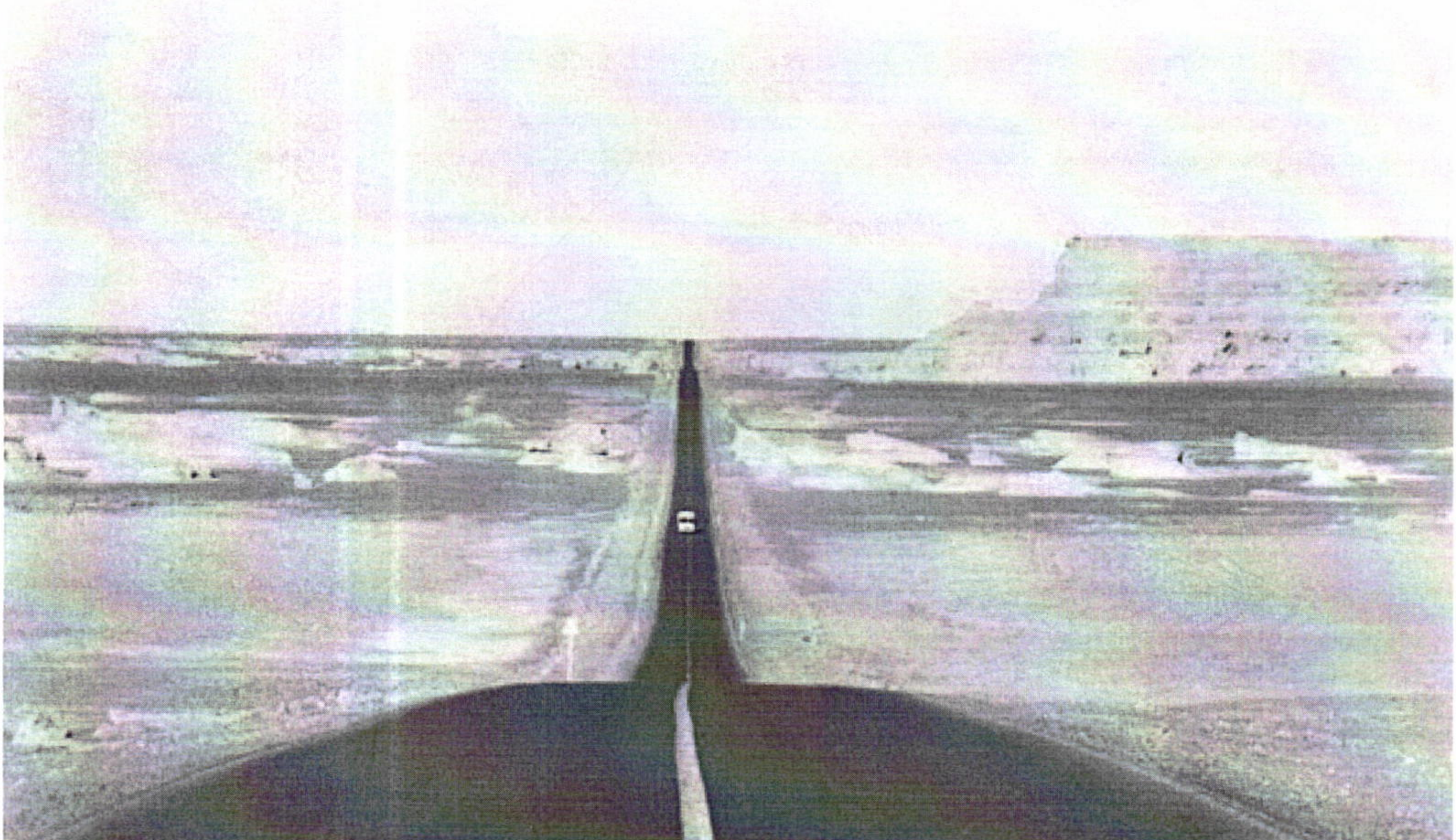
حد و پیوستگی

فصل ۵



جادهٔ نهبندان ـ شهداد

درس ۱

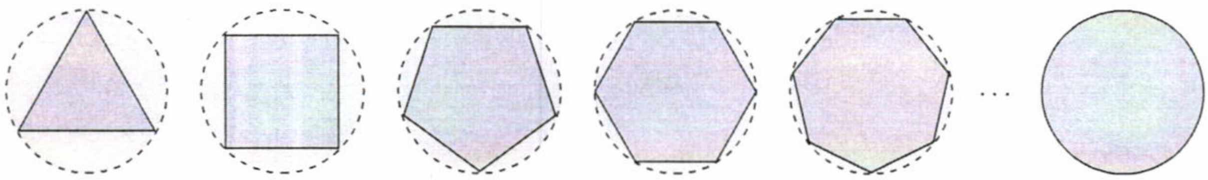
مفهوم حد و فرایندهای حدی

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به‌صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟ $\pi(1)^2 = \pi$

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر π=۳/۱۴۱۵۹ در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n\in\mathbb{N}$ نشان می‌دهد :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد π . که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی های منتظم درون دایره (محاطی) را به هراندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

خواندنی

عدد π (پی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. پی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد π، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است :

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبهٔ به‌دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پاپیروسی نوشته شده است که درحال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او با ۶ضلعی منتظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی مقدار π را با تقریب بسیار خوبی (۳/۲۱۵۰ > π > ۳/۱۰۵۸) به‌دست آورد.

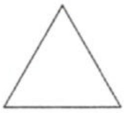
غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رسالهٔ محیطیه π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.

اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد :

گر کسی از تو بپرسد ره دانستن π پاسخی ده که هنرمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان   ره سرمنزل مقصود بما آموزد
۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹   ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

π= ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ ...

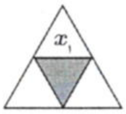
فعالیت



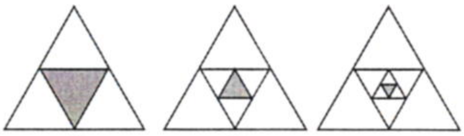
یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_1 = \frac{۲}{۲} = ۱$ و $P_1 = \frac{۶}{۲} = ۳$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$			...	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$			...	$\frac{۳}{۲^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = ۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

✤ **مثال :** رفتار تابع f، با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف نقطه $a=۲$ بررسی نمایید.

✤ **حل :** تابع f، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x=۲$ تعریف شده است. به ازای هر $x\neq۲$، ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

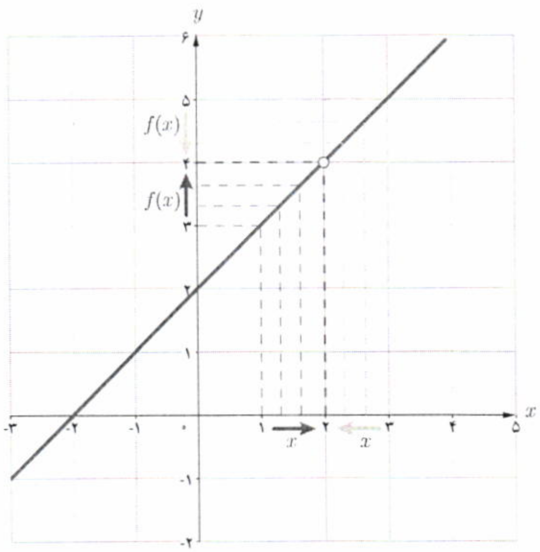
در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت چپ به عدد۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود ⟸   ⟸ x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می‌توان دید :

نمودار تابع f، خط راست $y=x+۲$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(۲,۴)$ حذف شده است.

با وجود اینکه مقدار تابع در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی $x\rightarrow۲$ (یعنی x به سمت ۲ میل می‌کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\rightarrow۲} f(x)=۴$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه‌ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می‌شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می‌شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می‌نامیم.

کار در کلاس

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x) = x+۳$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$ و $h(x) = \begin{cases} x+۳ & x \neq ۳ \\ ۴ & x = ۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

$f(۳) = $ ...۶ $\qquad g(۳) = $ ...تعریف نشده $\qquad h(۳) = $ ...۴

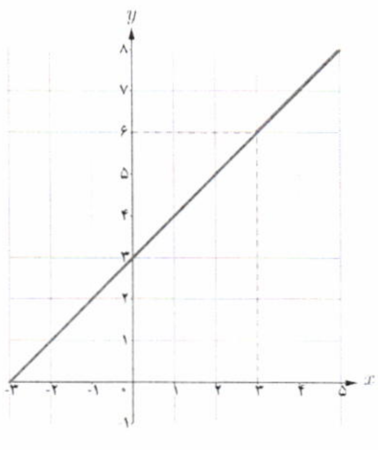
۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

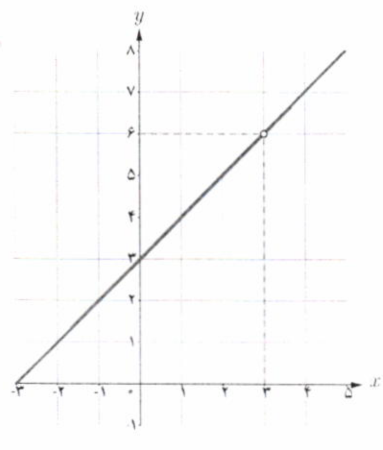
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\rightarrow$	۳	$\leftarrow$	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵٫۹	۵٫۹۹	۵٫۹۹۹	۵٫۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶٫۰۰۰۰۱	۶٫۰۰۰۱	۶٫۰۰۱	۶٫۰۱	۶٫۱
$h(x)$	۵٫۹	۵٫۹۹	۵٫۹۹۹	۵٫۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶٫۰۰۰۰۱	۶٫۰۰۰۱	۶٫۰۰۱	۶٫۰۱	۶٫۱

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

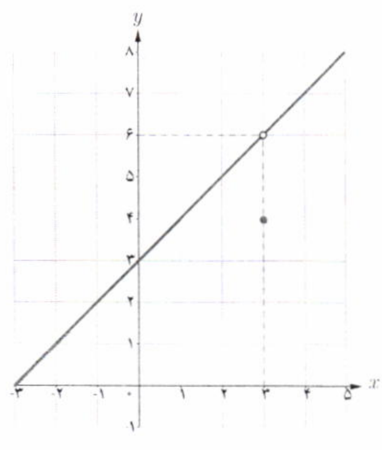
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار f



نمودار g



نمودار h

هرسه تابع به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر :

$\lim\limits_{x\to ۳} f(x) =$ ۶ $\qquad \lim\limits_{x\to ۳} g(x) =$ ۶ $\qquad \lim\limits_{x\to ۳} h(x) =$ ۶

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت در مقدار در نقطه $x=۳$ و شباهت در برابر بودن حدهای آنها در $x=۳$
تفاوت در برابر بوده یا نبودن مقدار تابع با حد تابع در $x=۳$

از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

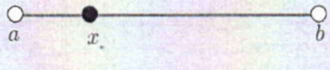
ب) ممکن است یک تابع درنقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

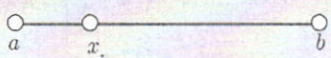
با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a، نزدیک نمود، کافی است تابع موردنظر در یک بازهٔ باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم :

تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
بنابراین اگر $x_0 \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.



اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.



به همین ترتیب :
اگر $r>0$، در این صورت بازه (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست و بازهٔ (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

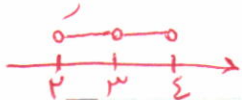
کار در کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

همسایگی ۳ (۲و۴)-{۳}

(۳و۴) همسایگی راست ۳

(۲و۳) همسایگی چپ ۳



۲ آیا بازهٔ (۲،۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟

طبق تعریف بازه (۲و۳) همسایگی راست ۲ می‌باشد.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

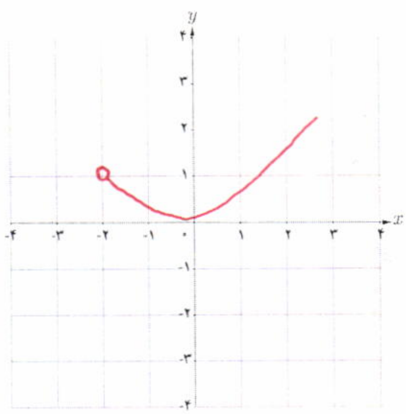
کار در کلاس

۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

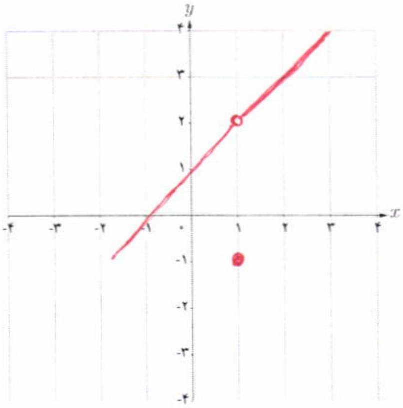
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$.

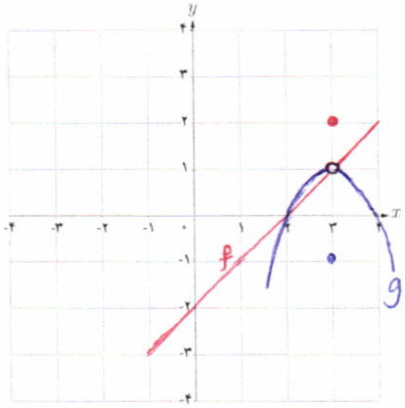
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.



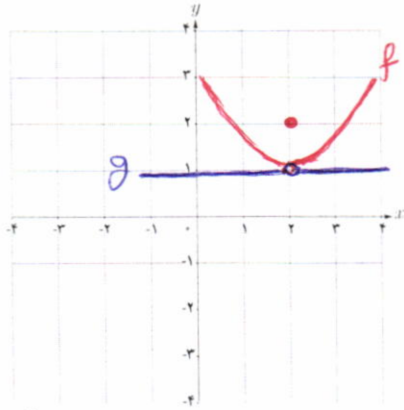
(۱)



(۲)



(۳)

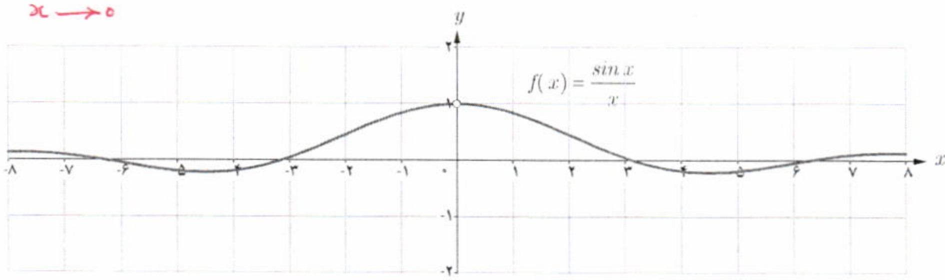


(۴)

۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).

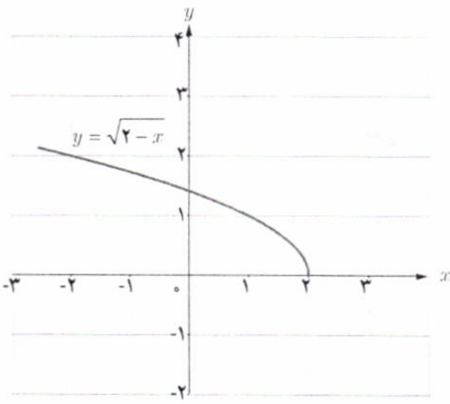
x	$\frac{\sin x}{x}$
$\pm$۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
$\pm$۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
$\pm$۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
$\pm$۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
$\pm$۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
$\pm$۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
$\pm$۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
$\pm$۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
$\pm$۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
$\pm$۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



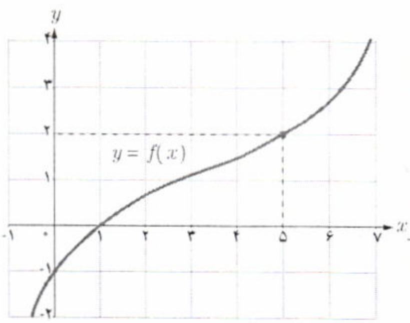
✤ **مثال** : آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه $x=$۲ حد دارد؟ چرا؟

✤ **حل** : می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,۲]$ می‌باشد. چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=$۲ حد ندارد.

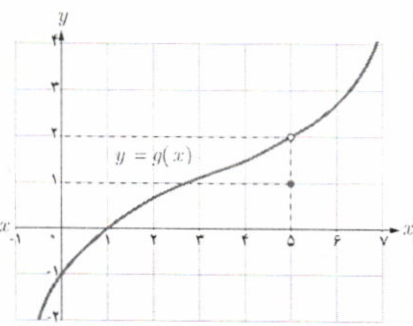


تمرین

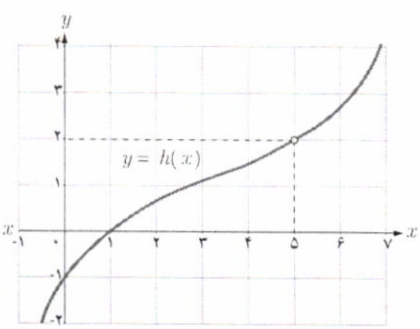
۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=$۵، مشخص کنید.



$\lim_{x\to ۵} f(x)=$..۲..

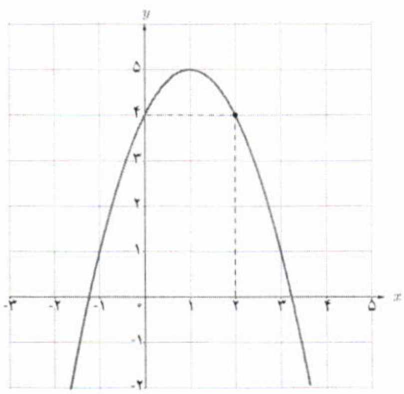


$\lim_{x\to ۵} g(x)=$..۲..

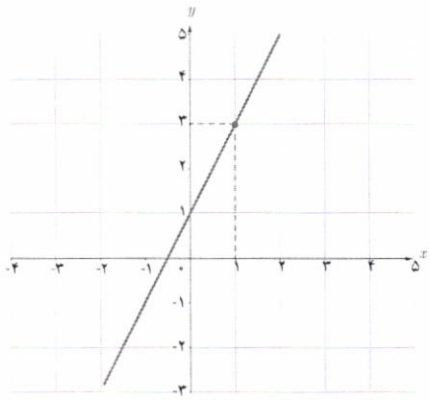


$\lim_{x\to ۵} h(x)=$..۲..

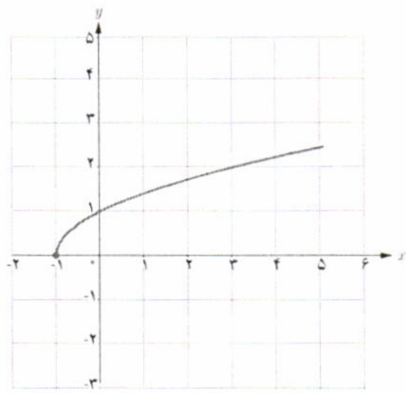
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



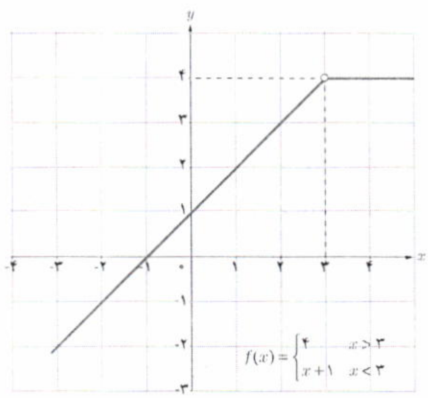
$\lim_{x \to ۲} (-x^۲ + ۲x + ۴) =$ ٤



$\lim_{x \to ۱} (۲x + ۱) =$ ۳



$\lim_{x \to -۱} \sqrt{x + ۱} =$ حد ندارد



$\lim_{x \to ۳} f(x) =$ ۴

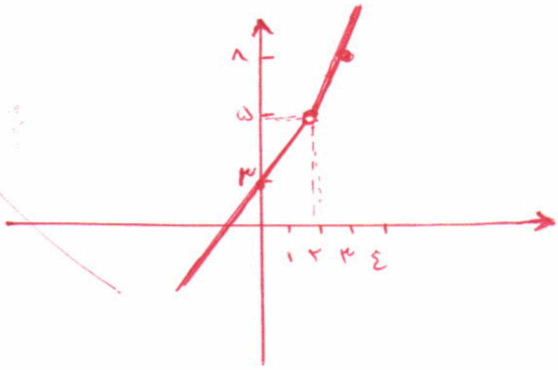
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim_{x \to ۰} (-۳x + ۴) =$ ..۴.

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	$۰/۵$	۱
$f(x)$	۷	۶,۷	۴,۳	۴,۰۳	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۳,۹۹۷	۳,۹۷	۳,۷	۲,۵	۱

ب) $\lim_{x \to -۱} f(x) =$ -۵ ، $f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	-۵,۵	-۵,۱	-۵,۰۱	-۵,۰۰۱	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	-۴,۹۹۹	-۴,۹۹	-۴,۹	-۴,۸

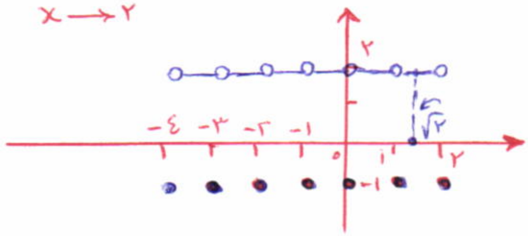


۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$، تعریف شده است؟ خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$



۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\\ 2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

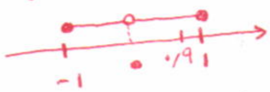
$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x)=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

الف) $1-x^2\geq 0 \rightarrow x^2\leq 1 \rightarrow -1\leq x\leq 1$

$D_f=[-1,1]-\{0\}$



ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ صفر

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟

بله

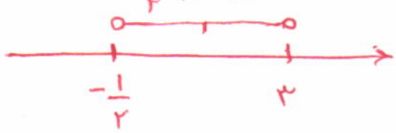
خیر

۷ اگر بازهٔ $(x-1,2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$x-1<2 \rightarrow x<3$

$2x+3>2 \rightarrow 2x>-1 \rightarrow x>\dfrac{-1}{2}$

$-\frac{1}{2}<x<3$

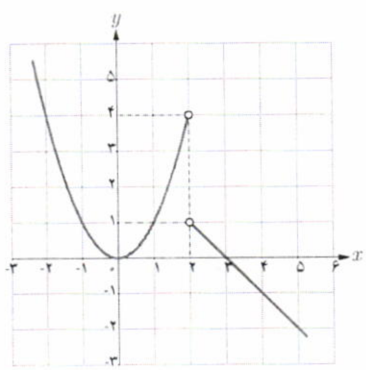


درس ۲

حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در نقطهٔ ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع بازهٔ $(-\infty,2]$ می‌باشد می‌توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت



نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+3 & x>2\\ x^2 & x<2\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است:

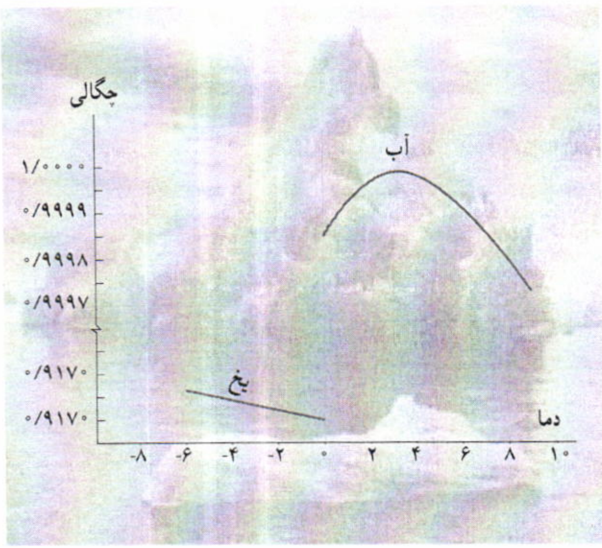
الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد؟ خیر حد ندارد. زیرا رفتار تابع در همسایگی راست و همسایگی چپ ۲ متفاوت است.

