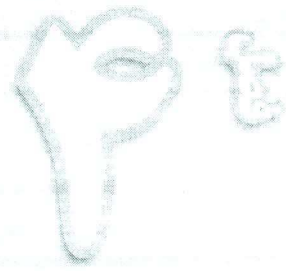


معادله‌های نامعادله‌ها



سد دز، خوزستان



@Faragiri10
ghadam.com

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

معادله درجه دوم و روش‌های
مختلف حل آن



سهمی



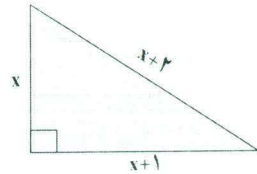
تعیین علامت



سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینه ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئله هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئله او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟). از خواهر بزرگ‌تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویه دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x ، یعنی $x+1$ و $x+2$ در نظر گرفت و به کمک رابطه فیثاغورس، رابطه زیر را بین سه ضلع مثلث به دست آورد:



$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

اکنون او می‌خواست معادله به دست آمده را حل کند؛ یعنی مفادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادله بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^2 - 2x - 3 = 0$ نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

می دانیم که تجزیه یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادله درجه دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، در نظر بگیرید.

با تجزیه سمت چپ معادله بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$(x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \text{ یا } x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 3$$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$$x = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(3)^2 - 2(3) - 3 = 0$$

$$9 - 6 - 3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً درباره آن بحث شده است؟ توضیح دهید. **خبر طول ضلع هیچ‌گاه متقی نمی‌شود**

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

$$(ب) \quad 3t^2 - t = 0$$

$$t(3t - 1) = 0$$

$$t = 0 \dots\dots\dots$$

$$3t - 1 = 0 \dots\dots\dots t = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow 3(0)^2 - 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \rightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{9} - \frac{1}{3} = 0 \quad \checkmark$$

$$(الف) \quad x^2 - 3x = 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{1} \rightarrow 5^2 - 3(5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \rightarrow (-2)^2 - 3(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0 \quad \checkmark$$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه گیری

فعالیت

معادله درجه دوم $x^2 = 25$ را در نظر بگیرید.

۱ جواب های این معادله را به روش تجزیه به دست آورید. $x^2 - 25 = 0 \quad (x - 5)(x + 5) = 0$

$$\begin{cases} x - 5 = 0 & x = 5 \quad \checkmark \\ x + 5 = 0 & x = -5 \quad \checkmark \end{cases}$$

۲ از دو طرف معادله $x^2 = 25$ ، ریشه های دوم را محاسبه می کنیم و این معادله را به شکل $x = \pm 5$ می نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب های به دست آمده را با این جواب ها مقایسه کنید.

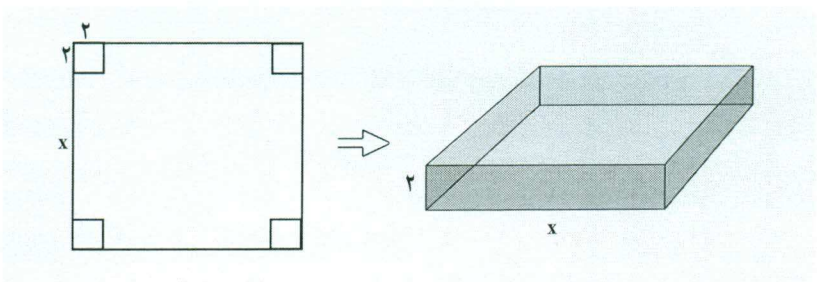
در هر دو روش پاسخ ها یکسان می باشد

۳ اگر $x^2 = a$ یک معادله درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می توان جواب های آن را به صورت $x = \pm \sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ عبارت اند از:
 $x = \sqrt{a}$ و $x = -\sqrt{a}$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحه مقوایی به شکل مربع را برش می زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه های آن را جدا می کنیم. بعد با تا زدن لبه ها، یک جعبه می سازیم. اگر مربع های جدا شده به ضلع ۲ سانتی متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر جدا می کنیم تا جعبه ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از:

$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = (2)(x)(x) = 2x^2$$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باید باشد، داریم: $۲x^2 = ۲۰۰$. بنابراین $x^2 = ۱۰۰$ و با محاسبه ریشه های دوم این معادله، جواب های $x = \pm ۱۰$ به دست می آید. و چون طول نمی تواند منفی باشد، تنها $x = ۱۰$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $۱.۴ = ۱.۴ + ۱.۴ = x + ۱.۴$ سانتی متر است.

تمرین ۱

جواب هر یک از معادله های زیر را در صورت وجود به روش ریشه گیری به دست آورید.

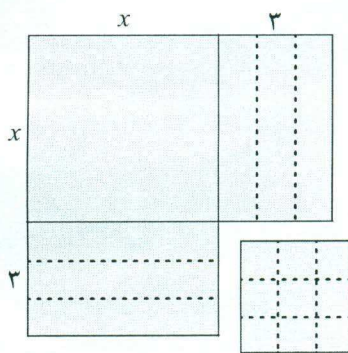
الف) $۵x^2 = ۲۰$ ب) $t^2 + 7 = 0$ پ) $(r-2)^2 = ۱۶$

$x^2 = ۴$ $t^2 = -7$ $r-2 = \pm ۴ \dots$

$۲x = \pm ۲$ **معادله جواب حقیقی ندارد** $\begin{cases} r-2 = ۴ \rightarrow r = ۶ \\ r-2 = -۴ \rightarrow r = -۲ \end{cases}$

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت



۱ دو جمله ای $x^2 + 6x$ را در نظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله ای اضافه شود تا چند جمله ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

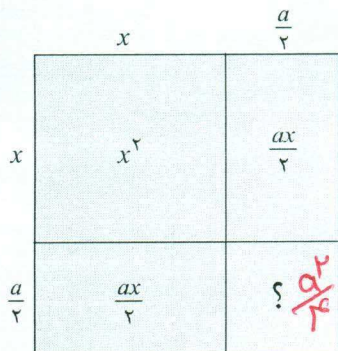
$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته اید، چه ارتباطی با شکل روبه رو دارند؟

توجه داشته باشید: ۹ سمت دارد. ما نیز عدد ۹ را از سمت چپ قرار دادیم و جبران ۳ را در جای خالی سمت راست

۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله ای $x^2 + ax$ چه جمله ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$



مثال

معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

معادله درجه دوم

$$x^2 - 6x = -4$$

به دو طرف معادله، -۴ را اضافه کرده ایم

$$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$$

به دو طرف معادله ۹ را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x-3)^2 = 5$$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می نویسیم

$$x-3 = \pm \sqrt{5}$$

از دو طرف معادله، ریشه دوم می گیریم

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده ایم

بنابراین جوابها یا ریشه های این معادله عبارت اند از $3 + \sqrt{5}$ و $3 - \sqrt{5}$.

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

ت) $2r^2 + r - 2 = 0$

$$r^2 + \frac{r}{2} - 1 = 0$$

$$r^2 + \frac{r}{2} = 1$$

$$r^2 + \frac{r}{2} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}$$

$$\left(r + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

$$r + \frac{1}{4} = \pm \sqrt{\frac{17}{16}}$$

$$r = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}, r = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$$

ب) $n^2 - 4n + 5 = 0$

$$n^2 - 4n = -5$$

$$n^2 - 4n + 4 = -5 + 4$$

$$(n-2)^2 = -1$$

معادله ریشه حقیقی ندارد

ب) $t^2 + 3t = 3$

$$t^2 + 3t = +3$$

$$t^2 + 3t + \frac{9}{4} = +3 + \frac{9}{4}$$

$$\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

$$t + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{21}{4}}$$

$$t = \sqrt{\frac{21}{4}} - \frac{3}{2}, t = -\sqrt{\frac{21}{4}} - \frac{3}{2}$$

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

الف) $x^2 + 2x = 24$

$$x^2 + 2x + 1 = 24 + 1$$

$$(x+1)^2 = 25$$

$$x+1 = \pm 5$$

$$\begin{cases} x+1 = 5 & x = 4 \\ x+1 = -5 & x = -6 \end{cases}$$

تعمیم

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش آموز: آیا با روش مربع کامل می‌توان هر معادله درجه دوم را حل کرد؟
 معلم: بله. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ به دو طرف معادله، $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ دو طرف را ساده کرده‌ایم

@Faragiri10
ghadam.com

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta = b^2 - 4ac$ ؛ پس: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

آیا می‌توانید با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به دست آورید؟
 دانش آموز: اگر $\Delta < 0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت.
 معلم: آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادله درجه دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta > 0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به دست آورید؟

دانش آموز: بله. کافی است از دو طرف معادله $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ ریشه دوم بگیریم:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

دانش آموز: اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟
 معلم: بله و این ریشه از رابطه زیر به دست می‌آید:

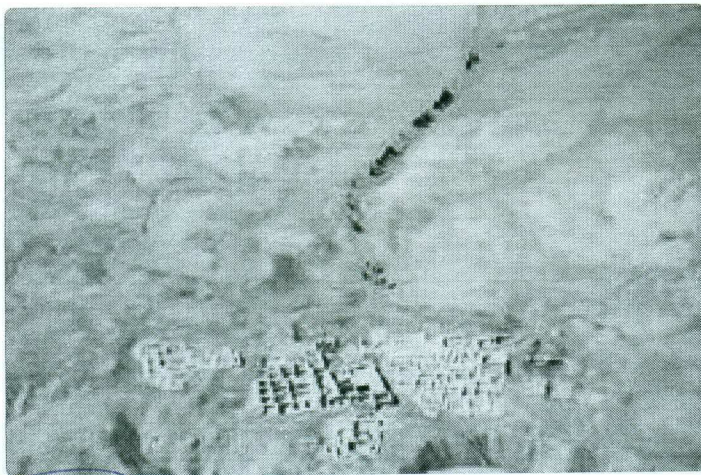
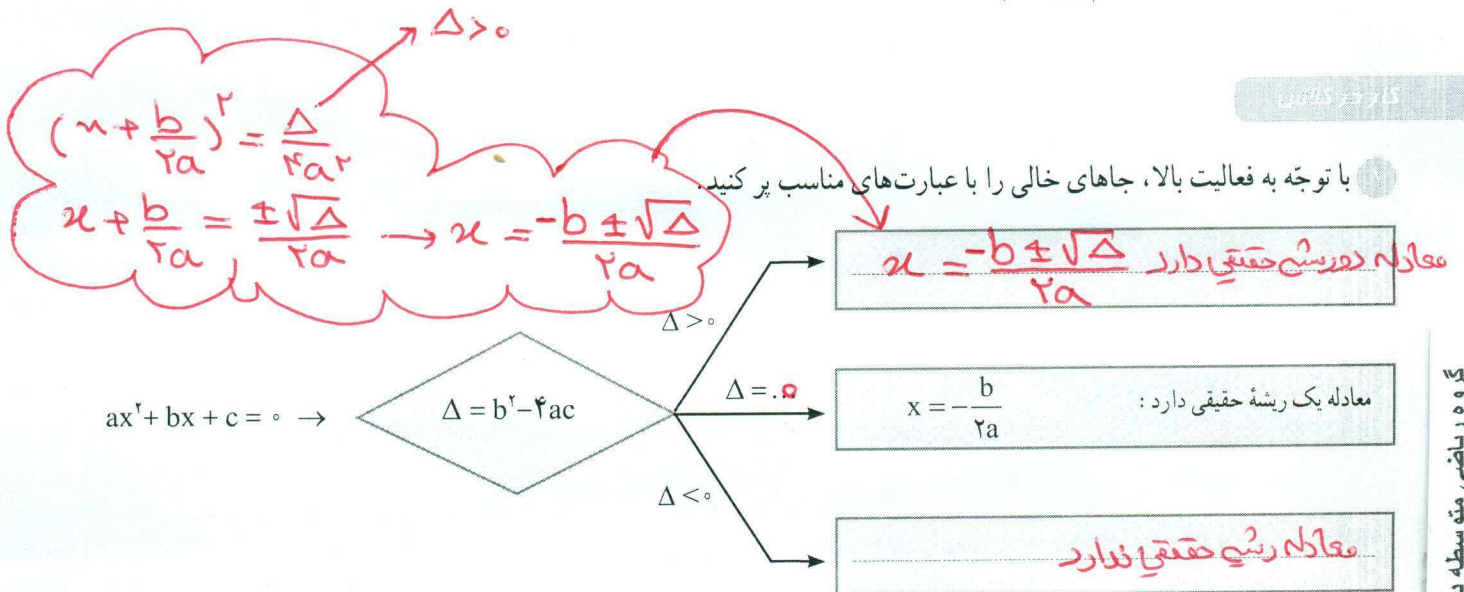
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

دانش آموز: پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم: این ریشه از معادله $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ به دست آمده است و چون

هر دو معادله $x + \frac{b}{2a} = 0$ و $x + \frac{b}{2a} = 0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشه

مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.



شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

Handwritten solutions for the three equations above:

الف) $x^2 - x + 1 = 0$
 $a=1, b=-1, c=1$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$
 معادله ریشه حقیقی ندارد

ب) $-2x^2 + x + 3 = 0$
 $a=-2, b=1, c=3$
 $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-2)(3) = 1 + 24 = 25$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-4}$
 $x = -1$ و $x = \frac{-4}{-4} = 1$

ج) $-x^2 + 4x - 4 = 0$
 $a=-1, b=4, c=-4$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$
 $\Delta = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$
 $x = \frac{-4}{-2} = 2$

مثال

از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.



حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ متر است، پس $2(s+t) = 50$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t = 25$ می رسیم؛ بنابراین $t = 25 - s$.

از سوی دیگر $st = 144$. با جای گذاری t بر حسب s در این معادله به شکل $s(25-s) = 144$ می رسیم که بعد از ساده شدن، معادله درجه دوم $s^2 - 25s + 144 = 0$ به دست می آید.

در این معادله $a=1, b=-25, c=144$ ؛ بنابراین

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

پس $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه حقیقی دارد که به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 \pm 7}{2} = 16 \\ s_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = 9 \end{cases}$$

و چون $t = 25 - s$ ، پس برای t نیز دو جواب به دست می آید:

$$\begin{cases} s_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 25 - 16 = 9 \\ s_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 25 - 9 = 16 \end{cases}$$

@Faragiri10
ghadam.com

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی متر به دست می آید.

