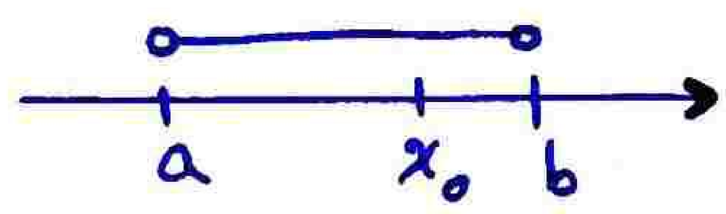
فصل ۵ : حد و پیوستگی

1 : همسایگی و همسایگی محذوف :

بازه‌ی $(1,5)$ را در نظر بگیرید، واضح است که ۲ عضوی از این بازه می‌باشد، بنابراین گوییم $(1,5)$ یک همسایگی برای عدد ۲ است.

همچنین ۳,۷ نیز درون بازه‌ی $(1,5)$ است پس این بازه یک همسایگی برای ۳,۷ نیز است.

در حالت کلی : اگر x_0 یک عدد حقیقی متعلق به بازه‌ی (a,b) باشد، گوییم (a,b) یک همسایگی برای عدد x_0 است :



مثال : سه همسایگی برای عدد ۱,۵- بنویسید.

بازه‌های همچون $(-2,-1)$ ، $(-2,100)$ و $(-100,5)$ و ... همسایگی‌های برای ۱,۵- هستند زیرا ۱,۵- عضو هر کدام از آنهاست.

توجه : همسایگی یک عدد، به صورت بازه‌ی باز همچون (a,b) می‌باشد که a و b هیچکدام $+\infty$ یا $-\infty$ نمی‌باشند بنابراین بازه‌های $[-1,2)$ ، $(-1,2]$ ، $[-1,2]$ ، $(-\infty,3)$ و $(2,+\infty)$ همسایگی محسوب نمی‌شوند.

مثال : کدامیک از موارد زیر نمایشگر یک همسایگی است؟

الف) $x > x^2 \longrightarrow x - x^2 > 0$ $\quad \begin{array}{cccc} -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ - & + & - & \end{array}$ $\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (0,1)$
یک همسایگی است.

ب) $|x-3| < 2 \longrightarrow -2 < x-3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (1,5) \longrightarrow$ همسایگی است

پ) $|x+1| > 3 \longrightarrow \left| \begin{array}{l} x+1 > 3 \Rightarrow x > 2 \\ x+1 < -3 \Rightarrow x < -4 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty,-4) \cup (2,+\infty)$
همسایگی نیست

ت) $|x-2| \leq 5 \longrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq x \leq 7 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-3,7]$ همسایگی نیست

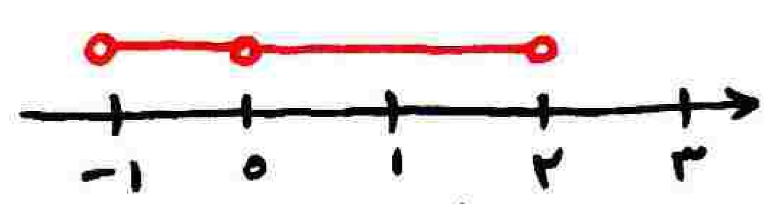
مثال : به ازای چه مقادیری از x ، بازه‌ی $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ است؟

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 2 \Rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$$

نکته: اجتماع دو همسایگی یک عدد، یک همسایگی برای آن عدد می باشد. همچنین اشتراک آنها نیز یک همسایگی برای آن عدد است.

توجه: اگر از همسایگی (a,b) عددی مانند x_0 را حذف کنیم، آن را به عنوان یک همسایگی محذوف x_0 معرفی می کنیم و به صورت $(a,b)-\{x_0\}$ یا $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ نمایش می دهیم.

به عنوان نمونه $(-1,2)-\{0\}$ یک همسایگی محذوف صفر است، که به صورت $(-1,0)\cup(0,2)$ نیز نمایش می دهیم:



مثال: کدام یک از موارد زیر نمایشگر یک همسایگی محذوف است؟

الف) $0<|x-4|<5$

می دانیم، همواره قدر مطلق نامنفی است یعنی $|x-4|\geq 0$ است پس از $0<|x-4|$ نتیجه می شود که:

$|x-4|\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$

از طرفی: $|x-4|<5 \Rightarrow -5<x-4<5 \xrightarrow{+4} -1<x<9$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-1,9)-\{4\}$

همسایگی محذوف ۴ است.

ب) $\dfrac{1}{|x-2|}>1$

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

$\dfrac{1}{|x-2|}>1 \xrightarrow{\times|x-2|} 1>|x-2| \Rightarrow -1<x-2<1 \xrightarrow{+2} 1<x<3$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(1,3)-\{2\}$

همسایگی محذوف ۲ است

پ) $\dfrac{x+1}{x^2}>0$

$-\infty$		-1		0		$+\infty$
	$-$	0	$+$	ت ن	$+$	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-1,+\infty)-\{0\}$

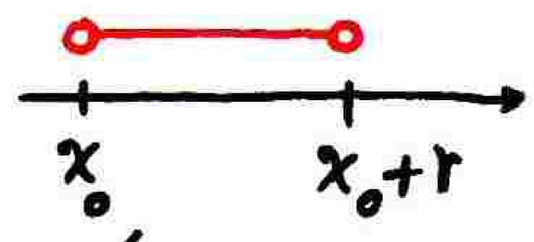
همسایگی محذوف نیست

مثال: به ازای چه مقدار از m، اجتماع روبرو، یک همسایگی محذوف است؟ $(2,2m-1)\cup(m+2,11)$

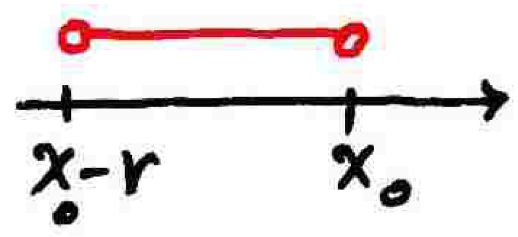
به شرطی $(a,x_0)\cup(x_1,b)$ یک همسایگی محذوف است که $x_1=x_0$ باشد، بنابراین:

$2m-1=m+2 \Rightarrow m=3$

توجه: اگر x_0 عدد حقیقی دلخواه و ۲ عدد مثبتی باشد آنگاه بازه‌ی (x_0, x_0+2) یک همسایگی راست x_0 معرفی می‌شود:



همچنین بازه‌ی (x_0-2, x_0) یک همسایگی چپ x_0 است:



به طور مثال بازه‌ی $(2, 5)$ یک همسایگی راست عدد ۲ و یک همسایگی چپ عدد ۵ است.

مثال: k را چنان بیابید که بازه‌ی $(3k-1, k+4)$ یک همسایگی راست عدد ۴ باشد.

$$3k-1=4 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

مثال: درصورتی که مجموعه جواب نامعادله $x^2+ax+b<0$ یک همسایگی راست ۱ و یک همسایگی چپ ۴ باشد، a و b را بیابید.

واضح است که آن همسایگی به صورت $(1, 4)$ باشد، یعنی مجموعه جواب نامعادله $(1, 4)$ است.

پس $x=1$ و $x=4$ ریشه‌های چندجمله‌ای x^2+ax+b هستند. پس این چندجمله‌ای به صورت $(x-1)(x-4)$ یعنی x^2-5x+4 است، درنتیجه: $a=-5$ و $b=4$

حل چند نمونه سوال

۱- یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۲ بنویسید.

$(1, 3)$: همسایگی ؛ $(1, 3)-\{2\}$: همسایگی محذوف ؛ $(2, 3)$: همسایگی راست ؛ $(1, 2)$: همسایگی چپ

۲- به ازای چه مقادیری از m، مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2+mx-3<0$ یک همسایگی عدد ۳ است؟

باید به ازای $x=3$، نامساوی برقرار باشد پس: $9+3m-3<0 \Rightarrow m<-2$

۳- دامنه‌ی کدام یک از توابع زیر یک همسایگی یا همسایگی محذوف است؟

الف) $y=\frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty, 1)\cup(1, +\infty) \Rightarrow$ همسایگی و همسایگی محذوف نیست

ب) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 1-x^2>0$

$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow D=(-1, 1) \rightarrow$ همسایگی است

پ) $y=\log_x(4-x^2)$

$$\begin{cases} 4-x^2>0 \Rightarrow \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$-$		$+$		$-$

$\Rightarrow -2<x<2$

$\xrightarrow{\cap} D=(0,2)-\{1\}$

همسایگی محذوف 1 است.

۴- به ازای چه مقادیری از m مجموعهٔ $(m+5\,,4)\cup(2\,,m^2-1)$ یک همسایگی محذوف است؟

ابتدا مجموعه را به صورت $(2,m^2-1)\cup(m+5,4)$ مرتب می‌کنیم. بنابراین:

$m^2-1=m+5 \Rightarrow m^2-m-6=0 \Rightarrow (m-3)(m+2)=0$

$m=3 \longrightarrow$ مجموعه $=(2\,,8)\cup(8\,,4) \longrightarrow$ بازه ی $(8,4)$ غیرمنطقی است $\Rightarrow$ $m=3$ غیرقابل قبول

$m=-2 \Rightarrow$ مجموعه $=(2,3)\cup(3\,,4) \longrightarrow$ همسایگی محذوف عدد 3 است

۵- درصورتی که $(mn+2\,,7)\cup(0\,,m+n)$ همسایگی محذوف عدد 5 باشد مقدار m^2+n^2 را بدست آورید.

مرتب $\Rightarrow (0\,,m+n)\cup(mn+2\,,7) \Rightarrow m+n=5$ و $mn+2=5 \Rightarrow mn=3$

$$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=(5)^2-2(3)=25-6=19$$

۶- a و b را چنان بیابید که بازه‌ی $(2a-b\,,a+b)$ یک همسایگی راست عدد 3 و یک همسایگی چپ عدد 5 باشد.

بنابراین: $(2a-b\,,a+b)=(3\,,5) \Rightarrow \begin{cases}2a-b=3\\ a+b=5\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=\frac{8}{3}\,,\ b=\frac{7}{3}$

۷- با فرض $a<b$، حداقل اختلاف دو مقدار a و b را چنان بیابید که اشتراک همسایگی‌های $(a-1\,,a+1)$ و $(b-1\,,b+1)$ برابر تهی باشد.

$(a-1\,,a+1)\cap(b-1\,,b+1)=\varnothing \Rightarrow a+1\leq b-1 \Rightarrow 2\leq b-a$

بنابراین حداقل اختلاف دو عدد a و b برابر 2 است.

۲- مفهوم حد و فرایندهای حدی :

وقتی از حد صحبت می‌کنیم مجبور هستیم به جای صحبت از مقادیر مشخص و دقیق، در مورد نزدیک شدن بسیار بسیار زیاد به یک عدد صحبت کنیم. به این مفهوم "میل کردن" گفته می‌شود.

وقتی متغیر x به سمت عددی مانند ۲ میل کرده و بسیار بسیار به آن نزدیک می‌شود، اما به آن نمی‌رسد را با نماد $x \to 2$ نمایش می‌دهیم. در این حالت x ممکن است هر یک از مقادیر همسایگی چپ ۲ یعنی ۱٫۹ ، ۱٫۹۹ ، ۱٫۹۹۹ و ... یا مقادیر همسایگی راست ۲ مانند ۲٫۱ ، ۲٫۰۱ ، ۲٫۰۰۱ و ... را گرفته ولی هیچگاه $x=2$ را نخواهد گرفت.

مفهوم عامیانه‌ی حد این است که وقتی مقدار x به سمت یک عدد خاص مانند a میل کند $(x \to a)$ مقدار L در تابع $f(x)=L$ به چه عددی میل می‌کند؟ جواب این سؤال همان حد تابع $f(x)$ در $x=a$ است که به صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ نوشته می‌شود.

به عنوان نمونه رفتار تابع $f(x) = x+5$ را در همسایگی $x=3$ بررسی می‌کنیم. برای این منظور مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچکتر از ۳ ، که به تدریج از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شوند و نیز برخی مقادیر بزرگتر از ۳ ، که به تدریج از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم :

x	۲٫۹	۲٫۹۹	۲٫۹۹۹	$\longrightarrow$	۳	$\longleftarrow$	۳٫۰۰۱	۳٫۰۱	۳٫۱
$f(x)$	۷٫۹	۷٫۹۹	۷٫۹۹۹	$\longrightarrow$	۸	$\longleftarrow$	۸٫۰۰۱	۸٫۰۱	۸٫۱

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۳ (از راست و چپ) مقادیر $f(x)$ به عدد ۸ نزدیک می‌شوند، بنابراین گوییم حد تابع $f(x)$ در $x=3$ برابر ۸ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 8$$

مثال : با بررسی رفتار تابع $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ در همسایگی $x=2$ ، به کمک جدول مقادیر، حد آن را در $x=2$ بدست آورید.

تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ به ازای هر حقیقی x به جز ۲ تعریف شده است. لذا به ازای هر $x\neq 2$، ضابطه‌ی تابع را می‌توان ساده کرد:

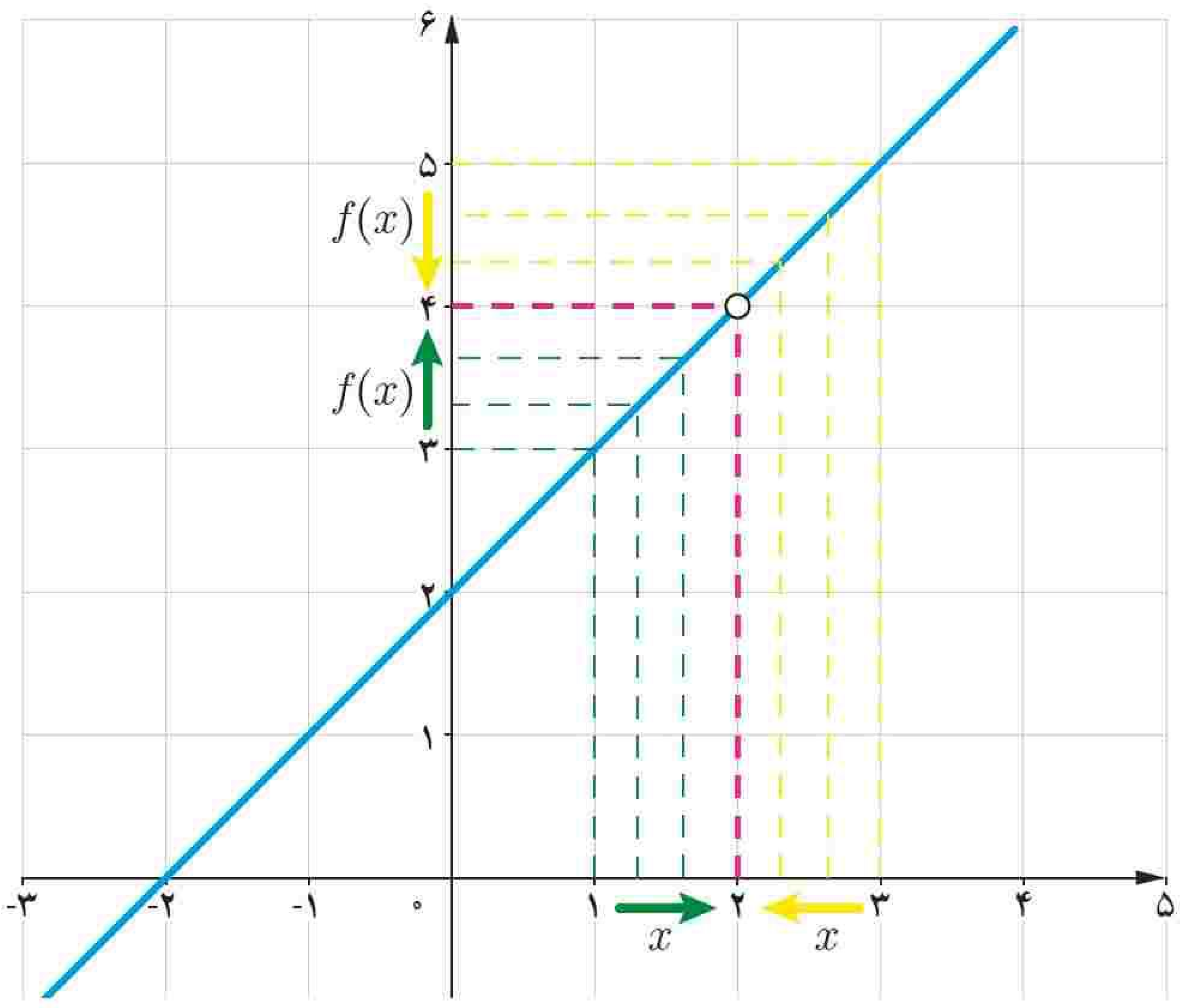
$$f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2$$

بنابراین جدول مقادیر زیر را برای $f(x)=x+2$ در همسایگی محذوف ۲ می‌نویسیم:

x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹ → ۲ ←	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۳٫۹	۳٫۹۹	۳٫۹۹۹ → ۴ ←	۴٫۰۰۱	۴٫۰۱	۴٫۱

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

توجه: روش دیگر برای بررسی رفتار تابع $f(x)$ در همسایگی $x=a$، استفاده از نمودار آن تابع است. به عنوان نمونه، مثال قبل را بررسی می‌کنیم.

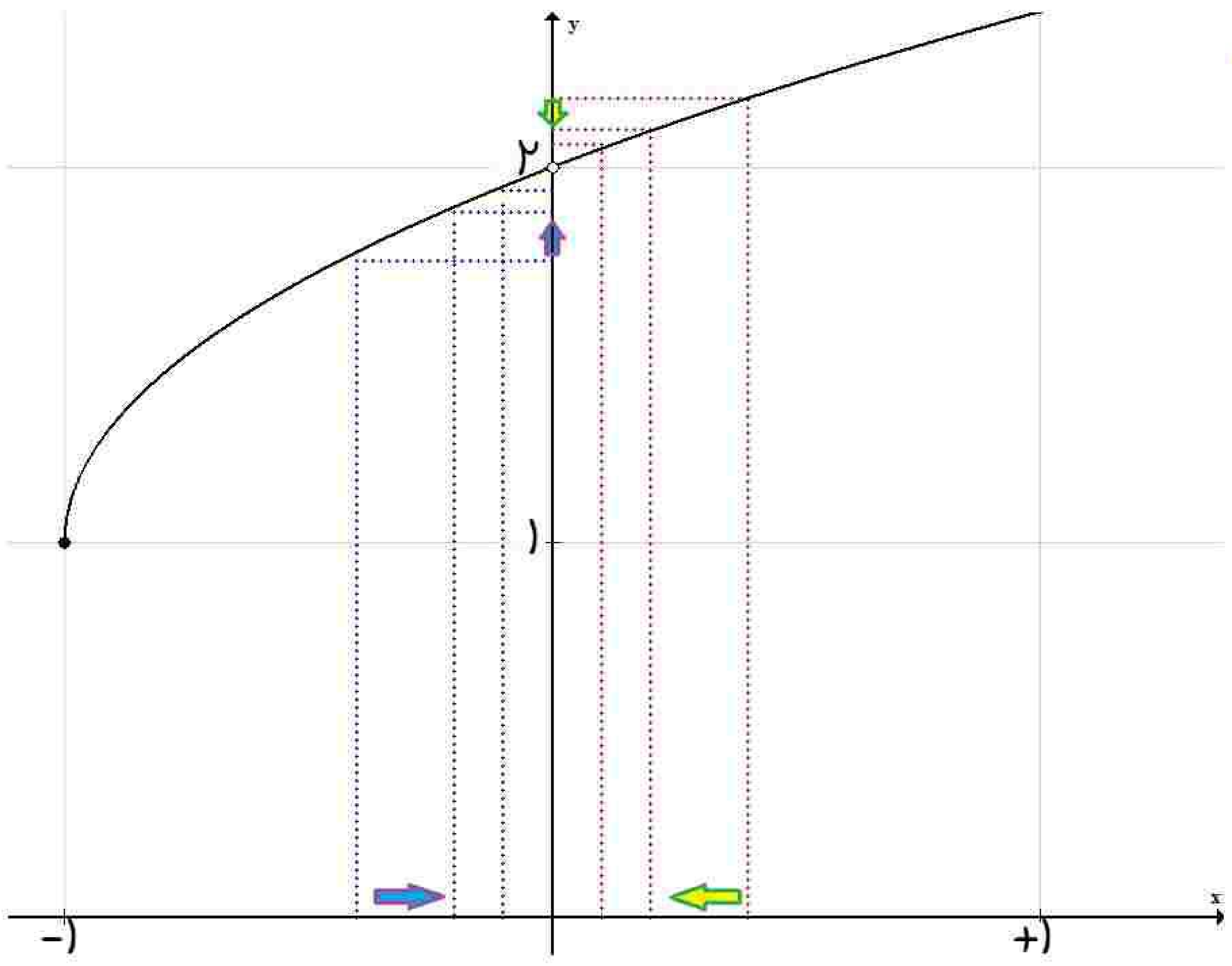


طبق شکل روبرو، نمودار تابع $f(x)=x+2$ ؛ $x\neq 2$ رسم شده و مشاهده می‌شود، وقتی x را با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند بنابراین: $\lim_{x\to 2} f(x)=4$

مثال: با استفاده از نمودار، حد تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ را در $x=0$ بدست آورید.

تابع f به ازای $x=0$ تعریف نشده است. لذا به ازای $x\neq 0$، ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}}=\sqrt{x+1}+1$$

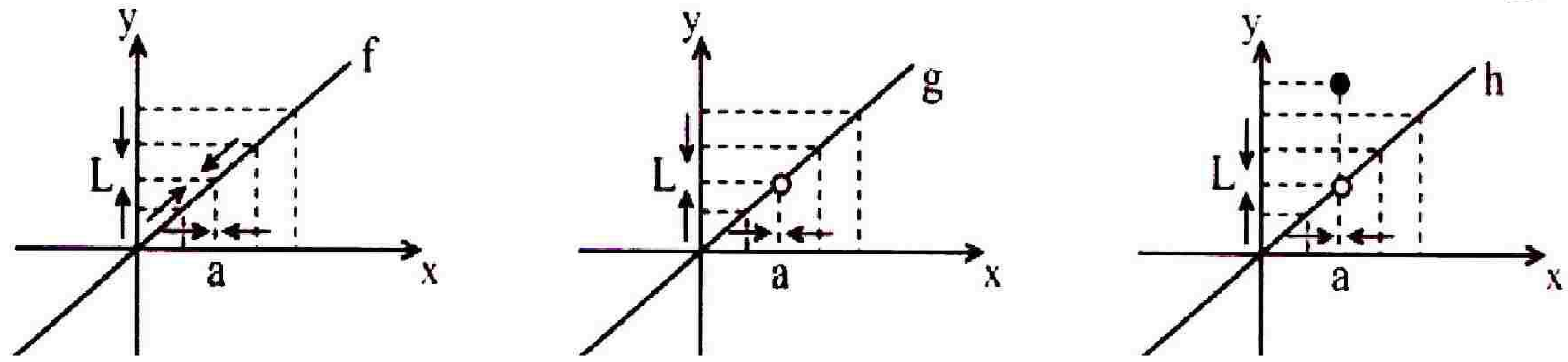


بنابراین نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+1}+1$ ؛ $x\neq 0$ را رسم می‌کنیم.

مطابق شکل، وقتی x را با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از صفر به صفر نزدیک می‌کنیم، مقادیر f به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، بنابراین

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

توجه: حد تابع در یک نقطه به مقدار تابع در آن نقطه اصلاً بستگی ندارد. بلکه فقط و فقط به رفتار تابع در اطراف آن نقطه بستگی دارد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



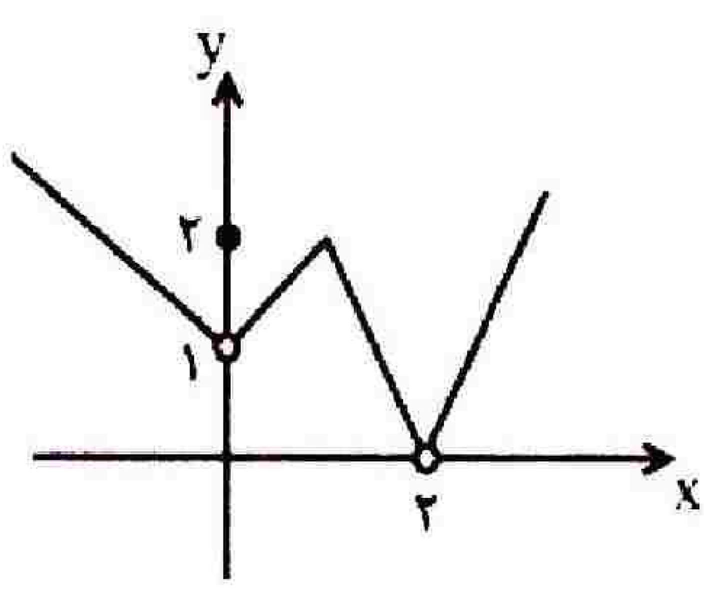
در هر سه تابع f ، g و h ، وقتی مقدارهای متغیر x به عدد a نزدیک می‌شوند، مقدارهای تابع، به عدد L نزدیک می‌شوند و در نتیجه حد هر کدام از توابع در $x=a$ برابر L است.

بنابراین مشاهده می‌شود که:

① حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد (تابع h)

② لزومی ندارد که تابع در آن نقطه تعریف شده باشد (تابع g)

مثال: در شکل مقابل مطلوبست محاسبه‌ی $f(0)$ ، $f(2)$ ، $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$.



$f(0)=2$ ، $f(2)=$ تعریف نشده است

$\lim_{x\to 0} f(x)=1$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)=0$

نکته مهم: شرط لازم برای این که تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، آن است که، تابع در همسایگی a تعریف شده باشد و اگر حداقل در یکی از همسایگی های راست یا چپ a تعریف نشده باشد، گوییم تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: توضیح دهید که چرا توابع زیر در نقطه‌ی تعیین شده حد ندارند.

الف) $f(x)=\sqrt{x+3}$ (نقطه‌ی $x=-3$)

دامنه‌ی تابع: $x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow D_f=[-3,+\infty) \Rightarrow$ همسایگی چپ ۳- تعریف نشده

$\Longrightarrow$ f در $x=-3$ حد ندارد

ب) $f(x)=\sqrt{2-x}$ (نقطه‌ی $x=2$)

دامنه‌ی تابع: $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f=(-\infty,2]$ $\Leftarrow$ همسایگی راست ۲ تعریف نشده

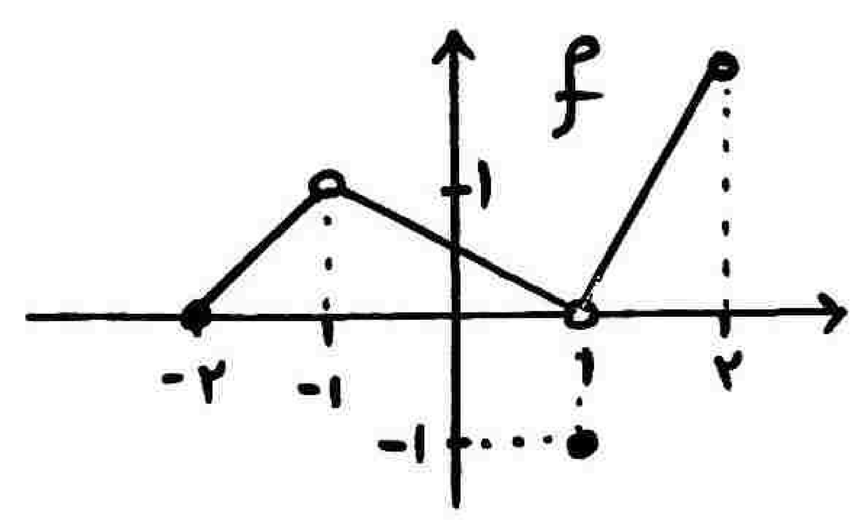
$\Leftarrow$ f در $x=2$ حد ندارد

پ) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$ (نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$)

دامنه‌ی تابع: $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=\{\frac{1}{2}\}$ $\Leftarrow$ هیچ همسایگی برای $\frac{1}{2}$ قابل تعریف نیست

$\Leftarrow$ f در $x=\frac{1}{2}$ حد ندارد

مثال: برای تابع f که نمودار آن داده شده است، مقادیر زیر را محاسبه نمایید.



الف) $\lim_{x\to -2} f(x)$ ⟵ حد وجود ندارد زیرا همسایگی چپ ۲- تعریف نشده

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)=1$

پ) $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

ت) $\lim_{x\to 2} f(x)$ ⟵ حد وجود ندارد زیرا همسایگی راست ۲ تعریف نشده است

ث) $\lim_{x\to 0}[f(x)]$ ⟶ همان طور که از شکل مشخص است، در همسایگی محذوف صفر، f مقادیری بین صفر و یک دارد، که جزء صحیح آنها صفر خواهد بود بنابراین: $\lim_{x\to 0}[f(x)]=0$

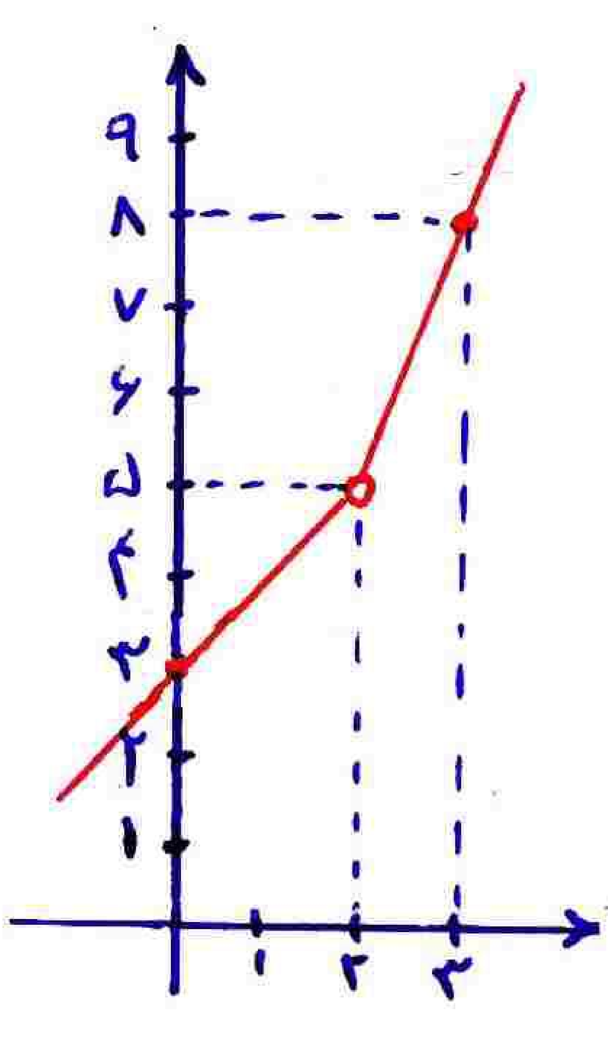
حل چند نمونه سؤال

۱- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & , x>2 \\ x+3 & , x<2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. با رسم نمودار و با نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲، مقدار $\lim_{x\to 2} f(x)$ را بدست آورید.

$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & , x>2 \\ x+3 & , x<2 \end{cases}$

x	2	3
y	5	8

x	2	0
y	5	3

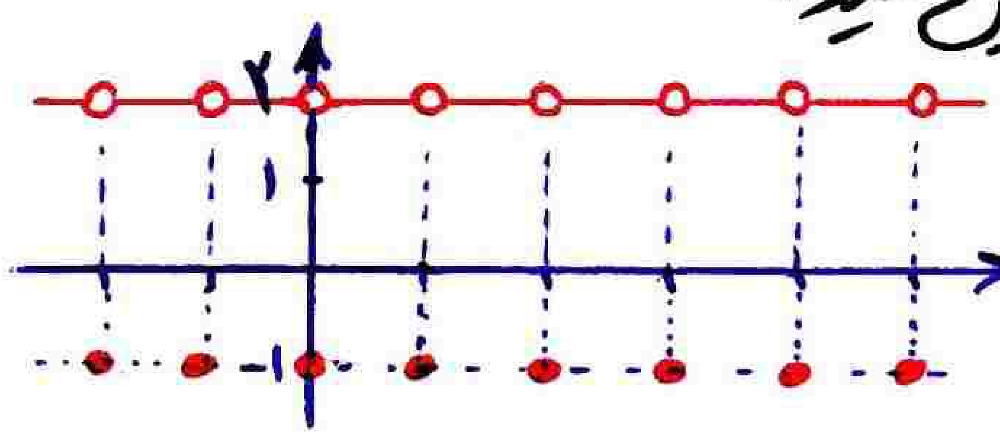


x	1.9	1.99	1.999 →	2	← 2.001	2.01	2.1
y	4.9	4.99	4.999 →	5	← 5.003	5.03	5.3

طبق جدول و همچنین با توجه به شکل نمودار تابع، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=5$$

۲- نمودار تابع $g(x)=\begin{cases}-1 , & x\in \mathbb{Z}\\ 2 , & x\notin \mathbb{Z}\end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن حد تابع را در $x=1$ و $x=\sqrt{2}$ محاسبه نمایید، درصورتی که $a\in\mathbb{R}$ ، حد تابع در $x=a$ را تعیین کنید.

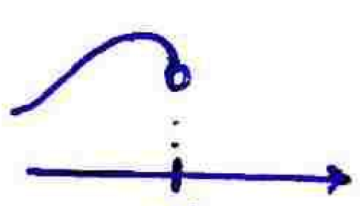


مطابق شکل در همسایگی محذوف اعداد ۱ , $\sqrt{2}$ مقادیر تابع g برابر ۲ است بنابراین: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$, $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} g(x)=2$

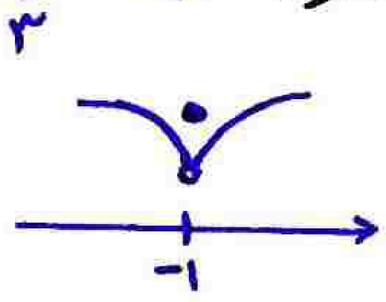
همچنین در همسایگی محذوف هر عدد حقیقی دلخواه همچون a ، مقادیر تابع g برابر ۲ است، بنابراین:

$$\lim_{x\to a} g(x)=2$$

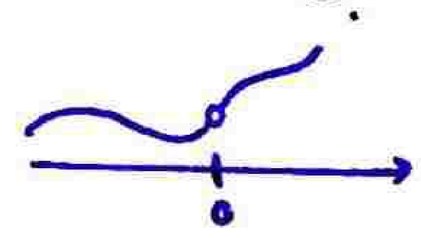
۳- نمودار تابع f را در شرایط زیر رسم کنید.



الف) f در همسایگی چپ ۳ تعریف شده ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده باشد.



ب) f در $x=-1$ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.



پ) f در $x=0$ دارای حد باشد ولی $f(0)$ موجود نباشد.

۴- به کمک جدول مقادیر، حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^2 , & x>0\\ 0 , & x<0\end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=?$

x	-0.1	-0.01	$-0.001 \to$	0	$\leftarrow 0.001$	0.01	0.1
$f(x)$	0	0	$0 \to$	0	$\leftarrow 0.000001$	0.0001	0.01

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} 2[x]+1=? \longrightarrow f(x)=2[x]+1$

x	1.35	1.4	$1.45 \to$	$\frac{3}{2}$	$\leftarrow 1.55$	1.6	1.65
$f(x)$	3	3	$3 \to$	3	$\leftarrow 3$	3	3

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=3$

پ) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1|=? \longrightarrow f(x)=|x-1|$

x	0.9	0.99	$0.999 \to$	1	$\leftarrow 1.001$	1.01	1.1
$f(x)$	0.1	0.01	$0.001 \to$	0	$\leftarrow 0.001$	0.01	0.1

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$