خواندنی

حتماً متوجه شده‌اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی‌شود؛ مانند کوه‌های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس‌ها شناورند. آیا می‌دانید چرا یخ در آب غرق نمی‌شود؟
به‌طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی‌آید، منقبض می‌شود و مولکول‌هایش به هم نزدیک‌تر می‌شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می‌شود و چگالی آن افزایش می‌یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین‌تر از زمانی‌اند که به شکل مایع درآمده‌اند.
ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می‌شود؛ درنتیجه حجمش افزایش می‌یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به‌دست می‌آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می‌گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می‌رود و ۰/۱ دیگرش بر روی آب شناور می‌ماند.
نمودار چگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه‌رو است:



در فعالیت صفحهٔ قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ‌تر از۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیرکمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و درنتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_2$

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

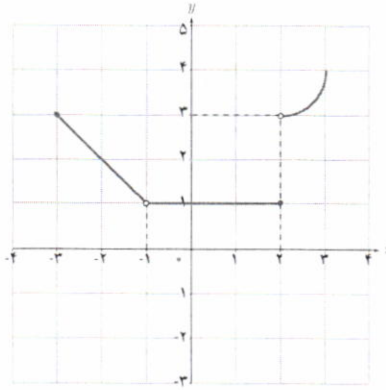
حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$

$x \to (-1)^+$

$x \to (-1)^-$

$x \to (-3)^+$

$x \to (-3)^-$

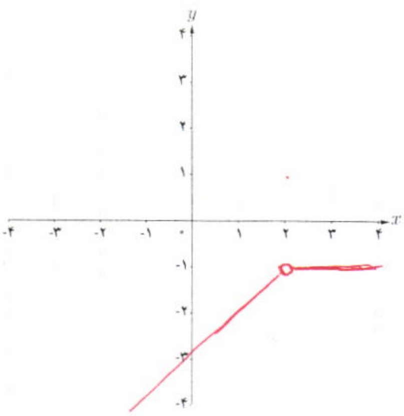
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

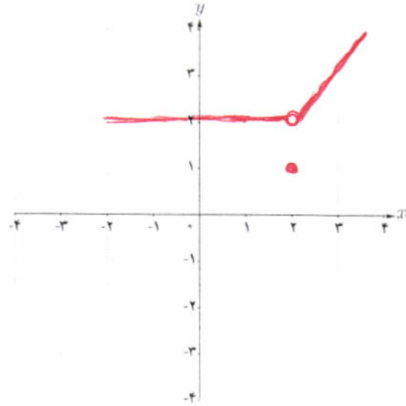
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

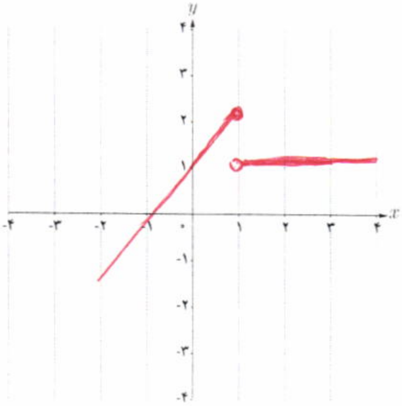
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



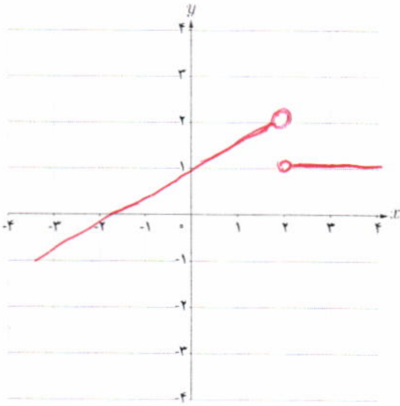
(الف)



(ب)

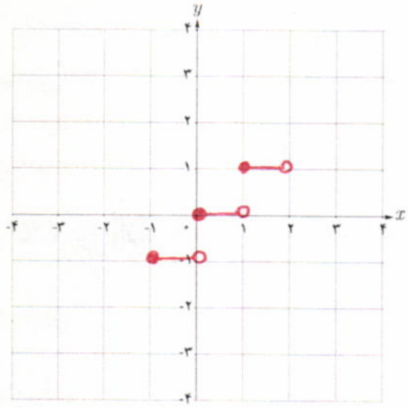


(پ)



(ت)

فعالیت



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر

$f(x)$ به عدد ..0.. نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ..0..$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟ خیر، زیرا

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(۱,۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^+} [x] = \lim\limits_{x\to ۱^+} g(x) = ۱$.

به همین ترتیب، در $(۰,۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^-} [x] = \lim\limits_{x\to ۱^-} h(x) = ۰$.

اگر دوتابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی :

اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (درصورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

مثال : مقدار حد راست تابع $f(x) = \dfrac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=۰$ به دست آورید.

حل : می‌دانیم روی بازهٔ $(۰,۱)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازهٔ $(۰,۱)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=۰$ برابر است بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x\to ۰^+} g(x) = ۰$$

کار در کلاس

۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید:

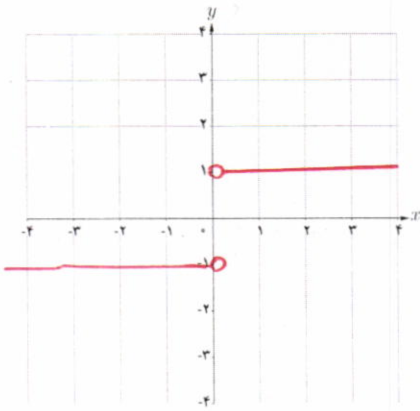
الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



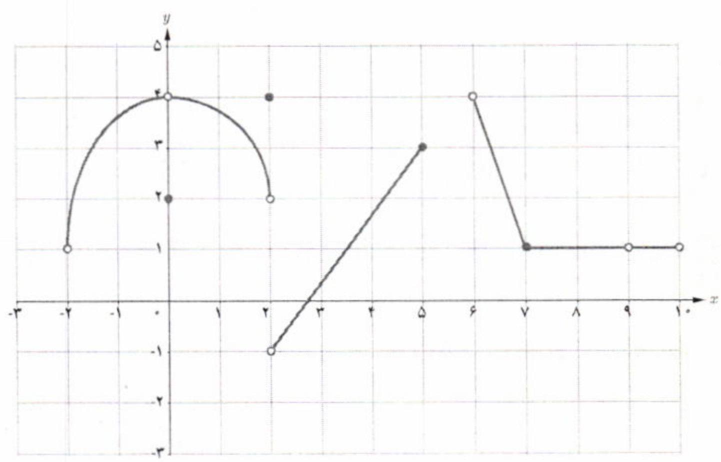
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=1\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 0} f(x)=\text{وجود ندارد}$$

زیرا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim_{x\to 0} f(x)=4$

ب) $\lim_{x\to 2} f(x)=$ وجود ندارد.

پ) $\lim_{x\to 5} f(x)=$ وجود ندارد.

ت) $\lim_{x\to 6^-} f(x)=4$

ث) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=1$

$x\to (-2)^+$

ج) $\lim_{x\to 8} f(x)=1$

ج) $\lim_{x\to 9} f(x)=1$

۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

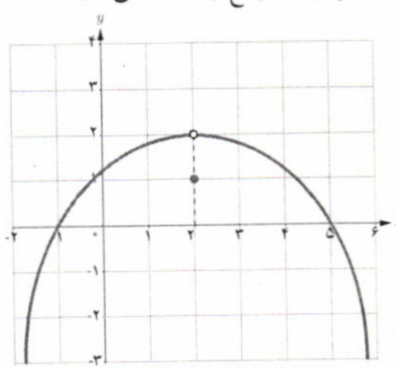
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۰ نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=(0)^2+2(0)=0$$

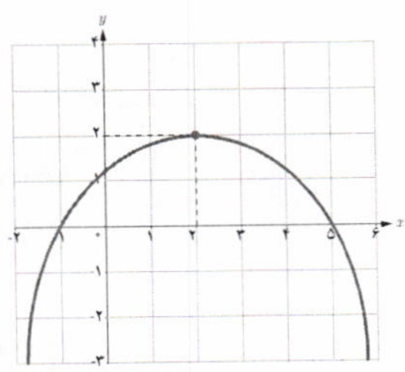
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2(0)+1=1$

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ خیر؛ زیرا $\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)$

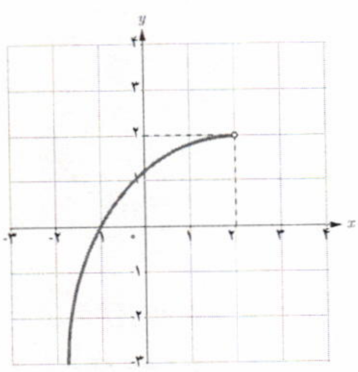
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



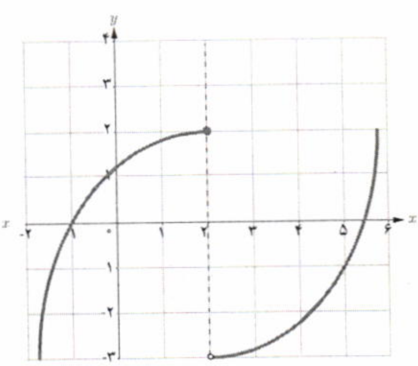
(الف)



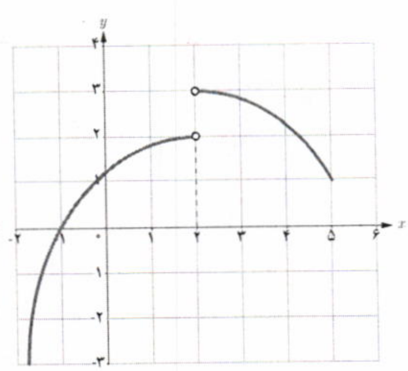
(ب)



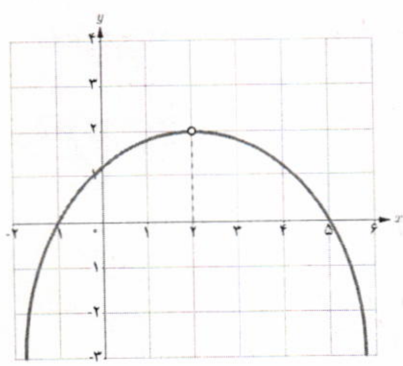
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

ـ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

ـ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)

ـ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)

ـ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

ـ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^{2}-x}$ در نقطهٔ $x=1$ چه می‌توان گفت؟

تعیین علامت

$x^2-x\geq 0 \rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow$ تابع در همسایگی چپ یک تعریف شده است $\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\sqrt{(1)^2-(1)}=0$

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می‌توان گفت؟

$x\to 2^+ \Rightarrow [x]=2$

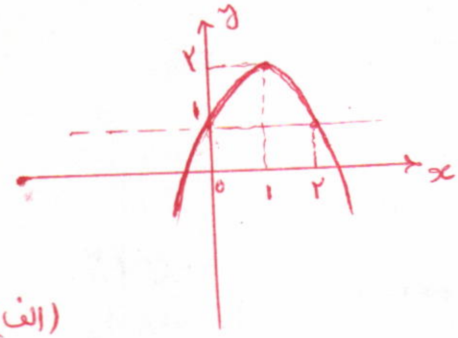
$\Rightarrow [x]-2=0 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\dfrac{x}{[x]-2}=$ وجود ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}[f(x)]$

ب) $\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)



(الف)

$\lim_{x\to 1}[f(x)]=1$

در همسایگی ۱ و نه در خود یک

$1<f(x)<2$

$\rightarrow [f(x)]=1$

(ب)

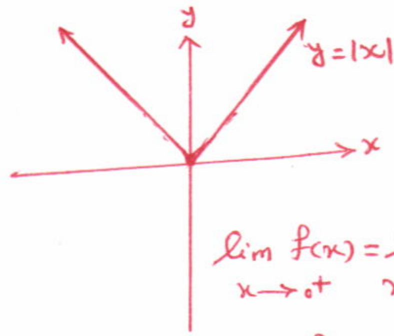
$\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right]=[2^-]=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ عدد نزدیک به ۲ است.

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟



الف)

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

$\rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$

ب) $f(x)=|x|$

$a\geq 0 \rightarrow |a|=a$

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=a=|a|$

$a<0 \rightarrow |a|=-a$

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=-a=|a|$

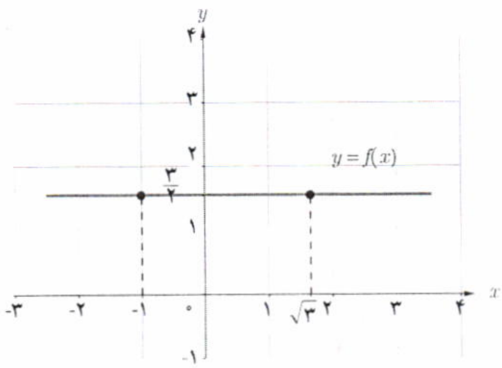
درس ۳

قضایای حد

در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

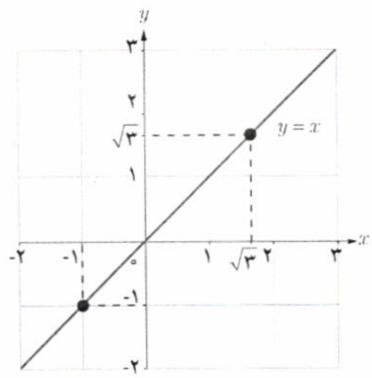
فعالیت

الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{3}{2}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x) = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \frac{3}{2}$

ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x)=x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} g(x) = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -1$

قضیه :

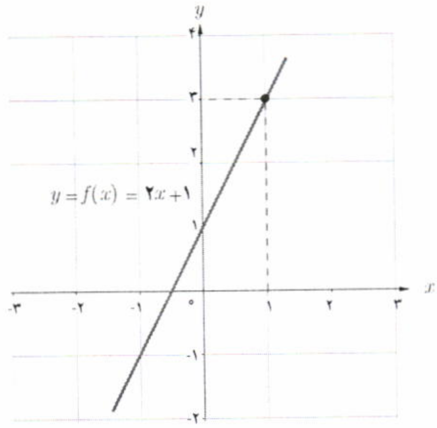
الف) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی، $\lim\limits_{x\to a} c = c$

ب) حد تابع همانی $g(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a است. یعنی، $\lim\limits_{x\to a} x = a$

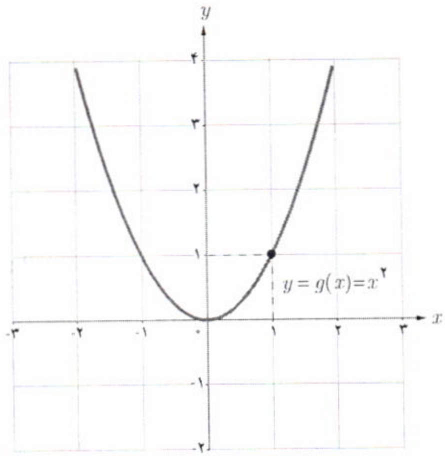
فعالیت

توابع $f(x) = 2x+1$ و $g(x)=x^2$ را در نظر بگیرید.

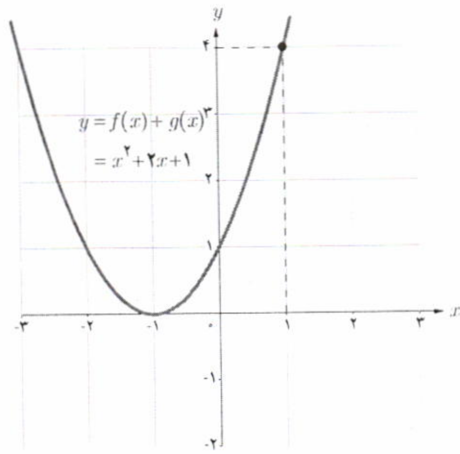
الف) با توجه به نمودار توابع f، g، $f+g$ و $f-g$، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



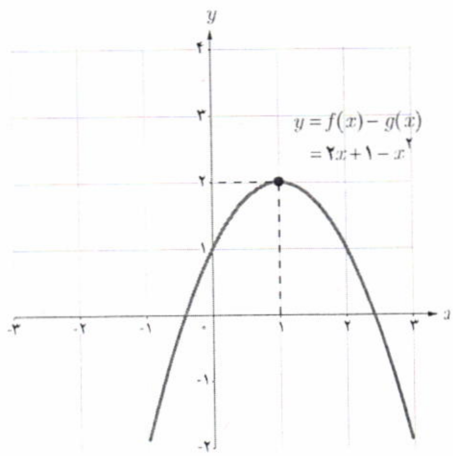
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ldots$ ۳



$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \ldots$ ۱



$\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big) = \ldots$ ۴



$\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)-g(x)\big) = \ldots$ ۲

ب) با استفاده از قسمت (الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$$

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آن‌گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=L_1.L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیهٔ فوق، توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$)

الف) $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x)=\lim\limits_{x\to a} c\times\lim\limits_{x\to a} f(x)$

$=c\times\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times f(x)\right)$

$=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}\left((-1)f(x)\right)=-1\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

✤ تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1، ...، f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+\cdots+f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a}f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

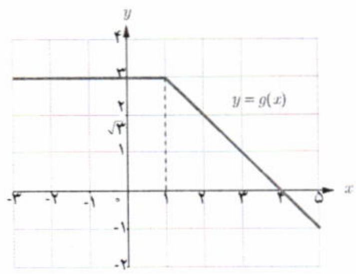
که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

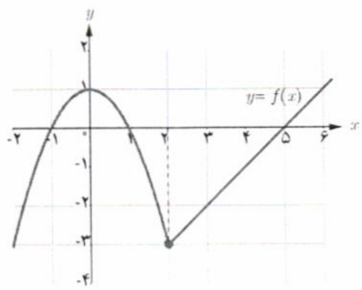
$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

✤ مثال : دو تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^{۲} & x<۲\\ x-۵ & x\geq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۳ & x<۱\\ ۴-x & x\geq ۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حد توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را در نقطه $x=۲$ به‌دست آورید.

✤ حل : ابتدا حد دو تابع f و g را در نقطه $x=۲$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.





با توجه به نمودارها داریم: $\lim_{x\to ۲}f(x)=-۳$ و $\lim_{x\to ۲}g(x)=۲$.

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حدهای مورد نظر می‌پردازیم :

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to ۲}f(x)+\lim_{x\to ۲}g(x)=-۳+۲=-۱$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to ۲}f(x)-\lim_{x\to ۲}g(x)=-۳-۲=-۵$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to ۲}f(x)\right)\left(\lim_{x\to ۲}g(x)\right)=(-۳)(۲)=-۶$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to ۲}f(x)}{\lim_{x\to ۲}g(x)}=\frac{-۳}{۲}$$

✤ مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to\sqrt{۲}}(x^{۴}+۳x-۱)=\lim_{x\to\sqrt{۲}}x^{۴}+\lim_{x\to\sqrt{۲}}۳x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=(\lim_{x\to\sqrt{۲}}x)^{۴}+۳\lim_{x\to\sqrt{۲}}x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=\left(\sqrt{۲}\right)^{۴}+۳\left(\sqrt{۲}\right)-۱=۴+۳\sqrt{۲}-۱=۳+۳\sqrt{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to۳}x\,|\,x\,|=\left(\lim_{x\to۳}x\right)\times\left(\lim_{x\to۳}|\,x\,|\right)=۳\times|\,۳\,|=۹$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}+۷}{۱-x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x^{۲}+۷)}{\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(۱-x)}=\frac{۴\left(\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}x\right)^{۲}+۷}{۱-\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}x}=\frac{۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند $p(x)=b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۱x+b_۰$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه a برابر است. یعنی :

$$\lim_{x\to a}(b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۰)=b_na^n+b_{n-۱}a^{n-۱}+\cdots+b_۰$$

کار در کلاس

الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to-۱}x^{۴}=(-۱)^{۴}=۱$$

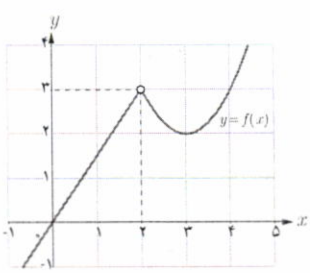
$$۲)\ \lim_{x\to۱۰}(۵x^{۳}-۶|x|+۱)=۵(۱۰)^{۳}-۶|۱۰|+۱=۴۹۴۱$$

$$۳)\ \lim_{x\to۲}\frac{x^{۲}+۴x+۴}{۴x^{۳}-۷x+۱}=\frac{(۲)^{۲}+۴(۲)+۴}{۴(۲)^{۳}-۷(۲)+۱}=\frac{۱۶}{۵}$$

$$۴)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x-[x]}{۱-x}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}-[\frac{۱}{۲}]}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}-۰}{\frac{۱}{۲}}=۱$$



ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $\lim\limits_{x\to۲}x\,f(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to۲}x=۲$$

$$\lim_{x\to۲}f(x)=۳$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۲}xf(x)=\lim_{x\to۲}x\times\lim_{x\to۲}f(x)=۲\times۳=۶$$

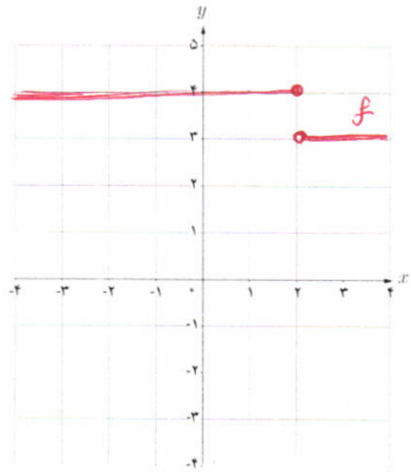
فعالیت

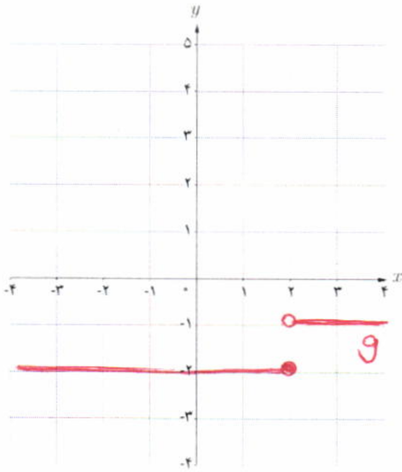
دو تابع $f(x)=\begin{cases}4 & x\le 2\\ 3 & x>2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-2 & x\le 2\\ -1 & x>2\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

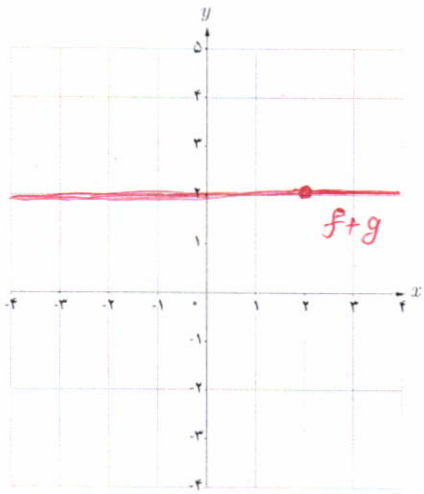
الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2 & x\le 2\\ 2 & x>2\end{cases}$$

ب) نمودار توابع f، g و $f+g$ را رسم کنید.







پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=2$ وجود دارد؟ خیر

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=2$ وجود دارد؟ بله

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=2$ استفاده کرد؟ چرا؟

خیر

شرط استفاده از این قضیه این است که توابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

کار در کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

خیر؛ توابع زیر در $x=۳$ حد ندارد ولی $f+g$ در این نقطه حد دارد.

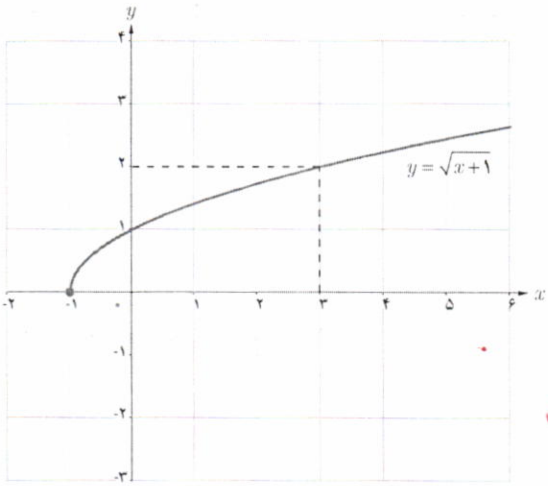
$f(x)=\begin{cases} -۱ & x\geq ۳ \\ ۱ & x<۳ \end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۳ \\ -۱ & x<۳ \end{cases}$

ب) ثابت کنید اگر $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

$\overset{\text{موجود}}{\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))}-\overset{\text{موجود}}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود

فعالیت

در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.



الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}$ را بیابید.

$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=۲$

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}$ برقرار است؟

$\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}=\sqrt{۴}=۲$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}$

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال :

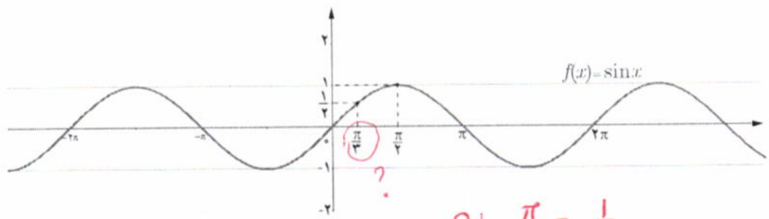
۱) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ (برای nهای زوج a باید مثبت باشد)

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{۲x-۱}}{۳x-۴}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۲x-۱}}{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x-۴)}=\dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۱)}}{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x-۴)}=\dfrac{\sqrt{۲(۱)-۱}}{۳(۱)-۴}=-۱$

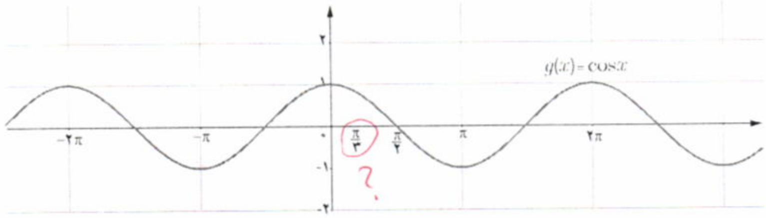
حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در زیر رسم شده‌اند.



$\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$



الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \sin x = \frac{۱}{۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = ۰$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = -۱$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x)=\sin x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟ بله $\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x)=\cos x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟ بله $\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

قضیه: برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

✤ مثال:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} (۲\cos^۲ x - \sin x) = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}) - \sin(\frac{\pi}{۶}) = ۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} = ۲/۵$$

کار در کلاس

مقدار حدهای زیر را بیابید. $\pi\cos\pi = \pi\times(-1)$

۱) $\lim\limits_{x\to -\pi} \frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to-\pi}\pi\cos x}{\lim\limits_{x\to-\pi} x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}}\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

❖ تذکر : همه قضایا و فعالیت‌های بیان شده دربارهٔ حد (دوطرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به‌عنوان مثال، اگر حد چپ توابع f و g در a موجود باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a^-}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a^-} f(x) + \lim_{x\to a^-} g(x)$$

❖ مثال :

۱) $\lim\limits_{x\to a^+} x^n = \lim\limits_{x\to a^+} \overbrace{(x\times\cdots\times x)}^{n \text{ بار}} = (\lim\limits_{x\to a^+} x)\times\cdots\times(\lim\limits_{x\to a^+} x) = a\times\cdots\times a = a^n$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x-[x]}{x^۲+۲} = \frac{\lim\limits_{x\to ۱^-}(x-[x])}{\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+۲)} = \frac{\lim\limits_{x\to ۱^-} x - \lim\limits_{x\to ۱^-}[x]}{\lim\limits_{x\to ۱^-} x^۲ + \lim\limits_{x\to ۱^-} ۲} = \frac{۱-۰}{\underset{۱+۲}{\cancel{۳}}} = \frac{۱}{۳}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} (\cos x - \sin x) = \cos(۰) - \sin(۰) = ۱$

کار در کلاس

مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲}$ را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲} = \frac{\lim\limits_{x\to ۲^+}\sqrt{x-۲}}{\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]+۲} = \frac{۰}{۲+۲} = ۰$$

ب) $= \dfrac{(-\frac{5}{3}+\pi)\left(\underbrace{3(-\frac{5}{3})+5}_{0}\right)}{(3(-\frac{5}{3})+6)((-\frac{5}{3})^3+1)} = 0$

ت) $= \dfrac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4} = \dfrac{1-2}{2-4} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = (\sqrt{9}-9)^3 = -216$

ب) $\lim\limits_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = -6(-1)^7-4(-1)+5 = 15$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}} \dfrac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)}$

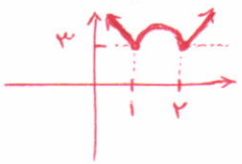
ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})} = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x+\cos x} = \dfrac{\sin 0}{0+\cos 0} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{|\cos x|}{x-\pi} = \dfrac{|\cos\frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2}-\pi} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟ خیر



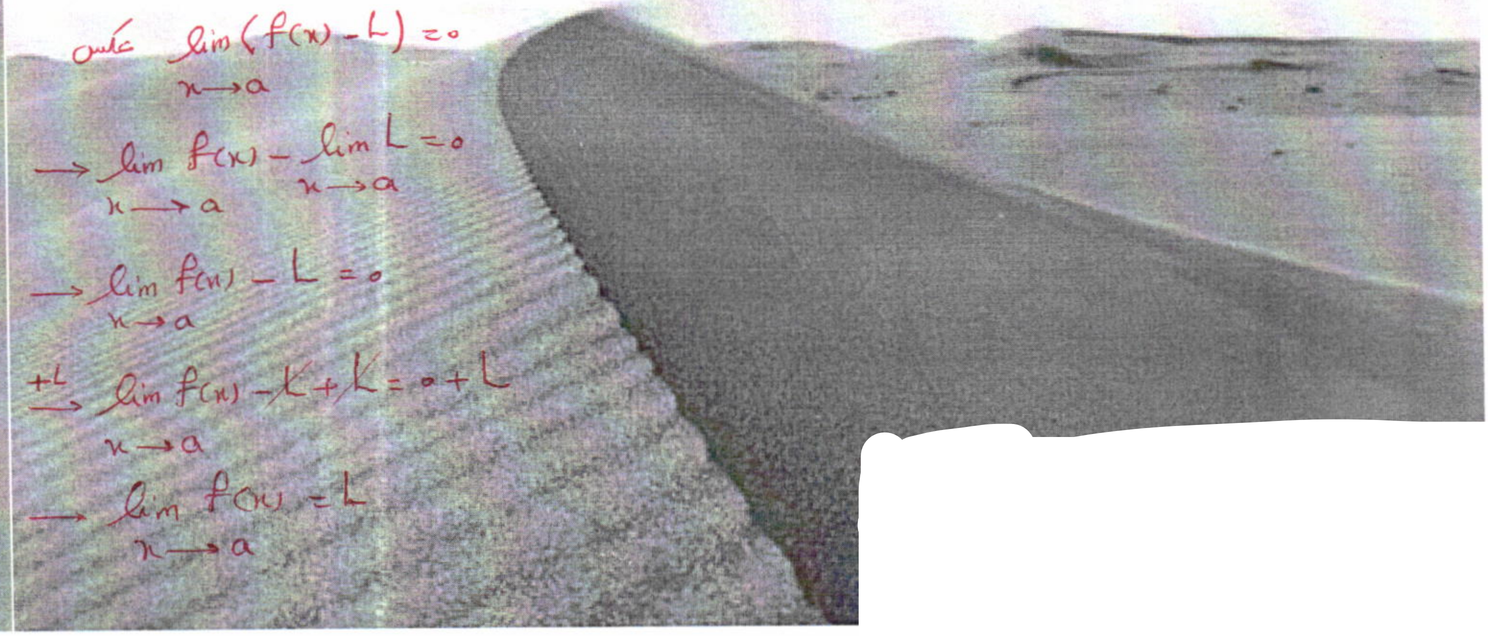
به تابع زیر توجه کنید که شرایط داده شده را دارد، ولی ثابت نیست.

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{x^2-1} = 4$.

$\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} x^2-1} = 4 \longrightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{3} = 4 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 12$

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = L - L = 0$



عکس $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = 0$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = 0$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - L = 0$

$\xrightarrow{+L} \lim\limits_{x\to a} f(x) \cancel{-L} \cancel{+L} = 0 + L$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

$\lim\limits_{x\to ۱} ۳x+۲=۵$ / $\lim\limits_{x\to ۱} x^۲-۱=۰$ / $\lim\limits_{x\to ۱} [x]-۱=$ وجود ندارد

حدچپ $\neq$ حد راست

/ $y=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد، حدچپ $\neq$ حد راست

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=۳x+۲ \quad , \quad y=x^۲-۱ \quad , \quad y=[x]-۱ \quad\quad y=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=۳x+۲$	$g(x)=x^۲-۱$	$f(x)+g(x)=\ldots$ $x^۲+۳x+۱$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-۱$	$g(x)=x^۲-۱$	$f(x)\,g(x)=\cdots$ $(x^۲-۱)([x]-۱)$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=۳x+۲$	$g(x)=[x]-۱$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۳x+۲}{[x]-۱}$
تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$		$f^۲(x)=۴$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^۲-۱$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^۲-۱}$

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟ حد ندارد.

اثبات: به روش برهان خلف فرض می‌کنیم که تابع $f+g$ حد دارد. لذا:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ (حد دارد) $-\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (حد دارد)

$=\lim\limits_{x\to a}(\cancel{f(x)}+g(x)-\cancel{f(x)})$

$=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ حد دارد، خلاف فرض

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-۳+b$

$\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)}\dfrac{x^۲-۲}{-x}=\dfrac{۱-۲}{۱}=-۱$

$-۳+b=-۱ \to b=۲$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$\lim\limits_{x\to -۲}\left(۲g(x)-f(x)\right)=۲(۲)-۰=۴$

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{g(x)}{f(x)}=۰$

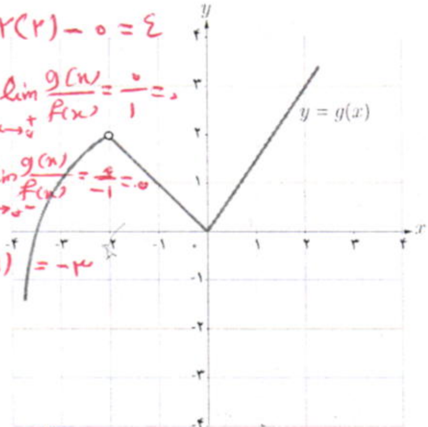
$\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{۰}{۱}=۰$

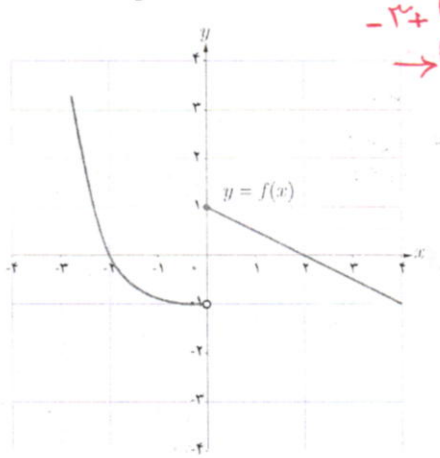
$\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{۰}{-۱}=۰$

$\lim\limits_{x\to -۳}-۳\sqrt{g(x)}=-۳(۱)=-۳$

$\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$

$=\sqrt[۳]{۸(۳)}=۲\sqrt[۳]{۳}$





درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است. در این‌گونه موارد، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.[1]

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ را بیابید.

حل : با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$، پس نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در واقع از $\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}$ عبارت $\frac{0}{0}$ حاصل می‌شود. در این‌گونه موارد، سعی می‌کنیم کسر را ساده کرده و سپس حد را محاسبه نماییم :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=0$$

---

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به‌صورت $x+b$ یا $2x+b$ خواهند بود.

✤ مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$ را بیابید.

✤ حل : حد صورت و مخرج کسر در $x=۱$، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+۸}-۳$ وجود دارد. در این‌گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+۸}+۳$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\left(\sqrt{x+۸}\right)^۲-(۳)^۲}{(x-۱)\left(\sqrt{x+۸}+۳\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x+۸}+۳)}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۸}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{\sqrt{۳x-۵}-۲}\times\frac{\sqrt{۳x-۵}+۲}{\sqrt{۳x-۵}+۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳x-۹}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳\cancel{(x-۳)}}=\frac{۶\times ۴}{۳}=۸$$

✤ مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\cos x}{x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x(۱+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=۱\times ۰=۰$$

توجه: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$۲)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{3x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

توجه: $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

✤ مثال : مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

✤ حل : قرار می‌دهیم : $t=\sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x=t^2-1$ و بنابراین،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t+1)}=\frac{1}{2}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

✤ مثال : مقدار $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

✤ حل : قرار می‌دهیم : $t=x-\frac{\pi}{2}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شود، t به صفر نزدیک می‌شود و داریم $x=t+\frac{\pi}{2}$.
پس،

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{2(t+\frac{\pi}{2})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin t}=-2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=-2\times 1=-2$$

کار در کلاس

$x-\frac{\pi}{4}=t \rightarrow 2x-\frac{\pi}{2}=2t \rightarrow 2x=2t+\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow 4x-\pi=4t$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{4x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t+\frac{\pi}{2})-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t}\times\frac{\cos 2t+1}{\cos 2t+1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\times\frac{\sin 2t}{\cos 2t+1}\times\frac{-1}{2}=1\times\frac{\sin 2(0)}{\cos 2(0)+1}\times\frac{-1}{2}=0$$

ج) $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{x(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}{(\cancel{x-1})(x+\sqrt{x})}=\frac{2}{2}=1$

تمرین

$=\lim_{x\to-1}\frac{2x-1}{3x}=\frac{-3}{-3}=1$

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-1}\frac{(\cancel{x+1})(2x-1)}{3x(\cancel{x+1})}$

ب) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{2(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}}=8$

پ) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)}\times\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{16}$

ت) $\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(\cancel{4-x})(3+\sqrt{2x+1})}{2(\cancel{4-x})(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

ث) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

ج) $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=$ بالا

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

۲ اگر $f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x}$ ، حاصل $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}f(x)g(x)$ را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{\cancel{2}}x}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=0$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\cos x-\sin x})}{\cancel{\cos x-\sin x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

پ) $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{|1-\cos x|}$

ت) $\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos2x}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos2x)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-2\cos^2x+1)}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4(1-\cos^2x)}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{\sin x}\times4$

$=1\times1\times4=4$

ث) $\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}$

ج) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}$

ح) $\lim_{x\to1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

$x<0$ ربع چهارم x در $\rightarrow 0<\cos x<1$
$\rightarrow -1<-\cos x<0 \rightarrow 0<1-\cos x<1 \rightarrow |1-\cos x|=1-\cos x$

پ) $=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos^2x}\times(1+\cos x)$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{\sin^2x}(1+\cos x)=1\times(1+1)=2$

ث) $\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}\times\frac{\cos(t-\pi)-1}{\cos(t-\pi)-1}=\lim_{t\to0}\frac{\cos^2(t-\pi)-1}{t}\times\frac{1}{\cos(t-\pi)-1}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin^2t}{t}\times\frac{1}{\cos(t-\pi)-1}$

$=0$

$\left.\begin{matrix}t=x+\pi\\x\to\pi\end{matrix}\right\}\rightarrow t\to0$

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۴۴ (حسابان ۱)

تمرین ۳ :

ث) $$\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+۱}{x+\pi}\ \overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{x+\pi=t}{=}}\ \lim_{t\to ۰}\frac{\cos(t-\pi)+۱}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos t\cos\pi+\sin t\sin\pi+۱}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\overbrace{\cos t\cos\pi}^{-\cos t}+\overbrace{\sin t\sin\pi}^{۰}+۱}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos t}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos t}{t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos^{۲} t}{t}\times\frac{۱}{۱+\cos t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}=۱\times\frac{۰}{۲}=۰$$

ج) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\ \overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{x-a=t}{=}}\ \lim_{t\to ۰}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos t}{t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos t}{t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos^{۲} t}{t}\times\frac{۱}{۱+\cos t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}\times\sin a$$

$$=۱\times\cos a-۱\times\frac{۰}{۱+۱}\times\sin a=\cos a$$

چ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶(x-\frac{\pi}{۳})}\ \overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{x-\frac{\pi}{۳}=t}{=}}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{۱}{۶}\times\frac{\sin t}{t}=\frac{۱}{۶}\times۱=\frac{۱}{۶}$$

۱۴۴٫۱

$$\text{ح)}\ \lim_{x\to ۱} \frac{۲x - ۳\sqrt{x} + ۱}{x - ۱} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to ۱} \frac{۲x + ۱ - ۳\sqrt{x}}{x - ۱} \times \frac{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}}{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۲x + ۱)^۲ - (۳\sqrt{x})^۲}{x - ۱} \times \frac{۱}{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{۴x^۲ + ۴x + ۱ - ۹x}{x - ۱} \times \frac{۱}{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{۴x^۲ - ۵x + ۱}{x - ۱} \times \frac{۱}{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x - ۱)(۴x - ۱)}{x - ۱} \times \frac{۱}{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{۴x - ۱}{۱} \times \frac{۱}{۲x + ۱ + ۳\sqrt{x}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

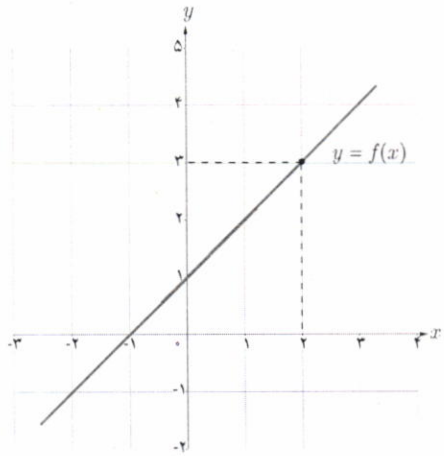
١٤٤,٢

درس ۵

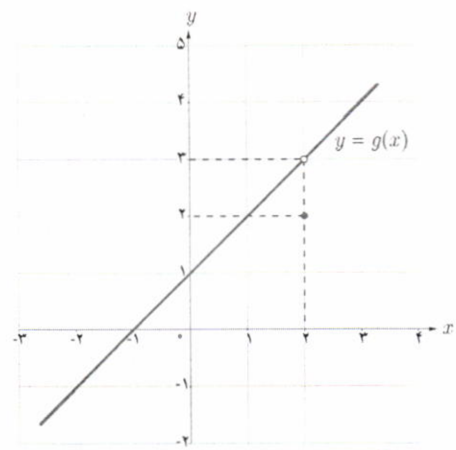
پیوستگی

فعالیت

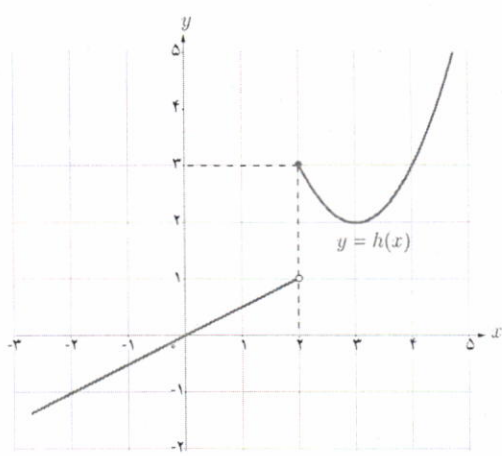
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



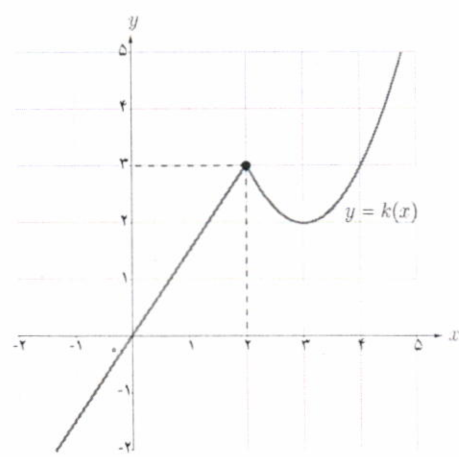
$f(۲)=$ ۳ $\qquad \lim\limits_{x \to ۲} f(x) =$ ۳



$g(۲)=$ ۲ $\qquad \lim\limits_{x \to ۲} g(x) =$ ۳



$h(۲)=$ ۳ $\qquad \lim\limits_{x \to ۲} h(x) =$ وجود ندارد



$k(۲)=$ ۳ $\qquad \lim\limits_{x \to ۲} k(x) =$ ۳

ب) برای کدام‌یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟ f و K

پ) در نمودار کدام‌یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟ f و K

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=۲$ *پیوسته* است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a، باید شرایط زیر برقرار باشند :

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

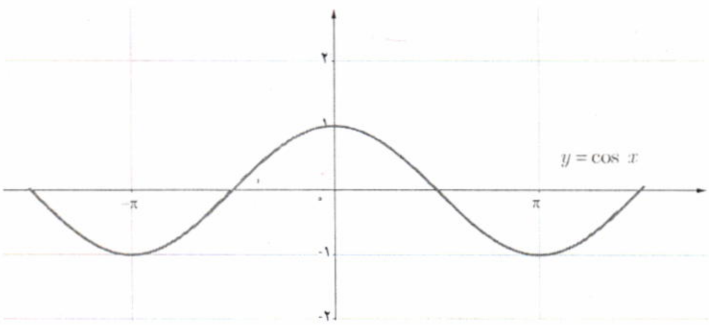
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

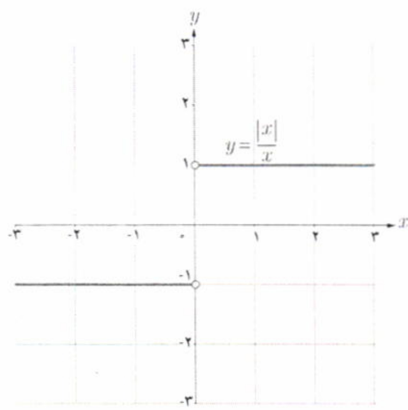
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

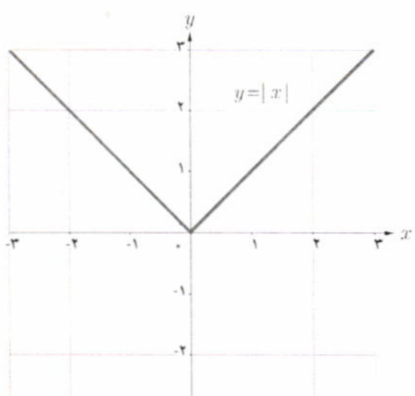
هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

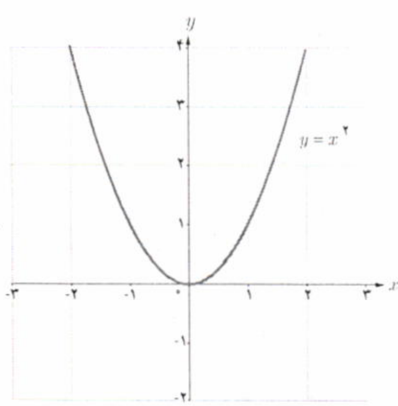
مثال : در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a، $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$. پس توابع $y=\sin x$ و $y=\sqrt[3]{x}$ در هر عدد a، پیوسته‌اند.