Handwritten solution for $x^2 - 11x + 10 = 0$:

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$(x-1)(x-10) = 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 & x=1 \checkmark \\ x-10=0 & x=10 \checkmark \end{cases}$$

تمرین

۱) معادله های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

Handwritten solutions for exercise 1:

$$at^2 - 20 = 0$$

$$\Delta(t^2 - 4) = 0$$

$$a(t-2)(t+2) = 0$$

$$\begin{cases} t-2=0 & t=2 \checkmark \\ t+2=0 & t=-2 \checkmark \end{cases}$$

Handwritten solutions for exercise 2:

$$3) 5a^2 - 7a = 2a(a-3)$$

$$5a^2 - 7a = 2a^2 - 6a$$

$$3a^2 - a = 0 \rightarrow a(3a-1) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \checkmark \\ 3a-1=0 & a=1/3 \checkmark \end{cases}$$

Handwritten solutions for exercise 3:

$$1) n^2 - 2 = 26 \rightarrow n^2 = 28 \quad n = \pm\sqrt{28}$$

$$2) x^2 + 12 = 3 \rightarrow x^2 = -9$$

ریشه حقیقی ندارد

Handwritten solutions for exercise 4:

$$4) 4k^2 - 12k + 8 = 0$$

$$4(k^2 - 3k + 2) = 0$$

$$4(k-1)(k-2) = 0$$

$$\begin{cases} k-1=0 & k=1 \\ k-2=0 & k=2 \end{cases}$$

Handwritten solutions for exercise 5:

$$3) (3t-2)^2 = 4$$

$$3t-2 = \pm 2 \rightarrow 3t-2=2 \rightarrow 3t=4 \rightarrow t=4/3$$

$$3t-2 = -2 \rightarrow 3t=0 \rightarrow t=0$$

Handwritten solutions for exercise 6:

$$3 - 3k = 4k^2 - 3k$$

$$3 = 4k^2$$

$$k^2 = 3/4$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Handwritten solutions for exercise 7:

$$1) x^2 - 6x = 7$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x-7)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x-7=0 & x=7 \\ x+1=0 & x=-1 \end{cases}$$

Handwritten solutions for exercise 8:

$$x^2 - 4m = 7$$

$$x^2 - 4m + 9 = 7 + 9$$

$$(x-3)^2 = 14$$

$$x-3 = \pm\sqrt{14}$$

$$\begin{cases} x-3=\sqrt{14} & x=3+\sqrt{14} \\ x-3=-\sqrt{14} & x=3-\sqrt{14} \end{cases}$$

Handwritten solutions for exercise 9:

$$a + \frac{a}{r} = \frac{13}{r}$$

$$a^2 + \frac{a}{r}a + \frac{1a}{r} = \frac{13}{r} + \frac{1a}{r}$$

$$(a + \frac{1}{r})^2 = \frac{14}{r}$$

$$a + \frac{1}{r} = \pm \frac{\sqrt{14}}{r}$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{14}}{r} \rightarrow a = \frac{\sqrt{14}-1}{r} \\ a + \frac{1}{r} = -\frac{\sqrt{14}}{r} \rightarrow a = -\frac{\sqrt{14}+1}{r} \end{cases}$$

Handwritten solutions for exercise 10:

$$s^2 - 3s + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 3$$

$$(s - \frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

معادله ریشه حقیقی ندارد

$$\frac{1}{2}x^2 - 13x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 149 - 2 = 147$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm \sqrt{147}}{1}$$

$$x = \frac{13 + 11}{1} = 24 \text{ و } x = \frac{13 - 11}{1} = 2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 13x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 149 - 2 = 147$$

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{13}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{26}{5} = \frac{1+104}{20} = \frac{105}{20} = \frac{21}{4}$$

$$\Delta = \frac{1}{4} > 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$t = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}}{2\left(\frac{1}{10}\right)} \rightarrow t = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$-2x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(-3) = 1 - 12 = -11 < 0$$

معادله ریشه حقیقی ندارد

$$a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9) = 12 + 36 = 48$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ و } x = -3\sqrt{3}$$

$$1) 4x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$2) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$$

$$1) 4x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$2) 9 - 6z + z^2 = 0$$

$$(z-3)^2 = 0$$

$$z - 3 = 0 \rightarrow z = 3$$

$$3) 4a^2 + 3a = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 5}{8}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ و } x = -1$$

$$1) 2x^2 = 25 \rightarrow x^2 = 12.5 \rightarrow x = \pm \sqrt{12.5}$$

$$2) 9 - 6z + z^2 = 0$$

$$b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$$

$$(b + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} \rightarrow b + \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

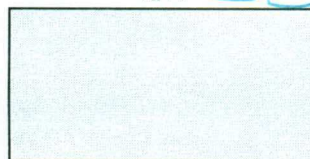
$$b = 1 \text{ و } b = -2$$

$$3) 4a^2 + 3a = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 5}{8}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ و } x = -1$$



طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$$a(a+3) = 45$$

$$a^2 + 3a - 45 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(1)(-45) = 9 + 180 = 189$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{189}}{2}$$

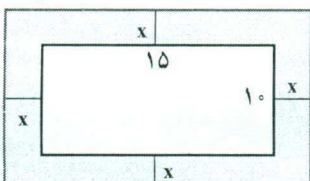
$$a = 3 \text{ و } a = -15$$

$$x + 4 = y$$

$$(x+4)(x+8) = 40 \rightarrow x^2 + 12x + 32 = 40$$

$$x^2 + 12x - 8 = 0$$

$$(x+14)(x-2) = 0 \rightarrow x = -14 \text{ و } x = 2$$



آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$x^2 + 12x - 8 = 0$$

$$(x+14)(x-2) = 0 \rightarrow x = -14 \text{ و } x = 2$$

یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی های تیمگان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید.



فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.006s^2 - 0.02s + 120$ محاسبه می شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

$$(2k+1)^2 + (2k+3)^2 = 29$$

$$4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9 = 29$$

$$8k^2 + 16k - 19 = 0$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(8)(-19) = 256 + 608 = 864$$

$$\sqrt{\Delta} = 29.4$$

$$k = \frac{-16 \pm 29.4}{16}$$

$$k = -7 \text{ و } k = 5$$

۱۳ - فردارد
۱۱ - فردارد
۱۳ - فروردین

۱- منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

$$S = (10 + 2u)(15 + 2u)$$

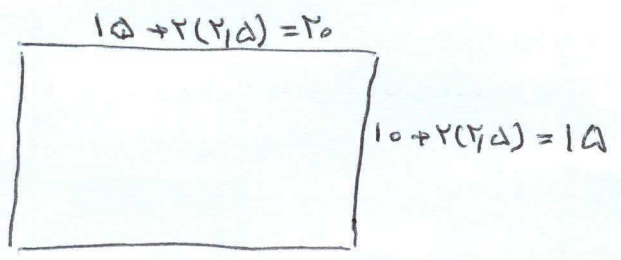
$$300 = 150 + 20u + 30u + 4u^2$$

$$\frac{4}{a}x^2 + \frac{50}{b}x - \frac{150}{c} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2500 - 4(4)(-150) = 2500 + 2400 = 4900$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 \pm \sqrt{4900}}{8} = \frac{-50 \pm 70}{8}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20}{8} = 2.5 \checkmark \\ x = \frac{-120}{8} = -15 \times \end{cases}$$



ابعاد قاب 20x15 می باشد.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \quad n^2 - n = 90 \quad n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

$$\begin{cases} n-10=0 & n=10 \checkmark \\ n+9=0 & n=-9 \times \end{cases}$$

@Faragiri10
ghadam.com

تعداد تیم ما ده تیم می باشد

هر تیم می تواند با سایر تیم ها به جز خودش بازی کند پس n تیم می تواند 1-n بازی انجام دهد و چون بازی ها به صورتی است و برگشت هر دو در نظر گرفته شده اند پس به 2/ هر تقسیم می کنیم

$$p = 0.004S^2 - 0.02S + 120$$

$$125 = 0.004S^2 - 0.02S + 120$$

$$\frac{0.004}{a}S^2 - \frac{0.02}{b}S - \frac{5}{c} = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (0.02)^2 - 4(0.004)(-5)$$

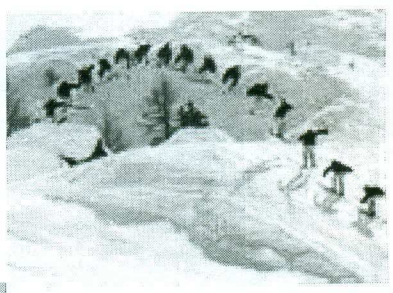
$$\Delta = 0.0004 + 0.08 = 0.0804$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0.02 \pm \sqrt{0.0804}}{0.008} \approx \frac{0.02 \pm 0.283}{0.008}$$

$$x = \frac{0.303}{0.008} = 37.875 \checkmark \quad x = \frac{-0.263}{0.008} = -32.875 \times$$

درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقه پرش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می کند، دقت کرده اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند. مسیری طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می تواند توسط معادله $y = ax^2 + bx + c$ محاسبه شود که در آن a, b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a \neq 0$ است.

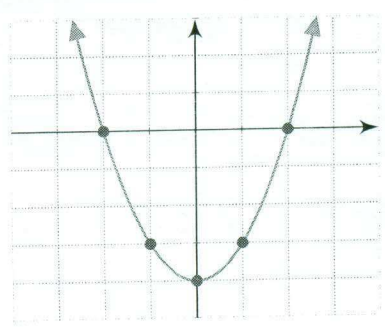
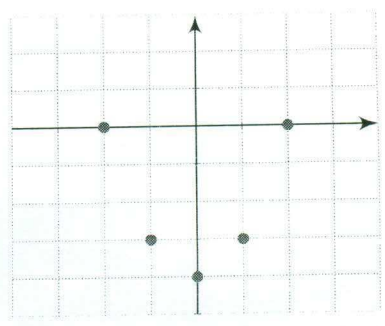
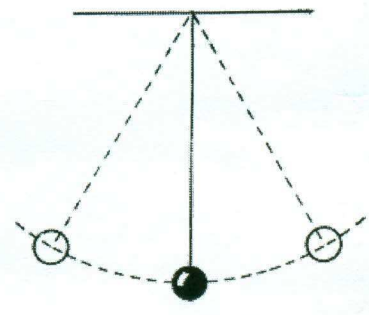


فعالیت

معادله $y = x^2 - 4$ را در نظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

x	$y = x^2 - 4$	(x,y)
-2	$y = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	(-2, 0)
-1	$y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	(-1, -3)
0	$y = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	(0, -4)
1	$y = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	(1, -3)
2	$y = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	(2, 0)

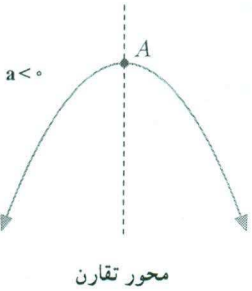
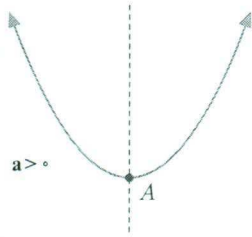


نقاط به دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می کنیم (شکل های روبه رو).

ب) پایین ترین نقطه این نمودار چه نقطه ای است؟ آیا می توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ $x = 0$ (۰، -۴)

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده ایم؟ آیا با نقاط کمتری نیز می توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ **بله با ۳ نقطه** **نقطه**

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور xها در چه نقاطی است؟ **(۲، ۰) و (-۲، ۰)**



نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:

نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

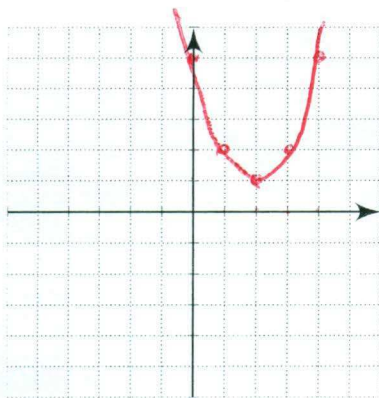
الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 1$$

ب) ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow \dots x = 2 \dots$$

@Faragiri10
ghadam.com



x	$y = x^2 - 4x + 5$	(x, y)
0	$y = 0^2 - 4(0) + 5 = 5$	(0, 5)
1	$y = 1^2 - 4(1) + 5 = 2$	(1, 2)
2	$y = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3^2 - 4(3) + 5 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4^2 - 4(4) + 5 = 5$	(4, 5)

ب) پنج نقطه حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت) آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطه این سهمی را از معادله آن به شکل $y = (x-2)^2 + 1$ به دست آورید؟

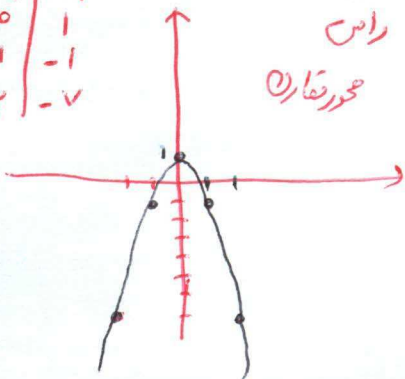
بله، کمترین عدد درون پرانتز عدد سمت راست و بیرون پرانتز
(2, 1)

هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

کار در کلاس

در هر یک از سهمی های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

x	y
-2	-7
-1	-1
0	1
1	-1
2	-7

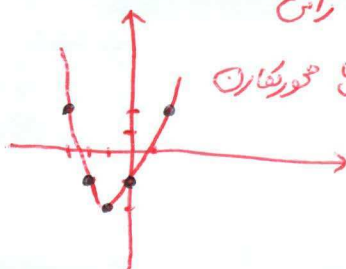


$y = -2(x-0)^2 + 1$
 رأس (0, 1)
 محور تقارن $x = 0$

(ب) $y = -2x^2 + 1$

(الف) $y = (x+1)^2 - 2$

x	y
-3	2
-2	-1
-1	-2
0	-1
1	2



رأس (-1, -2)
 محور تقارن $y = -1$

فعالیت

معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$y = ax^2 + bx + c$

$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c \rightarrow$

$\rightarrow y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a} \rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطه $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.

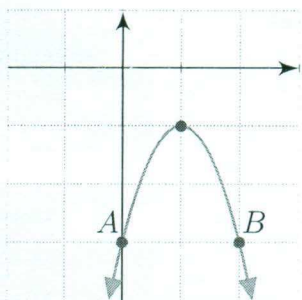
$(h, k) = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ $x = h = -\frac{b}{2a}$ تقارن

مثال

سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می کنیم.

در این سهمی $a = -2$ و $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به دست می آوریم.

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$



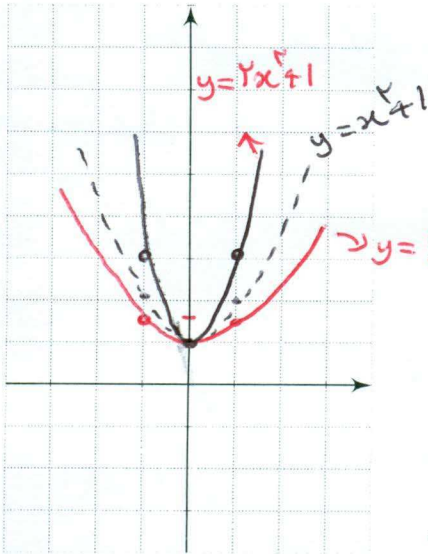
اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می کنیم.

x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	(0, -3)
1	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	(1, -1)
2	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	(2, -3)

بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x = 1$ قرینه اند.

۱- عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی به دست آورید.



معادله دو سهمی به صورت $y = \frac{x^2}{2} + 1$ و $y = 2x^2 + 1$ است.

الف) مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطه $A(0, 1)$ است.

x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)
0	$y = 2(0)^2 + 1 = 1$	(0, 1)
-1	$y = 2(-1)^2 + 1 = 3$	(-1, 3)
1	$y = 2(1)^2 + 1 = 3$	(1, 3)

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x, y)
0	$y = \frac{0^2}{2} + 1 = 1$	(0, 1)
-1	$y = \frac{(-1)^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	(-1, 1.5)
1	$y = \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	(1, 1.5)

ب) معادله سهمی دیگری را که نقطه A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

رسم کنید. $y = x^2 + 1$ و $y = -x^2 + 1$

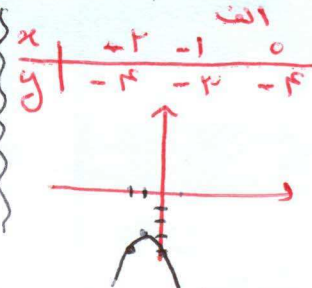
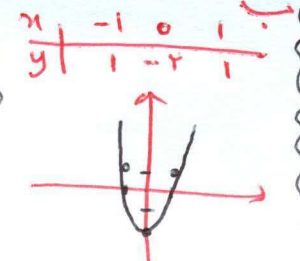
ج) ضرایب x^2 در معادلات سهمی هایی که رسم شده اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

آل: ضریب x^2 ... عددی بین صفر و یک باشد دهانه سهمی باز شود و اگر عددی بزرگتر از یک یا کمتر از یک باشد دهانه سهمی تنگ تر می شود

تمرین

۱) نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید.

- الف) $y = -(x+1)^2 - 2$
- ب) $y = 3x^2 - 2$
- ج) $y = x - x^2$
- ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$



۲) اگر $(0, 5)$ و $(-2, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید. خط تقارن محور متعامد عمودی از وسط این دو نقطه است که خط موازی ارتفاع آن ها می گویان است.



۳) نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۴) دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه های خود را با زاویه های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده اند. پرتابگر A ، زاویه α را انتخاب می کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می آید. پرتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می کند و مسیر

Handwritten notes for problem 1:

- For $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(\frac{1}{2})} = -1$
- For $y = -x^2 - x$: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Handwritten solution for problem 3:

$y = ax^2 + bx + c$

Point (0, 2): $2 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = 2$

Point (-1, 0): $0 = a(-1)^2 + b(-1) + 2 \rightarrow a - b = -2$

Point (2, 0): $0 = a(2)^2 + b(2) + 2 \rightarrow 4a + 2b = -2 \rightarrow 2a + b = -1$

System of equations:

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

Adding the equations: $3a = -3 \rightarrow a = -1$

Substituting $a = -1$ into $a - b = -2$: $-1 - b = -2 \rightarrow -b = -1 \rightarrow b = 1$

Final equation: $y = -x^2 + x + 2$

Graph of $y = -x^2 + x + 2$ is shown with x-intercepts at (-1, 0) and (2, 0), and y-intercept at (0, 2).

$$① y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + 2$$

x	1	$\frac{3}{2}$	2
y	2	$2\frac{1}{4}$	2

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

$$② y = -2x^2 + 3x + 2$$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
y	2	$2\frac{1}{2}$	2

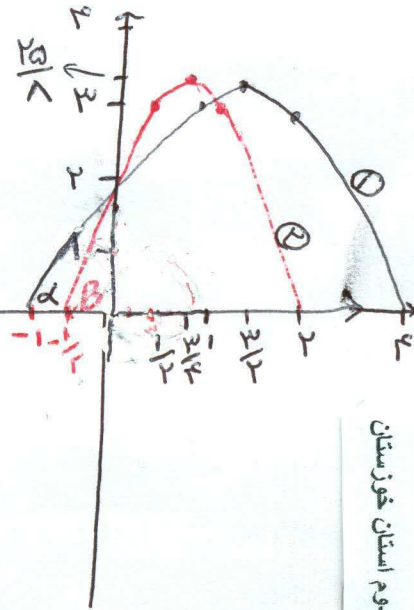
$$y = -2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{18}{2} + \frac{9}{2} + 2 = -\frac{18}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = \frac{-18+9+4}{2} = \frac{-5}{2}$$

طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه ها با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟ وزنه A

پ) کدام یک از وزنه ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید. هر دو وزنه ارتفاع یکسانی از سطح زمین پیدا کرده اند بیشترین ارتفاع هر دو وزنه از سطح زمین $\frac{25}{8}$ می باشد



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

حل برخورد وزنه A با محور x ها

$$y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + 2$$

$$0 = -\frac{1}{4}(x^2 - 3x - 4)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

حل برخورد وزنه B با محور x ها

$$y = -2x^2 + 3x + 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

$$x = 2, x = -\frac{1}{2}$$

بیشترین ارتفاع هر دو وزنه از سطح زمین یکسان است اما وزنه A نسبت به وزنه B مسافت بیشتری را طی می کند

مسافت وزنه A : $4 - (-1) = 5 \text{ m}$

مسافت وزنه B : $2 - (-\frac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$



درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطه $P(x) = 5x - 200$ به دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله	-۱۵۰	-۱۰۰	۰	۵۰	۳۰۰
$P(x) = 5x - 200$					

همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعداد کالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت $P(x)$ برای x های مختلف از جدول زیر به دست می‌آید.

x	$x < 40$	۴۰	$x > 40$
$P(x)$	-	۰	+

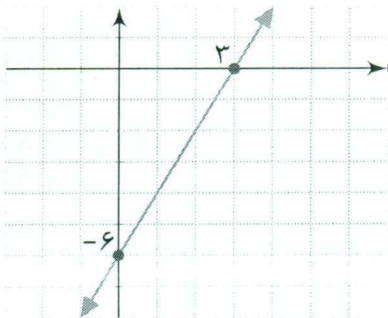
حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

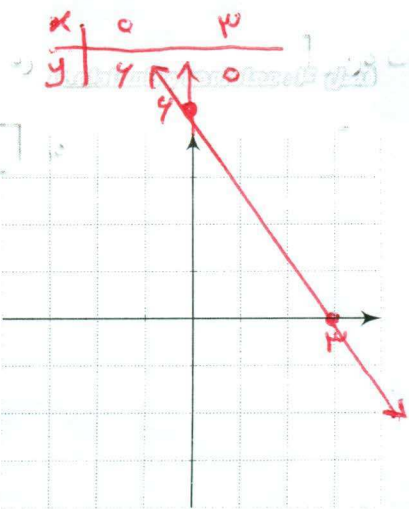
تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

شعاعیت

۱) نمودار خط $y = 2x - 6$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < 3$	۳	$x > 3$
$y = 2x - 6$	-	۰	+





۲ نمودار خط $y = -2x + 6$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای x های مختلف تعیین می کند، کامل کنید.

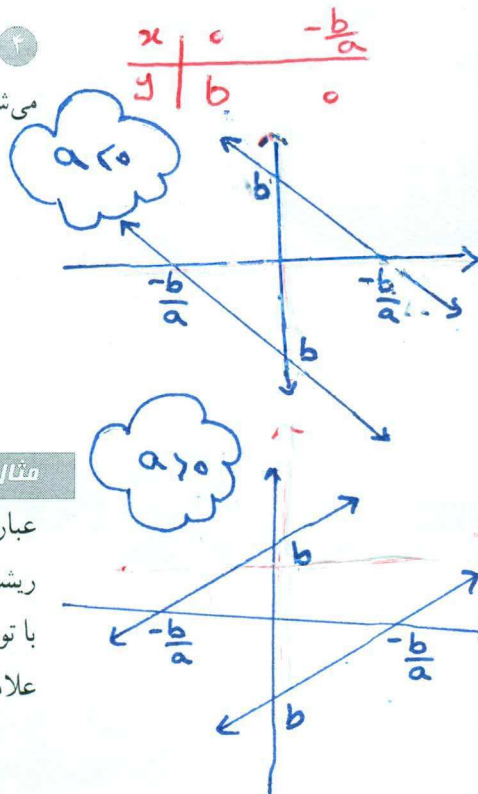
x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$y = -2x + 6$...	0	...

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضرب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟
 ریشه مثبت و منفی نه ضرب x مثبت است علامت قبل از ریشه منفی می شود
 ریشه مثبت و منفی نه ضرب x منفی است علامت قبل از ریشه مثبت می شود

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$ برای x های مختلف از جدول زیر تعیین می شود.

$0 = ax + b$
 $ax = -b$
 $x = -\frac{b}{a}$

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a



مثال

عبارت $y = 5x - 2$ را تعیین علامت می کنیم.
 ریشه عبارت $5x - 2$ از معادله $5x - 2 = 0$ به دست می آید که برابر $x = \frac{2}{5}$ است.
 با توجه به اینکه علامت ضرب x ؛ یعنی $a = 5$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x	$x < \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$x > \frac{2}{5}$
$y = 5x - 2$	-	0	+

مقدار y را برای $x = 3$ و $x = -1$ به دست آورید و صحت علامت اعداد به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$x = -1 \quad y = 5(-1) - 2 = -7$
 $x = 3 \quad y = 5(3) - 2 = 13$

علامت عبارت $A = (2x-1)(3-x)$ را برای x های مختلف تعیین می کنیم.
جدول تعیین علامت برای هر کدام از عبارت های $2x-1$ و $3-x$ به صورت زیر است:

x	$x < 3$	3	$x > 3$	x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$3-x$	+	0	-	$2x-1$	-	0	+

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به صورت زیر می نویسیم:

x	$x > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 3$	3	$x > 3$
$2x-1$	-	0	+	+	+
$3-x$	+	+	+	0	-

بنابراین در سه ناحیه بالا که با رنگ های مختلف نشان داده شده، علامت هر کدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x > 3$ ، عبارت $2x-1$ مثبت است؛ ولی $3-x$ منفی می باشد، پس علامت عبارت حاصل ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیه دیگر، جدول تعیین علامت $A = (2x-1)(3-x)$ به صورت زیر است:

x	$\frac{1}{2}$	3	
$2x-1$	-	0	+
$3-x$	+	0	-
A	-	0	+

دقت کنید که روی ستون ها نیز قاعده ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x=0$ و $x=4$ به دست آورید و صحت علامت مقادیر به دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$A = (2(0)-1)(3-0) = -3$$

$$A = (2(4)-1)(3-4) = 7(4-3) = 7$$

هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$A = (3x+1)(x-2)$

$C = x^2(7-x)$

$B = (2x-3)^2$

$D = \frac{x-1}{5-2x}$

$3x+1=0 \quad x = -\frac{1}{3}$
 $x-2=0 \quad x = 2$

x	$-\frac{1}{3}$	2	
$3x+1$	-	0	+
$x-2$	+	0	-
A	+	0	-

$2x-3=0 \quad x = \frac{3}{2}$
 $2x-3=0 \quad x = \frac{3}{2}$

x	$\frac{3}{2}$	
$2x-3$	-	+
B	+	+

در نگاه معادله در برای توان زوج باشد علامت مثبت می باشد
 $B = (ax+b)^{2n}$

$x-1=0 \quad x=1$
 $5-2x=0 \quad x = \frac{5}{2}$

x	1	$\frac{5}{2}$	
$x-1$	-	0	+
$5-2x$	+	0	-
D	+	0	+

$v-x=0 \quad x=v$
 $x^2=0 \quad x=0$

x	0	v	
x^2	-	0	+
$v-x$	+	0	-
C	+	0	+

۱- از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف نظر می کنیم.
۲- تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجه مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{b}$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می گوئیم. ($a \in \mathbb{R}$)

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادله $P(x) = 0$ به شیوه مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم.

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

که در آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادله $P(x) = 0$ ، دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) داشته و به شکل $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x		x_1		x_2	
$x - x_1$		-	0	+	+
$x - x_2$		-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	-	-	+
$P(x)$		مخالف علامت a		موافق علامت a	

۲ اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x) = a(x - x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای x ‌های مختلف تعیین کنید.

x		x_1	
$(x - x_1)^2$		+	+
$P(x)$		موافق علامت a	

۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ باشد، در این صورت معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

$$P(x) \text{ همواره مثبت} \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$P(x) \text{ همواره منفی} \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

مثال

عبارت $A = 2x^2 - x - 3$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادله $A = 0$ را در صورت وجود، به دست می‌آوریم.

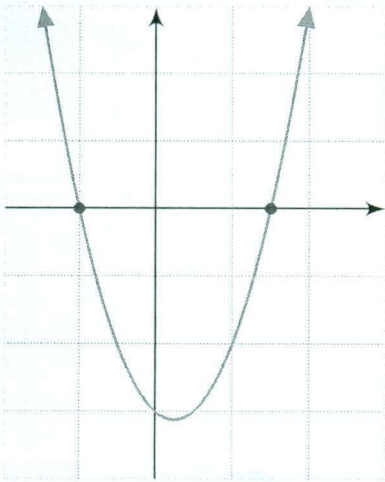
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25$$

پس معادله $A = 0$ دو ریشه متمایز به صورت زیر دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{4} = -1$$

با توجه به اینکه $a = 2$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به صورت زیر مشخص می‌شود:

x			-1		$\frac{3}{2}$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$



نمودار سهمی $y = 2x^2 - x - 3$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{3}{2}$ و $x < -1$ ، نمودار بالای محور x هاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-1 < x < \frac{3}{2}$ ، نمودار پایین محور x هاست؛ پس علامت y منفی است.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

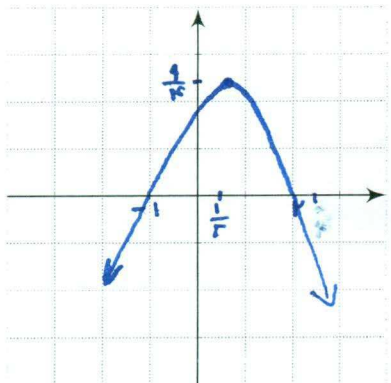
$$\begin{cases} x = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2 \text{ یا } x=1 \end{cases}$$

x		-2	0	1	3	
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-3)^2$		$+$	$+$	$+$	$+$	0
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$		$-$	$+$	0	$-$	$+$

تعریف نشده

تعریف نشده

x		-1	1	2	
$-x+2$		+	+	0	-
$x+1$		-	+	+	+
y		-	+	0	-
		$y < 0$	$y > 0$	$y < 0$	$y < 0$



چند جمله‌ای $y = -x^2 + x + 2$ را با محاسبه ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$$y = -(x^2 - x - 2)$$

$$-(x-2)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x-2=0 & x=2 \\ x+1=0 & x=-1 \end{cases}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-1) - (-1)^2}{4(-2)} = \frac{8 - 1}{-8} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8}$$

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

ب) $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

$$-x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x-3)^2$$

$$x-3=0 \quad x=3$$

همواره منفی

الف) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

$$x^2 - 9 = 0 \quad x^2 = 9 \quad x = \pm 3$$

$$3x - 1 = 0 \quad x = \frac{1}{3}$$

x		-3	1/3	3		
x^2-9		+	0	-	-	+
$3x-1$		-	-	0	+	+
A		-	0	+	-	+

$$x^2 + x + 3 = 0 \quad \Delta = 1 - 4(1)(3) = -11 < 0$$

ریشه‌ها وجود ندارد و همیشه مثبت است $\Delta < 0$

همواره مثبت

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱- خاصیت جمع:

برای عبارت‌های جبری A، B، C، اگر $A < B$ سپس $A + C < B + C$

۲- خاصیت ضرب

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$

مثال

نامعادله $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

$$2x - 1 \geq -7$$

$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$

به دو طرف نامعادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -3\}$ که با نماد بازه به شکل $[-3, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است:

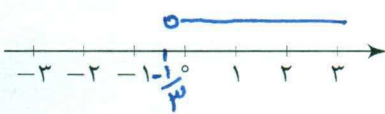


فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادله زیر صدق می‌کند:

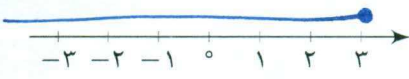
$$-2 < 3x - 1, 3x - 1 \leq 8$$

هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنید.



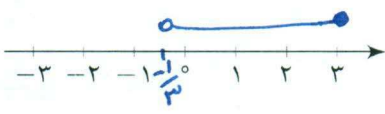
$$-2 < 3x - 1 \Rightarrow -2 + 1 < 3x - 1 + 1 \Rightarrow -1 < 3x \Rightarrow -\frac{1}{3} < x$$

$$-\frac{1}{3} < x$$



$$3x - 1 \leq 8 \Rightarrow 3x - 1 + 1 \leq 8 + 1 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$$

به خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



می‌توانیم دو نامعادله فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادله دوگانه به صورت $-2 < 3x - 1 \leq 8$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادله دوگانه را حل کنید:

به دو نامعادله $+1$ را اضافه می‌کنیم. $-2 < 3x - 1 \leq 8$

دو نامعادله را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم. $-\frac{1}{3} < x \leq 3$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 3$$

جواب به دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید. نامعادله دوگانه فوق را به صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

$$15 \leq C \leq 25 \rightarrow 15 \leq \frac{5}{9}F - 32 \leq 25 \rightarrow 15 + 32 \leq \frac{5}{9}F \leq 25 + 32$$

$$\frac{9}{5} \times 47 \leq \frac{5}{9}F \leq \frac{9}{5} \times 57 \rightarrow \frac{423}{5} \leq F \leq \frac{513}{5}$$

کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی گراد و رابطه‌ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی گراد (C) تبدیل می‌کند، به صورت $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $15 \leq C \leq 25$ ؛ سپس از رابطه داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادله دوگانه به دست آمده را حل کنید.)

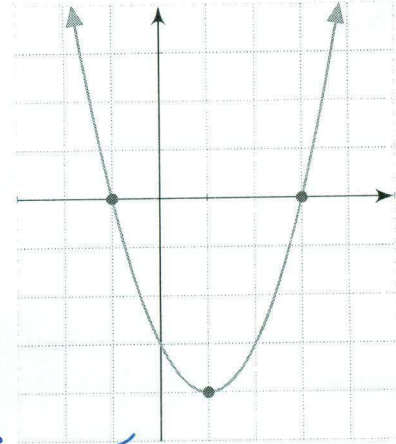
شعابیت

سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را در نظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور x هاست؟
 برای $-1 < x < 3$

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟
 $x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (x - 3)(x + 1) = 0$
 $x = 3 \quad x = -1$

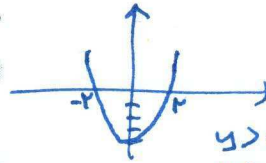
پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادله $x^2 - 2x - 3 < 0$ استفاده کرد.



سین از رت نمودار جاهای $y < 0$ و از روی جدول نیز مقادیر $y < 0$ می‌شود.

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

$$x^2 - 4 \leq 0 \quad (x - 2)(x + 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \quad x^2 \leq 4$$



$y > 0 \leftarrow x < -2$
 $y < 0 \leftarrow -2 \leq x \leq 2$
 $y > 0 \leftarrow x > 2$
 $y = 0 \leftarrow x = -2$
 $y = 0 \leftarrow x = 2$

مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y = x^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مقدار مثبت داشته باشد، باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد. در این عبارت، $a = 1$ و $\Delta = m^2 - 4$ است؛ بنابراین $m^2 - 4 < 0$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^2 - 4$ به صورت زیر است:

m	-2	2	
$m^2 - 4$	+	-	+

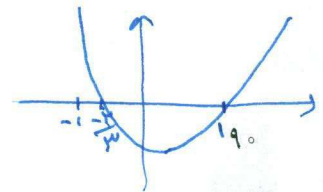
بنابراین برای اینکه $m^2 - 4$ منفی باشد، باید $-2 < m < 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 1 \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - x - 2 \geq 0 \quad \begin{matrix} -\frac{1}{3} & 1 \end{matrix}$$



مثال

نامعادله $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^2-9=0$ ، اعداد ± 3 هستند و ریشه معادله $2x+1=0$ ، عدد $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x	-3	$-\frac{1}{2}$	3	
x^2-9	+ ° -	-	- ° +	
$2x+1$	-	-	° +	+
$\frac{x^2-9}{2x+1}$	- ° +	+	-	° +

تعریف نشده

بنابراین اگر $-3 \leq x < -\frac{1}{2}$ و یا $x \geq 3$ ، عبارت $\frac{x^2-9}{2x+1}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $[-3, -\frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$.

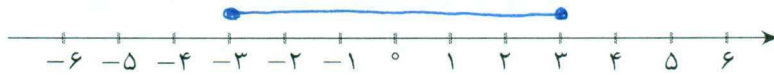


نامعادله‌های قدر مطلق

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصله x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|3| = 3$ و $|-3| = 3$ زیرا فاصله هر دو عدد 3 و -3 از مبدأ برابر 3 است.

فعالیت

۱) نامعادله $|x| \leq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی 3 باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعه مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

..... $[-3, 3]$

۲) نامعادله $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی 3 باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

$$(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

۲ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\begin{cases} |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = [-3, 3] \\ |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -3 \Rightarrow \text{مجموعه جواب (به شکل بازه)} = (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \end{cases}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت

۱- اگر $|u| \leq a$ سپس $-a \leq u \leq a$.

۲- اگر $|u| \geq a$ سپس $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف $|x - 3| \leq 2$

ب $|2x - 1| > 5$

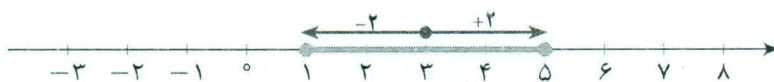
برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم: $-2 \leq x - 3 \leq 2$ اکنون داریم:

$$-2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[1, 5]$ است و نمایش هندسی آن به صورت زیر است.



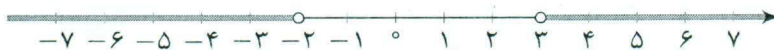
برای حل نامعادله $|x - 3| \leq 2$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصله آنها از نقطه ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[1, 5]$ ، مطابق شکل زیر به دست می‌آید.



برای حل نامعادله ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم:

$$|2x - 1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3 \\ 2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱- در هر یک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

$$-\frac{2}{3} < \frac{x}{3} + 1 < \frac{2}{3} \rightarrow -\frac{2}{3} - 1 < \frac{x}{3} < \frac{2}{3} - 1 \rightarrow -\frac{5}{3} < \frac{x}{3} < -\frac{1}{3} \rightarrow -5 < x < -1 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} 5-2x \leq -1 \\ 5-2x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x \leq -6 \\ -2x \geq -4 \end{cases}$$

$$x \geq 3, x \leq 2 \quad (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $|\frac{x}{3} + 1| < \frac{2}{3}$ بالا

ب) $|5 - 2x| \geq 1$ بالا



یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه (1, 9) باشد.
 $|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$



یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.
 $|x - \frac{a+b}{2}| \geq \frac{b-a}{2}$

تمرین

در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$ صحیح

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$ صحیح

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$ صحیح

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ صحیح

۲) به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟ $9 < 4k$ صحیح

۳) به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟ $9 < 4k$ صحیح

۴) یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟ صحیح

۵) تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110$$

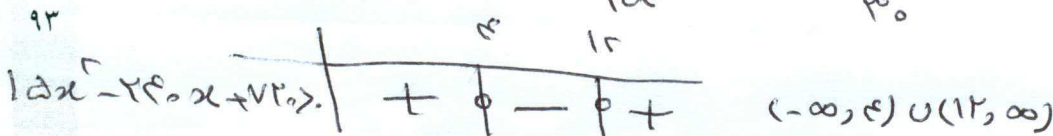
$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0 \rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 240x + 720 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-240)^2 - 4(\frac{15}{8})(720) = 57600 - 54000 = 3600$$

$$\sqrt{\Delta} = 60$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{240 \pm 60}{\frac{15}{4}} \Rightarrow x = \frac{300}{\frac{15}{4}} = 80$$

$$x = \frac{180}{\frac{15}{4}} = 48$$



خبر تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیست چون بنا به تفسیر علامت کمتر از ۴ دقیقه و بیشتر از ۱۳ دقیقه است در صورتی که ملک ۰ دقیقه هم جز زمان‌های کمتر از ۴ دقیقه می‌باشد که در آن صفران ۱۱۰ شده است

تمرین ۱۰) $1 < 2x - 3 \leq 3$ $1 + 3 < 2n \leq 3 + 3$ $4 < 2n \leq 4$ $2 < n \leq 3$ $(2, 3]$

ب) $x(x^2 + 4) < 0$ $x(x^2 + 3) < 0$

x	0	
$x^2 + 4$	$-$	$+$
$x^2 + 3$	$+$	$+$
$x(x^2 + 3)$	$-$	$+$

جواب $(-\infty, 0)$

ب) $x + 1 \leq a - x < 2x + 3$

$$\begin{cases} x + 1 \leq a - x \rightarrow 2x \leq a - 1 & x \leq \frac{a-1}{2} \\ a - x < 2x + 3 \rightarrow a - 3 < 3x & \frac{a-3}{3} < x \end{cases}$$

جواب $(\frac{a-3}{3}, \frac{a-1}{2}]$

ج) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1$

x	-1	0	1	
$x^3 - x$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 2x + 2$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

جواب $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$

ب) $-2 < \frac{a-x}{2} < 0$

$$-4 < a - x < 0 \rightarrow -a < x < a$$

ج) $|v - 2n| < 1$

$$-1 < v - 2n < 1 \rightarrow -1 < -2n < -4 \rightarrow 2 < n < 3$$

ب) $\frac{m-2n}{3n+1} \geq 0$

$m - 2n = 0 \rightarrow n = \frac{m}{2}$

$3n + 1 = 0 \rightarrow n = -\frac{1}{3}$

n	$-\frac{1}{3}$	$\frac{m}{2}$
$m - 2n$	$+$	$+$
$3n + 1$	$-$	$+$
$\frac{m-2n}{3n+1}$	$-$	$+$

جواب $(-\frac{1}{3}, \frac{m}{2}]$

ج) $|\frac{x-1}{2} - 1| \geq 3$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \rightarrow \frac{x-1}{2} \leq -5 \rightarrow x-1 \leq -10 \rightarrow x \leq -9 \\ \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 5 \rightarrow x-1 \geq 10 \rightarrow x \geq 11 \end{cases}$$

جواب $(-\infty, -9] \cup [11, \infty)$

تمرین ۱۳) $y = mx^2 - mx - 1$

$\Delta < 0 \rightarrow m^2 + 4m < 0 \rightarrow m(m+4) < 0$

$m(m+4) = 0 \rightarrow m = 0, m = -4$

m	0	-4
$m^2 + 4m$	$+$	$-$

جواب $(-4, 0)$

تمرین ۱۴) $h > 13$ $-dt^2 + 12t + 13 > 13$

$$-dt^2 + 12t > 0 \rightarrow -t(dt - 12) = 0$$

$t = 0$

$t = \frac{12}{d}$

t	0	$\frac{12}{d}$
$-t$	$+$	$-$
$dt - 12$	$-$	$+$
$-dt^2 + 12t$	$-$	$+$

جواب $t \in (0, \frac{12}{d})$