



معرفی نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

برای هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه ، تعریف می کنیم :

سینوس

$$\sin(\text{زاویه حاده}) = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل}}{\text{اندازه وتر}}$$

کسینوس

$$\cos(\text{زاویه حاده}) = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور}}{\text{اندازه وتر}}$$

نسبت های
مثلثاتی

تانژانت

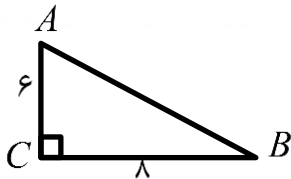
$$\tan(\text{زاویه حاده}) = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل}}{\text{اندازه ضلع مجاور}}$$

مثال : با توجه به شکل روبرو نسبت های مثلثاتی زاویه ی A را تعیین کنید .

پاسخ : ابتدا اندازه ی وتر مثلث را با استفاده از قضیه ی فیثاغورث محاسبه می کنیم :

$$AB^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AB = 10$$

حال طبق تعاریف نسبت های مثلثاتی عمل می کنیم : $\sin A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ و $\cos A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ و $\tan A = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$



مثال : در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ را بدست آورید . (برداشت از جزوه استاد جابر عامر)

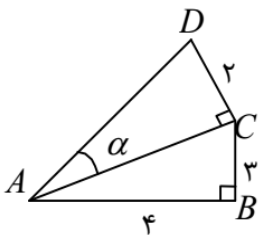
پاسخ : ابتدا طبق فیثاغورث در مثلث ABC اندازه ی ضلع AC را محاسبه می کنیم :

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

حال مجدداً رابطه ی فیثاغورث را برای مثلث ADC می نویسیم و اندازه ی ضلع AD را بدست می آوریم :

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 5^2 + 2^2 = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}$$

در نتیجه طبق تعریف سینوس می توان نوشت : $\sin \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{\sqrt{29}}$



مثال : در صورتی که θ زاویه ی حاده فرض شود ، ثابت کنید $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

پاسخ : ابتدا مثلث قائم الزاویه ی دلخواهی با یک زاویه ی حاده ی θ رسم می کنیم .

طبق تعریف نسبت های مثلثاتی و با توجه به این که طبق فیثاغورث $y^2 + z^2 = x^2$ است ، می توان نوشت :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = \frac{y^2 + z^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

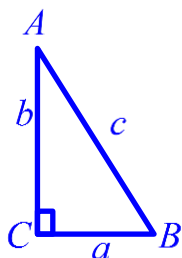
مثال : اگر در مثلث قائم الزاویه ی ABC با راس قائم C ، $\tan B = \frac{5}{12}$ فرض شود ، مقدار $\sin A$ را بدست آورید .

پاسخ : ابتدا مثلث قائم الزاویه ای به راس قائم C رسم می کنیم . طبق تعریف تانژانت داریم :

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{5}{12} \Rightarrow b = 5k, a = 12k$$

$$c^2 = (12k)^2 + (5k)^2 = 144k^2 + 25k^2 = 169k^2 \Rightarrow c = 13k$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$





تمرین (۱): در صورتی که θ زاویه ی حاده فرض شود ، ثابت کنید $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$.

تمرین (۲): اگر در مثلث قائم الزاویه ABC با راس قائم B ، $\sin A = \frac{1}{6}$ فرض شود ، مقدار $\cos A$ و $\tan A$ را بدست آورید .

معکوس عددی نسبت های مثلثاتی :

همانطور که می دانید برعکس عدد ۲ ، عدد $\frac{1}{2}$ می باشد ، به همین ترتیب برای نسبت های مثلثاتی داریم :

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ : کتانژانت} \quad \text{و} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ : سِکانت} \quad \text{و} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ : کُسیکانت}$$

به طور مثال اگر $\sin x = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه $\csc x = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ خواهد بود .

مثال : در صورتی که $2 \tan x - 3 = 0$ باشد ، حاصل $\tan x + \cot x$ را بیابید .

$$2 \tan x = 3 \Rightarrow \tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cot x = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan x + \cot x = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \quad \text{پاسخ :}$$

زوایای متمم و نسبت های مثلثاتی آنها :

دو زاویه ی نامنفی را متمم گوئیم هرگاه مجموع اندازه های آنها 90° (یعنی $\frac{\pi}{2}$) شود .

به طور مثال دو زاویه ی 28° و 62° متمم یکدیگرند زیرا $28^\circ + 62^\circ = 90^\circ$ است .

مثال : متمم زاویه ی $\frac{\pi}{6}$ رادیان ، چه زاویه ایست ؟ پاسخ : زاویه ای به اندازه ی $\frac{\pi}{3}$ است ، زیرا : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

توجه : در هر مثلث قائم الزاویه ، زوایای حاده متمم یکدیگرند . زیرا مجموع آن دو زاویه در هر حالت 90° است .

نکته : اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند ، آنگاه سینوس یکی با کُسینوس دیگری برابر است و برعکس ، همچنین تانژانت یکی با کُتانژانت دیگری برابر است و برعکس .

$$\text{به عنوان نمونه :} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \cos 8^\circ = \sin 10^\circ \quad \text{و} \quad \tan \frac{\pi}{10} = \cot \frac{2\pi}{5} \quad \text{و} \quad \cot 55^\circ = \tan 35^\circ$$



تمرین (۳): با توجه به قاعده ی زوایای متمم جاهای خالی را مانند نمونه پُر کنید .

الف) $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ ب) $\cos \frac{\pi}{4} = \dots\dots\dots$ پ) $\tan \frac{7\pi}{18} = \dots\dots\dots$ ت) $\cot 89^\circ = \dots\dots\dots$

مثال: کسر $\frac{3 \sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5}}{2 \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{10}}$ را ساده کنید .

پاسخ: با توجه به اینکه $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{10}$ متمم یکدیگرند، نتیجه می شود $\cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{10}$ است. با جایگذاری این تساوی در کسر داریم:

$$\frac{3 \sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5}}{2 \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}}{2 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10}}{3 \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2}{3}$$

تمرین (۴): عبارت $\cos 75^\circ \times \frac{\sin 75^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 75^\circ + \sin 15^\circ}$ را تا حد امکان ساده کنید .

تمرین (۵): در مثلث قائم الزاویه ی ABC ، به راس قائم B ، $b = 2\sqrt{13}$ و $\cot A = \frac{2}{3}$ است. اندازه ی سایر اضلاع مثلث را بیابید.

تمرین (۶) تست: به ازای کدام مقدار θ تساوی $\sin(3\theta + 20^\circ) = \cos 2\theta$ برقرار است؟ (۱) 13° (۲) 16° (۳) 14° (۴) 15°

تمرین (۷): طول اضلاع مثلث ABC را چنان تعیین کنید که مساحت آن ۱۶ واحد مربع و $\tan B = \tan C = 4$ باشد.

مجمع آموزشی استعداد های ناب صالحین آبادان
ریاضیات شانه بزرگ پریشان عالم است.
@sinxcosx
اشفین ملاسعیدی
مثال
 $\sin x + \cos x = 1$