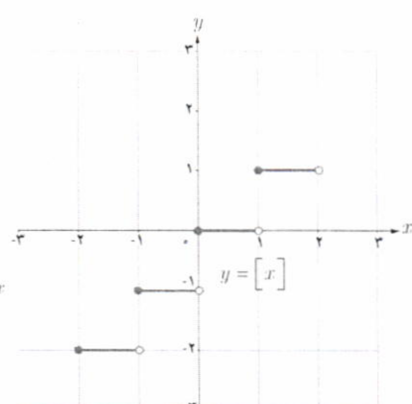
همچنین توابع $y=\cos x$ ، $y=|x|$ و $y=x^2$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y=\frac{|x|}{x}$ و $y=[x]$ این‌چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.











✤ **مثال** : توابع $f(x)=\frac{x^{2}-9}{x-3}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^{2}-9}{x-3} & x\neq 3\\ 6 & x=3\end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

✤ **حل** : از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست.

در مورد تابع g داریم :

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^{2}-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=6=g(3)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

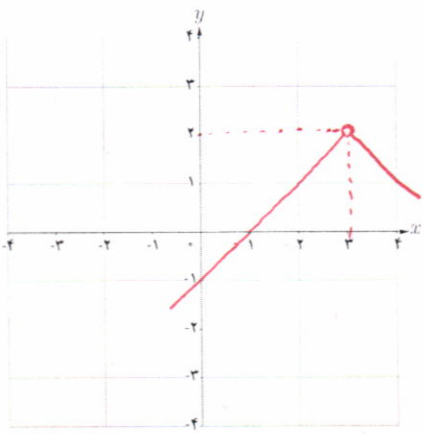
کار در کلاس

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)

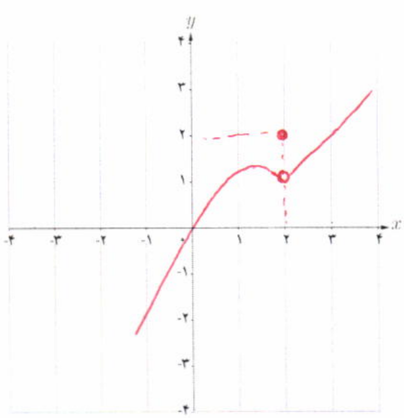
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

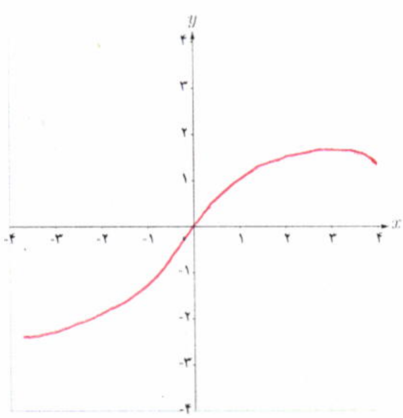
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.



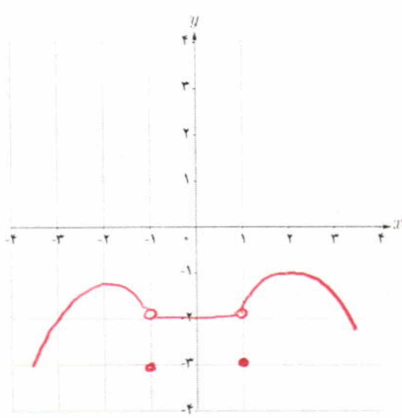
(۱)



(۲)

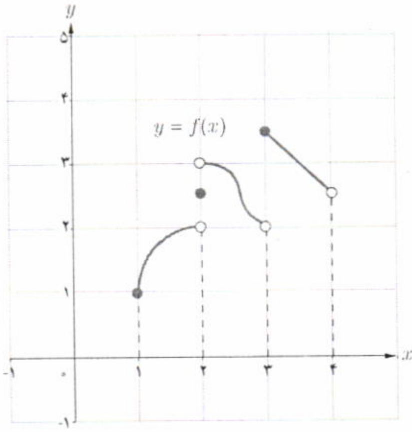


(۳)



(۴)

فعالیت



نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ ناپیوسته است. ۲و۳

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$ برقرار است؟ خیر

پ) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)$ برقرار است؟ خیر

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ برقرار است؟

۱و۳

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

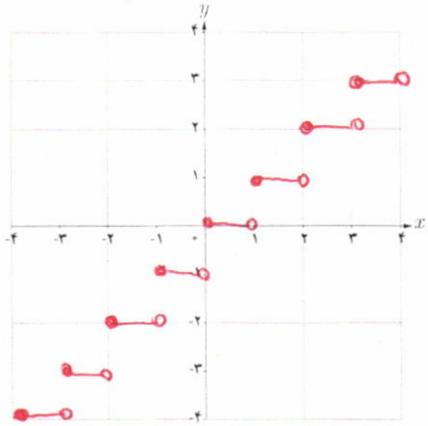
مثال : تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+x & x<۰ \\ ۲ & x=۰ \\ ۲\cos x-\sin x & x>۰ \end{cases}$ داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

حل : داریم $f(۰)=۲$. همچنین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۳x^۲+x)=۰\neq f(۰)$$
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲\cos x-\sin x)=۲\cos(۰)-\sin(۰)=۲=f(۰)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام یک از نقاط مجموعه $\{۲ , \frac{۱}{۲} , ۰\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است. $\frac{۱}{۲}$

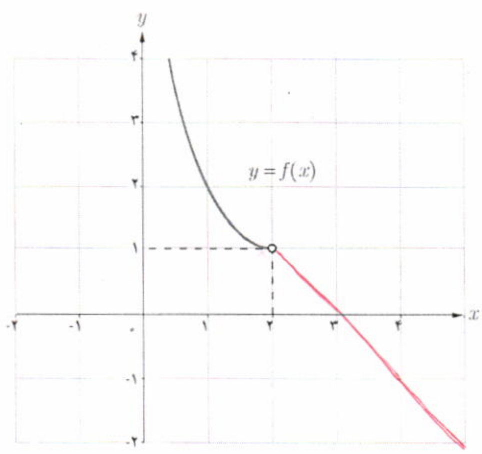
۲ تابع f پیوستگی راست دارد. ۰ و ۲

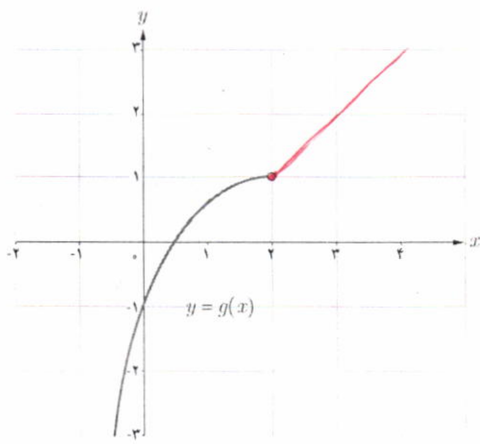
۳ تابع f پیوستگی چپ دارد. هیچکدام

ب) در شکل های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a , b)$ و $(a , b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a,b) پیوسته باشد و در a پیوستگی راست داشته باشد.

تابع f را در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a,b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

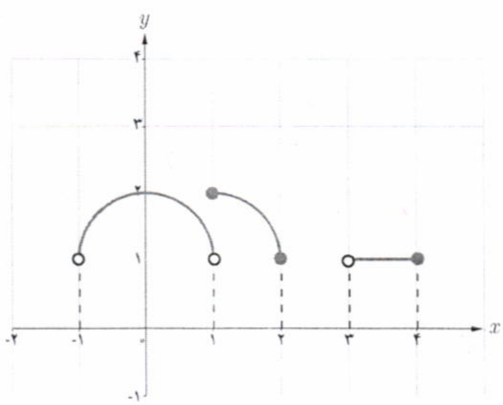
✤ مثال :

۱) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر بازهٔ $[۰,۲]$ پیوسته است.

۲) تابع $f(x)=[x]$ بر بازهٔ $(۰ , ۱)$ پیوسته است، اما بر بازهٔ بسته $[۰ , ۱]$ پیوسته نیست.

کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟

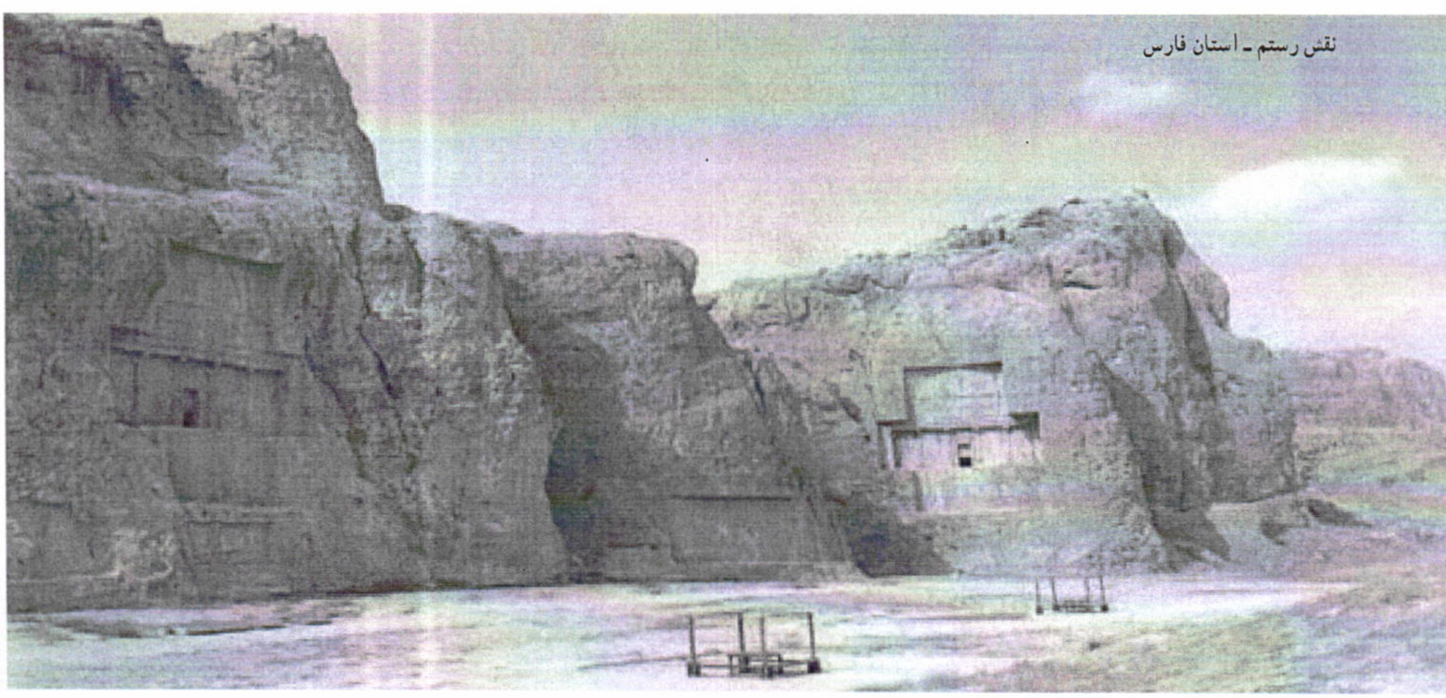


الف) تابع f بر بازه $[۱ , ۲]$ پیوسته است. درست

ب) تابع f در هر نقطه از $[۱ , ۲]$ پیوسته است. نادرست.

پ) تابع f بر بازه $[۳ , ۴]$ پیوسته است. نادرست

ت) تابع f بر بازه $[۰ , ۲]$ پیوسته است. نادرست



نقش رستم ـ استان فارس

تمرین

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-۱|+۲$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\le ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\ge ۱ \end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=۰$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+۱ & x>۰ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

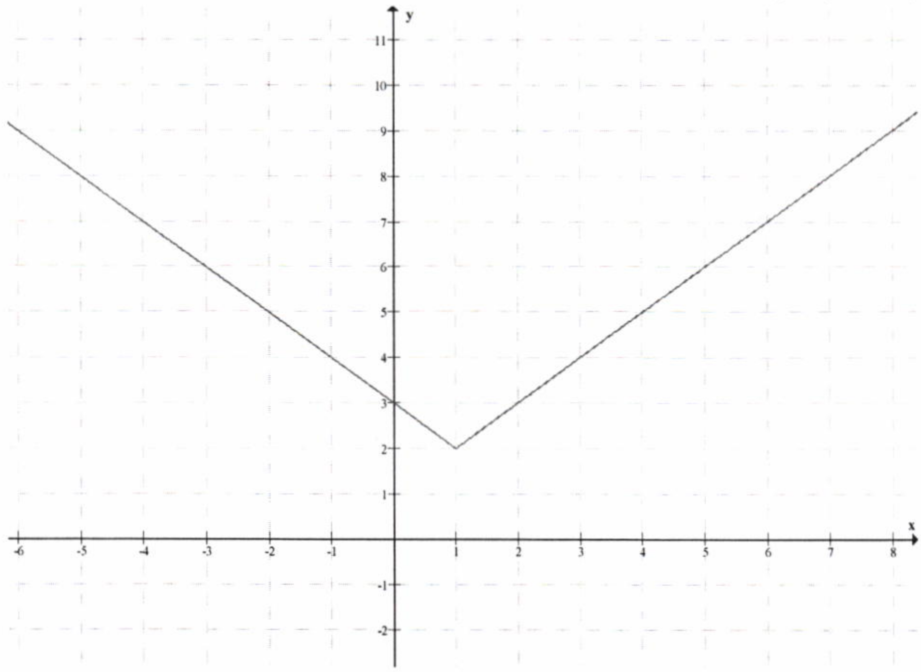
۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & x>۰ \\ b-۱ & x=۰ \\ x-۲a & x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۵۱ (حسابان ۱)

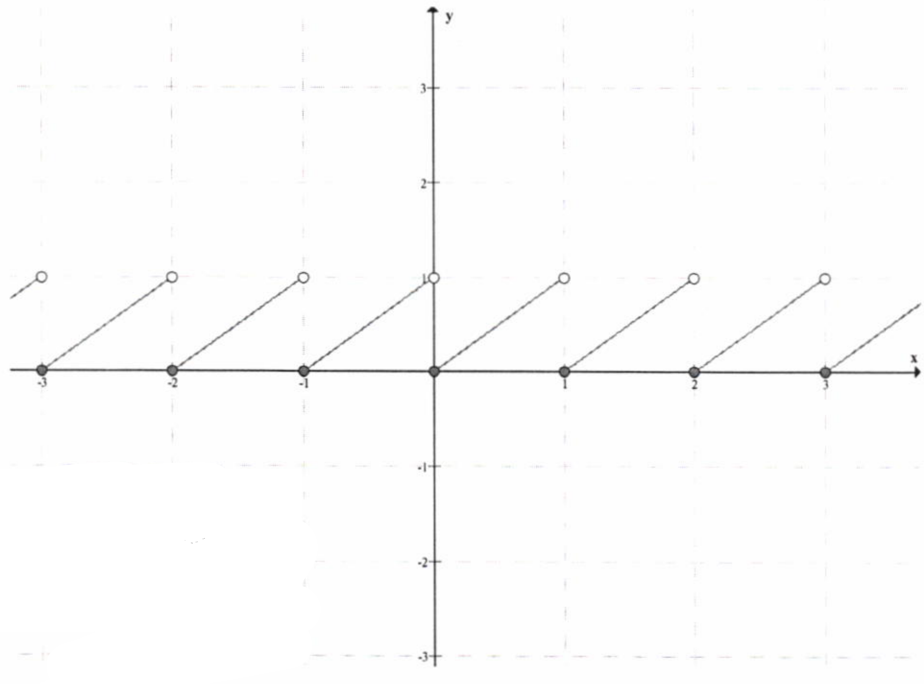
۱ :

الف) $y = |x - 1| + 2$



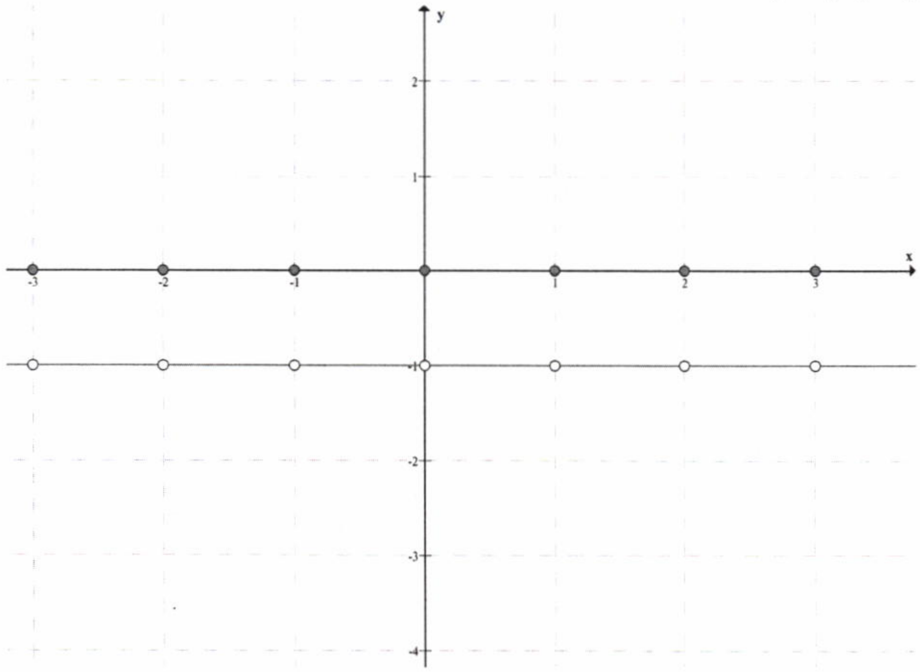
تابع در تمام نقاط پیوسته است.

ب) $y = x - [x]$



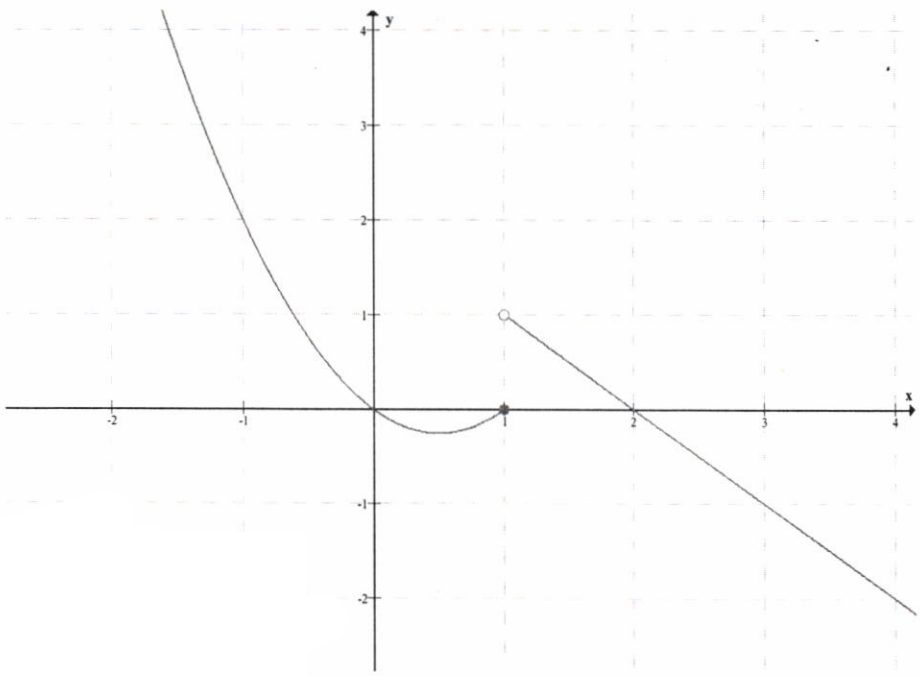
تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد .

پ) $y=[x]+[-x]$



تابع در نقاط با طول صحیح پیوسته نیست.

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\le ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$



تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

***

۱۵۱,۲

۲:

الف)

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲(۱) - ۱ = ۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -(۱) + ۲ = ۱$$

$$f(۱) = a$$

$$\to a = ۱$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱} g(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(x+۲) = ۳$$

$$g(۱) = a$$

$$\to a = ۳$$

پ)

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x) = \lim_{x\to ۱^+} [x] + a = ۱ + a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} h(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$h(۱) = ۱ + a$$

$$\to ۱ + a = \frac{۱}{۲} \to a = -\frac{۱}{۲}$$

ت)

$$\lim_{x\to ۱^+} k(x) = \lim_{x\to ۱^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} k(x) = \lim_{x\to ۱^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a)[۰] = ۰$$

$$k(۱) = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\to ۱ - a = ۰ \to a = ۱$$

۱۵۱٫۳

۳ :

الف)

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۲(۰)+۱ = ۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۰$$

$$f(۰) = a$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی، صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

ب)

$$\lim_{x\to ۰^+} g(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{ax}{x} = a$$

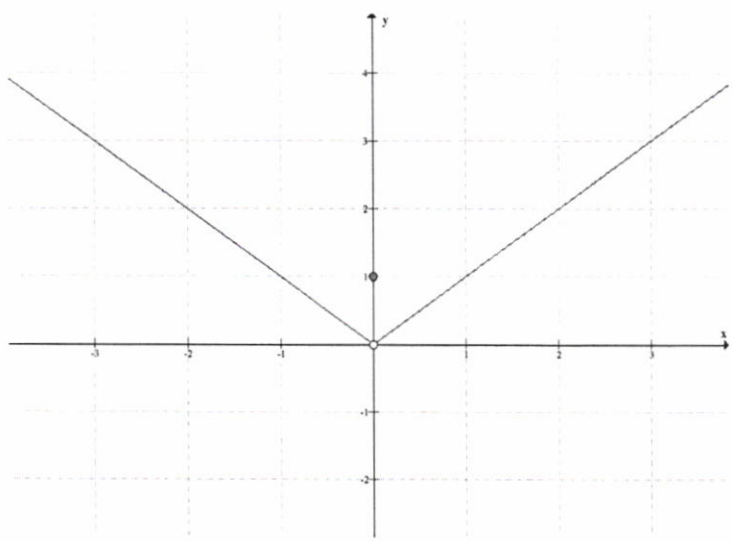
$$\lim_{x\to ۰^-} g(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$$g(۰) = ۱$$

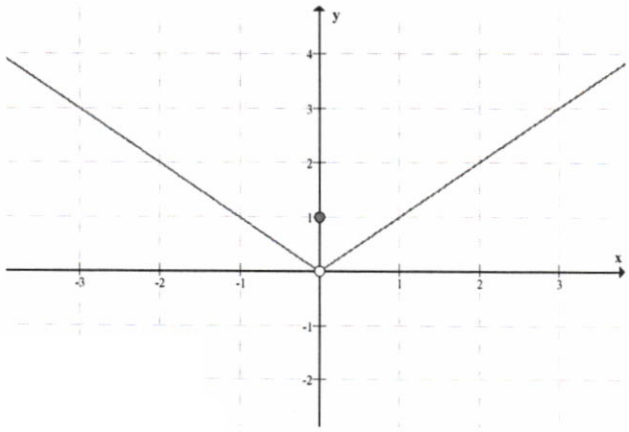
برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه ی صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

***

۴ : الف) $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$



ب) $f(x)=\begin{cases} ۲+x^{۲} & x\le ۲ \\ ۳ & ۲<x<۳ \\ x-۲ & x\ge ۳ \end{cases}$



پ) $f(x)=\dfrac{۱}{|x|-۲}$

۵: باید $k<۳$ باشد.

۶:

$۳-x\ge ۰ \rightarrow x\le ۳$

تابع در بازه‌ی $(-\infty,۳]$ پیوسته است.

۷:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos^{۲} x}{x^{۲}}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\frac{۱}{۱+\cos(۰)}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(x-۲a)=-۲a$$

$$f(۰)=b-۱$$

$$\rightarrow\begin{cases} -۲a=\frac{۱}{۲}\rightarrow a=-\frac{۱}{۴} \\ b-۱=\frac{۱}{۲}\rightarrow b=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۱۵۱,۵