

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



ریاضی و آمار (۲)

پایه یازدهم

علوم انسانی و معارف

فصل ۳

تهیه و تنظیم: مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس: ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵



شاخص های آماری



سری های زمانی



@MATHCLASS2



Majid.ghaderi.mathclass.2

سری های زمانی

فصل ۳

درس ۲

اهداف

- آشنایی با سری های زمانی
- آشنایی با رسم نمودار مربوط به سری زمانی
- شناخت روش های تحلیل سری های زمانی
- آشنایی با برون یابی و درون یابی با استفاده از مفهوم سری زمانی

پیش بینی

□ یکی از اصلی ترین مسائل در پیش بینی ها در علم آمار، بررسی رابطه ها و وابستگی های بین متغیرها است.

□ یک نوع ساده از پیش بینی در آمار و ارقام این است که اطلاعات گذشته را پای و اساس پیش بینی آینده قرار دهیم.

به عبارت دیگر در کوتاه مدت روند گذشته را به آینده نسبت دهیم.

به عنوان مثال:

(۱) نرخ ارز در روزهای متوالی، (۲) متوسط درآمد یک شرکت در ماه های متوالی، (۳) جمعیت نگاری

(۴) پیش بینی رخدادهای جوی، (۵) بازاریابی و ...

اگرچه اطلاعات گذشته راهنما خوبی برای آینده است اما به علت تغییراتی که در طول زمان رخ می دهد برای پیش بینی های بلند مدت مناسب نیست.

صفحه ۶۴ کتاب درسی

سری های زمانی (Time series)

در علم آمار، به داده های جمع آوری شده در دوره های زمانی گذشته؛ مربوط به متغیری که قرار است پیش بینی شود، اصطلاحاً سری زمانی می گویند.

سری زمانی: مجموعه داده هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می شوند.

بنابراین می توان گفت؛ یک سری زمانی از مشاهده یک پدیده در طول زمان به دست می آید.

روش های آماری که این گونه داده های آماری را مورد استفاده قرار می دهند، روش های تحلیل سری های زمانی نامیده می شود. از جمله کاربردهای تجزیه و تحلیل سری های زمانی می توان به توصیف، تشریح، پیش بینی و کنترل برخی پدیده ها اشاره نمود.

در نتیجه می توان گفت:

کاربرد اصلی تجزیه و تحلیل سری های زمانی، پیش بینی است.

یادآوری

انحراف معیار (Standard Deviation)

به جذر واریانس؛ **انحراف معیار** می گویند و از نماد σ برای نمایش آن استفاده می شود.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

به عبارتی دیگر باید اختلاف هر عدد با میانگین داده ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ سپس میانگین اعداد حاصل را به دست آورید و در نهایت از آن جذر بگیرید.

در تفسیر داده ها معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می خواهیم، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز داریم، که همان **انحراف معیار** است.

اگر انحراف معیار مجموعه داده ها عدد کوچکی باشد، پدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان کم و در نتیجه داده ها به هم نزدیک تر است و اگر انحراف معیار مجموعه داده ها عددی بزرگ باشد، پدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان زیاد و در نتیجه داده ها از هم دورتر است.

فعالیت صفحه ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی

اولین مرحله در تجزیه و تحلیل سری زمانی، رسم داده ها و به دست آوردن آماره های نمونه است.

میزان بارندگی در شش ماهه دوم دو شهر «آ» و «ب» بر حسب میلی متر در جدول زیر آمده است.

| مهر | آبان | آذر | دی | بهمن | اسفند | مجموع | میانگین | انحراف معیار |
|-----|------|-----|-----|------|-------|-------|---------|--------------|
| ۱۵ | ۲۰ | ۳۰ | ۳۵ | ۳۰ | ۳۰ | ۱۶۰ | ۲۶/۷ | ۶/۸۷ |
| ۲۳۰ | ۱۷۰ | ۱۵۰ | ۱۳۰ | ۱۱۰ | ۱۱۰ | ۹۰۰ | ۱۵۰ | ۴۱/۶۳ |

الف) جدول را کامل کنید.

ب) میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.

$$\text{شهر «آ» : } \bar{x} = \frac{۱۵ + ۲۰ + ۳(۳۰) + ۳۵}{۶} = \frac{۱۶۰}{۶} \cong ۲۶/۷$$

$$\text{شهر «آ» : } \sigma^2 = \frac{(۱۵ - ۲۶/۷)^2 + (۲۰ - ۲۶/۷)^2 + ۳(۳۰ - ۲۶/۷)^2 + (۳۵ - ۲۶/۷)^2}{۶} = \sqrt{\frac{۲۸۳/۳۴}{۶}} \cong ۶/۸۷$$

$$\text{شهر «ب» : } \bar{x} = \frac{۲۳۰ + ۱۷۰ + ۱۵۰ + ۲(۱۱۰) + ۱۳۰}{۶} = \frac{۹۰۰}{۶} = ۱۵۰$$

$$\text{شهر «ب» : } \sigma^2 = \sqrt{\frac{(۲۳۰ - ۱۵۰)^2 + (۱۷۰ - ۱۵۰)^2 + (۱۵۰ - ۱۵۰)^2 + ۲(۱۱۰ - ۱۵۰)^2 + (۱۳۰ - ۱۵۰)^2}{۶}} = \sqrt{\frac{۱۰۴۰۰}{۶}} \cong ۴۱/۶۳$$

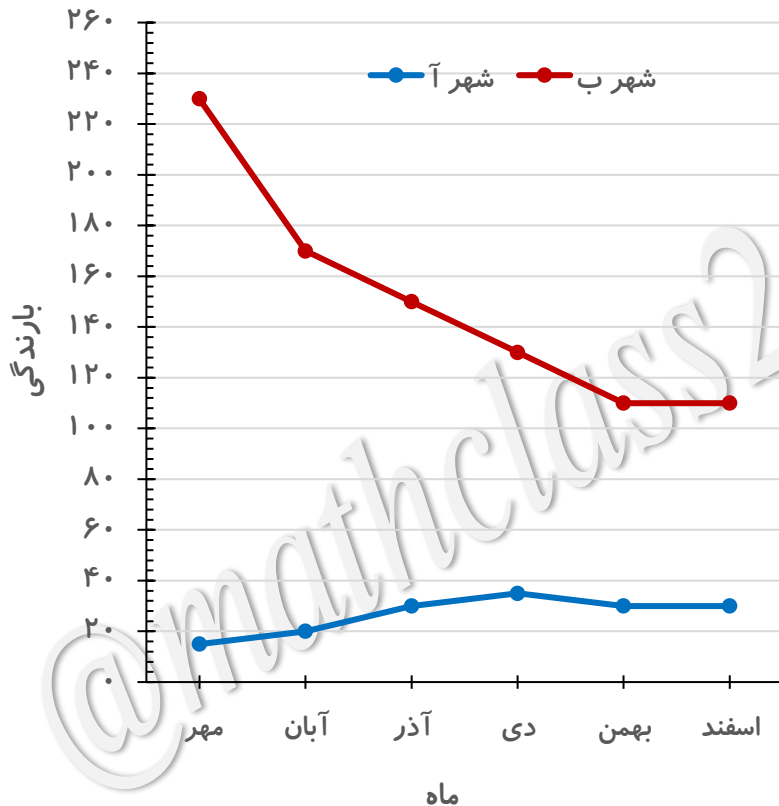
فعالیت صفحه ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی

پ) نمودار پراکنش نداشت (پراکندگی) (*Scatter graph*) میزان بارندگی هر دو شهر را بر حسب ماه های سال

با یک مقیاس بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید.

برای مشخص شدن هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.

ت) کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟ شهر «پ»



| شهر | مهر | آبان | آذر | دی | بهمن | اسفند |
|---------|-----|------|-----|-----|------|-------|
| شهر «آ» | ۱۵ | ۲۰ | ۳۰ | ۳۵ | ۳۰ | ۳۰ |
| شهر «ب» | ۲۳۰ | ۱۷۰ | ۱۵۰ | ۱۳۰ | ۱۱۰ | ۱۱۰ |

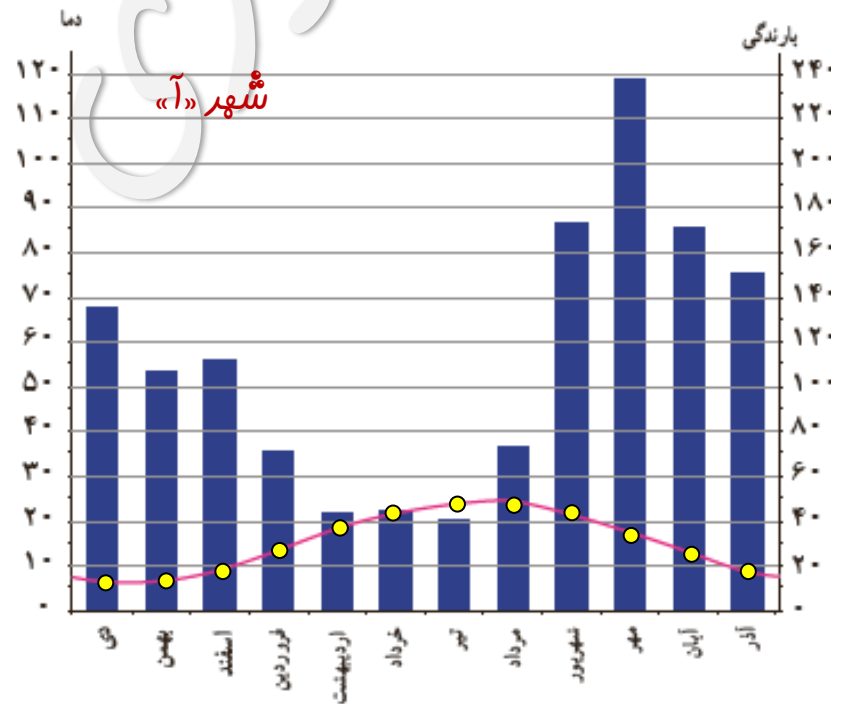
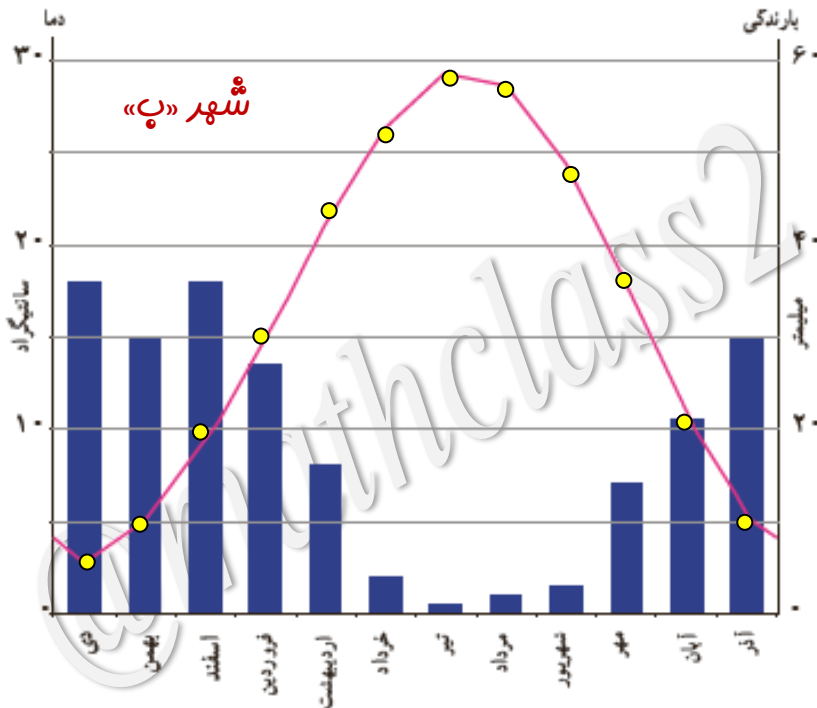
فعالیت صفحه ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی

نمودار پراکنش نگاشت (پراکندگی) دما (که در آن نقاط را به هم وصل کرده ایم) و نمودار میله ای بارندگی های دو شهر «آ» و «ب» با مقیاس های متفاوت برای یک سال خاص را برای هر شهر در یک شکل رسم کرده ایم.

الف) در چه فصلی از سال، بارندگی بیشتر است؟ **پاییز**

ب) متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ **شهر «آ»**

پ) آیا در تمام ماه های سال، دمای آن کمتر از شهر دیگر است؟ **خیر**



صفحه ۶۴ کتاب درسی

نمودار سری زمانی

پراکنش نگاهت سری زمانی که نقاط مشاهده شده را با پاره خط هایی در طول زمان به هم متصل می کند.

تمرین تکمیلی

سوال ۱: جدول زیر درصد رشد سهام یک شرکت را در سال های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۸ را نشان می دهد.

| سال | ۱۳۹۰ | ۱۳۹۱ | ۱۳۹۲ | ۱۳۹۳ | ۱۳۹۴ | ۱۳۹۵ | ۱۳۹۶ | ۱۳۹۷ | ۱۳۹۸ |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| رشد سهام | %۱۵ | %۵۰ | %۴۰ | %۳۵ | %۶۵ | %۶۰ | %۵۶ | %۳۷ | %۲۴ |



نمودار سری زمانی داده ها را رسم کنید.

کار در کلاس صفحه ۶۴ کتاب درسی

سری زمانی زیر، نشان دهندهٔ ۶ روز دمای بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و درمانش با آنتی بیوتیک آغاز شده است. هر روز ۴ بار دمای خوانده شده ثبت شده است.

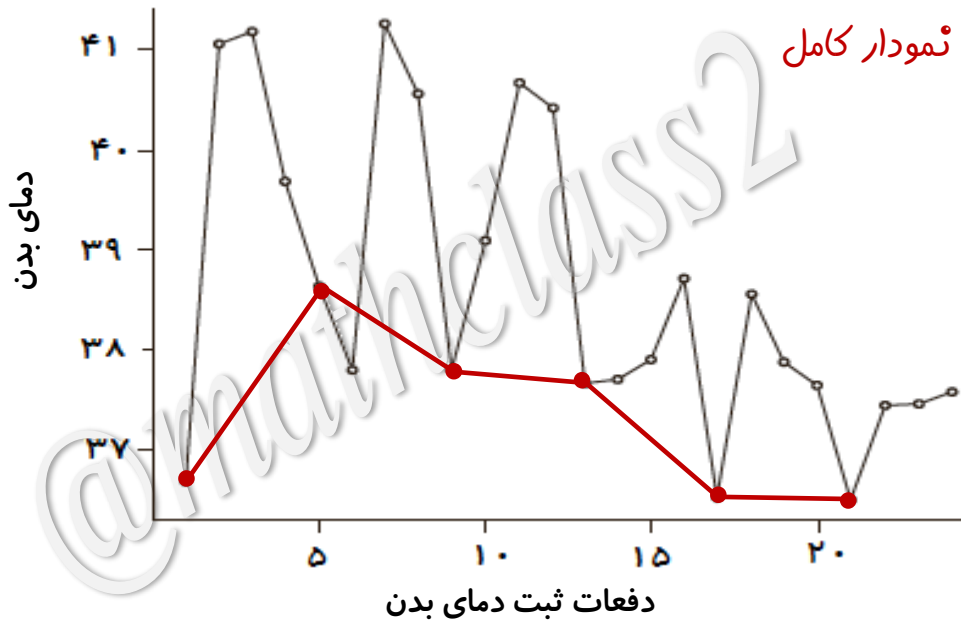
الف) دمای بدن بیمار در لحظهٔ بستری شدن چند درجه است؟ **زیر ۳۷ درجه**

ب) دمای بدن بیمار پس از چند روز به حالت طبیعی بازگشته است؟ **۶ روز**

پ) اگر اولین زمان ثبت دما، ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید.

• کدام نمودار ساده تر به نظر می رسد؟ **نمودار رسم شده برای ساعات ۷ صبح**

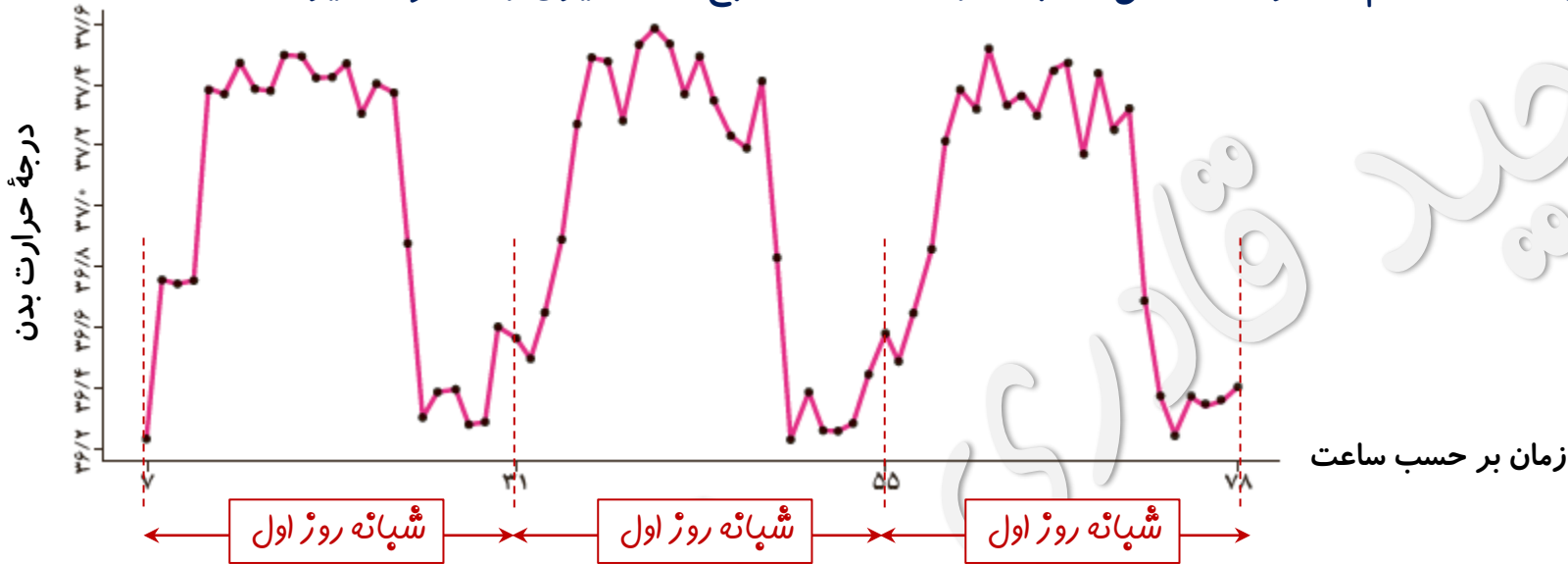
• کدام یک جزئیات بیشتری را نشان می دهد؟ **نمودار کامل**



نمودار رسم شده برای ساعات ۷ صبح

فعالیت صفحه ۶۵ کتاب درسی

دمای بدن یک انسان سالم در هر ساعت، طی ۳ شبانه روز از ساعت ۷ صبح اندازه گیری و در نمودار زیر ارائه شده است.



الف) بیشترین دمای بدن چه قدر است؟ زیر ۳۷٫۶ درجه

ب) دمای بدن در طول شبانه روز اول چه تغییراتی کرده است؟ آن را توصیف کنید.

از ساعت ۷ تا ۸ صبح ۰٫۵ درجه افزایش داشته؛ بعد از آن به مدت دو ساعت ثابت مانده سپس در مدت زمان یک ساعت ۰٫۵ درجه دیگر افزایش یافته است. از ساعت ۱۱ صبح تا ۱۱ شب به طور متناوب تغییر داشته و دوره تناوب آن به طور متوسط ۰٫۵ درجه بوده است، سپس در مدت زمان دو ساعت با شیب ثابت کاهش یافته و به مقدار اولیه رسیده است. از ساعت ۱ تا ۵ صبح نوسانات کوتاهی داشته و در نهایت با افزایش ۰٫۳ درج از ساعت ۶ تا ساعت ۷ صبح به ۳۶٫۵ درجه رسیده است.

پ) آیا این تغییرات در شبانه روزهای بعد نیز تکرار شده است؟ بله

ت) این نمودار چه ویژگی ای دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی) تناوبی است.

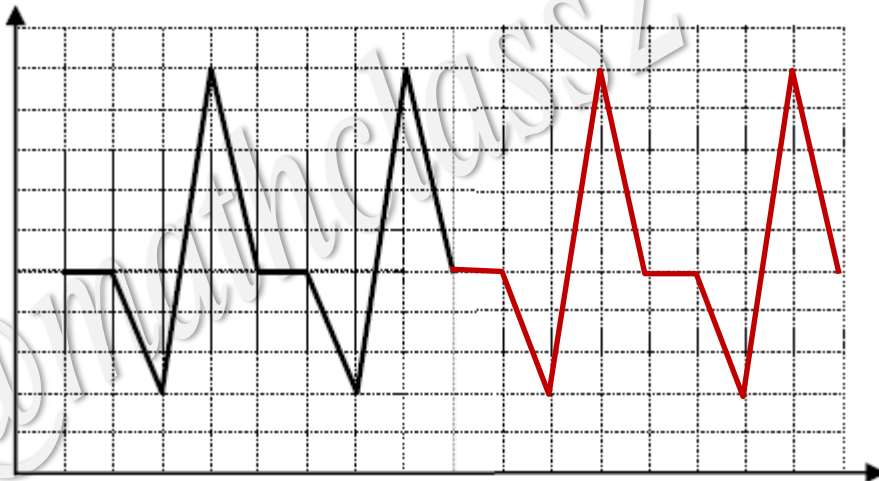
سری زمانی متناوب (Intermittent time series)

حالتی است که در آن نمودار سری زمانی در بازه های مشخصی تکرار می شود. در این حالت است که می توان از داده های گذشته درباره یک پدیده تصادفی یا اتفاق؛ آینده آن را پیش بینی کرد.

الگو (مدل) (Model): تکرار یک ویژگی در سری زمانی را الگو می نامند. مدل های ریاضی به ما کمک می کنند که معادلاتی را جهت پیش بینی پدیده های تصادفی متناوب ارائه کنیم.

تمرین تکمیلی

سوال ۲: در سری زمانی زیر دوره تناوب را تعیین کرده و به وسیله رسم؛ روند آینده سری را پیش بینی کنید.



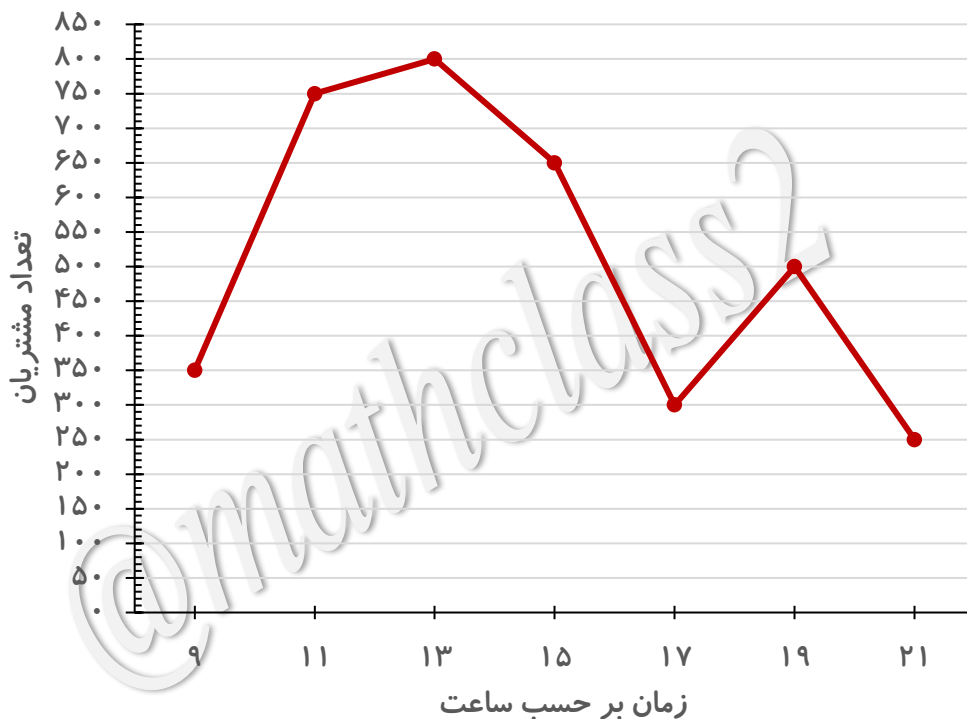
دوره تناوب آن ۴ واحد است.

فعالیت صفحه ۶۶ کتاب درسی

در یک مرکز خرید، تعداد مشتری ها از ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

| ساعت (T) | ۹ | ۱۱ | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷ | ۱۹ | ۲۱ |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| تعداد مشتریان (N) | ۳۵۰ | ۷۵۰ | ۸۰۰ | ۶۵۰ | ۳۰۰ | ۵۰۰ | ۲۵۰ |

الف) نمودار سری زمانی را رسم کنید.

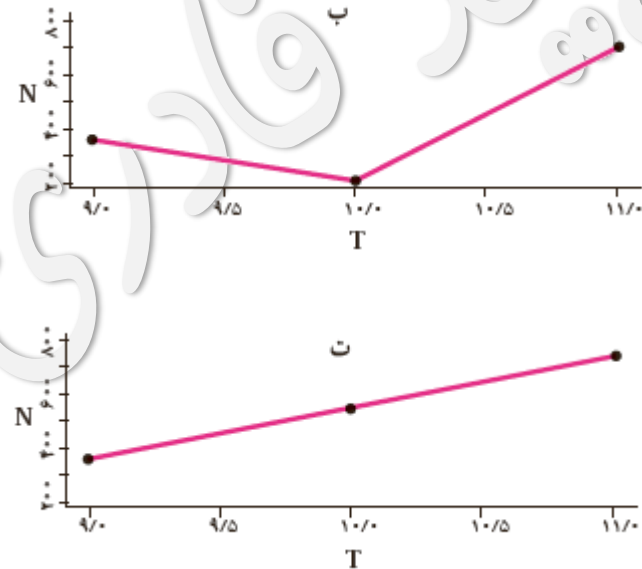
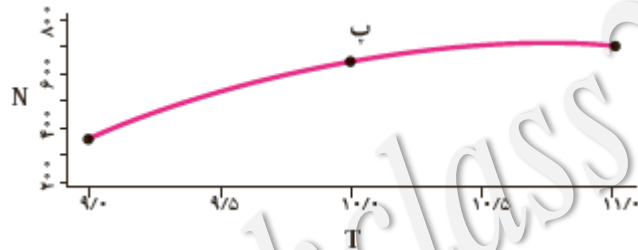
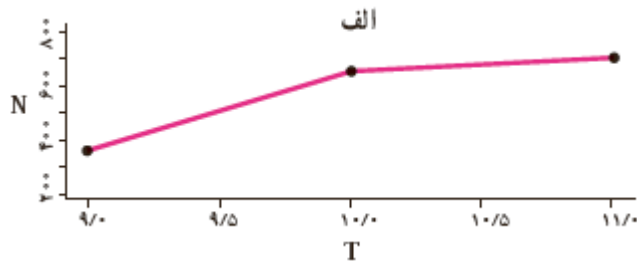


فعالیت صفحه ۶۶ کتاب درسی

ب) می خواهیم تعداد مشتری های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم. به نظر شما کدام یک از نمودارهای زیر واقعی تر است؟

N نشان دهندهٔ تعداد مشتری ها و T نشان دهندهٔ زمان است.

نمودار «پ» (منحنی)



پ) اگر فرض کنیم تعداد مشتری ها در فاصلهٔ زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است، به سؤال قبل

پاسخ دهید. نمودار «ت» (نمودار خطی)؛ زیرا حتی اگر تعداد مشتری ها از الگویمان تبعیت نکرده باشد، نیز خطای

تخمین ما از نمودارهای دیگر کمتر است.

درون یابی (Interpolation)

درون یابی؛ تخمین داده های مجهول بین داده های ثبت شده است.

درون یابی خطی (Liner interpolation):

درون یابی ای که به وسیله یک پاره خط انجام شود، درون یابی خطی است.

خطای درون یابی (Error of interpolation):

خطا درون یابی برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه و مقدار درون یابی آن .

$$E = |\text{مقدار واقعی} - \text{مقدار درون یابی شده}|$$

مراحل درون یابی خطی:

- ۱- نقاط قبل و بعد از نقطه ای که می خواهیم در آن درون یابی کنیم را مشخص می کنیم. به عبارت دیگر داده های قبل و بعد از داده مجهول را در نظر می گیریم.
- ۲- معادله خط گذرنده از آنها را تعیین می کنیم.
- ۳- داده ای که می خواهیم به ازای آن درون یابی کنیم را در معادله خط به جای متغیر x قرار می دهیم.

فعالیت صفحه ۶۶ کتاب درسی

در یک مرکز خرید، تعداد مشتری ها از ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

| | | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ساعت (T) | ۹ | ۱۱ | ۱۳ | ۱۵ | ۱۷ | ