی از حالات مطلوب

درواقع از بین ۶ خط به چند روش ۲ خط می‌توان انتخاب کرد.

$$\binom{6}{2}=\binom{7-1}{3-1}$$

★ نکته: تعداد جوابهای طبیعی معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$

$x_i>0$
$x_i\in Z$

مثال: معادله $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب طبیعی دارد

$$\binom{7-1}{3-1}=\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2}=15$$

همان مثال بالاست که ۷ سکه را بین ۳ نفر تقسیم می‌کنیم

★ نکته: تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ عبارتند از $\binom{n+k-1}{k-1}$

$x_i\in Z\ ,\ x_i\geq 0$

مثال: تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ چقدر است

$k=4 \quad n=5$

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{8}{3}$$

مثال: معادله $x_1+x_2+\dots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1>1$ و $x_3>3$ باشد

$x_1>1 \Rightarrow x_1\geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_1-2}_{y_1}\geq 0 \Rightarrow x_1=y_1+2$

$x_3>3 \Rightarrow x_3\geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_3-4}_{y_3}\geq 0 \Rightarrow x_3=y_3+4$

$\Rightarrow$ معادله جدید $y_1+2+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14$

$y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=8$

تعداد جوابهای صحیح نامنفی $\binom{8+5-1}{5-1}=\binom{12}{4}$

مثال: معادله $x_1+x_2+\dots+x_6=12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرطی که $x_3=4$ ، $x_5>2$

$x_5>2 \Rightarrow x_5-2>0 \Rightarrow x_5=y_5+2$
$x_3=4$
$\Rightarrow$ معادله جدید $x_1+x_2+4+x_4+y_5+2+x_6=12$

$x_1+x_2+x_4+y_5+x_6=6 \rightarrow \binom{6-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5$

مثال: معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ چند جواب صحیح نامنفی فرد دارد

مجموع ۵ عدد فرد هیچگاه زوج نمی‌شود گزینه ۴ صحیح است

۱) ۳۶
۲) ۱۲۰
۳) ۲۱۰
۴) صفر

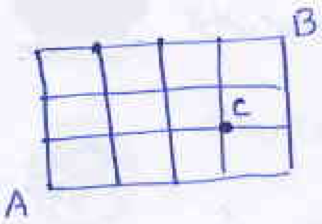
مثال: معادله $x_1+x_2+x_3=21$ چند جواب صحیح نامنفی فرد دارد

$2t+1+2t'+1+2t''+1=21$

$2t+2t'+2t''=18 \Rightarrow t+t'+t''=9 \Rightarrow \binom{9+3-1}{3-1}=\binom{11}{2}=55$

۱) ۴۵
۲) ۵۵
۳) ۶۶
۴) ۳۶

تمرین: در شکل مقابل به چند روش از A به B می‌توان رفت به طوری که حرکت رو به راست و رو به بالا مجاز باشد



الف) از A به B رفت

ب) از A به B رفت و از C گذشت

ج) از A به B رفت و از C نگذشت

تمرین: مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر با شرایط داده شده.

الف) $x_1+x_2+\cdots+x_5=10$ ، $x_i>0$, $2\le i\le 5$

ب) $x_1+x_2+\cdots+x_4=12$ ، $x_1>2$, $x_5\geq 4$

ت) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3$ ، $x_i\geq 0$, $1\le i\le 4$

تمرین: به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم

الف) به دلخواه انتخاب کنیم

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم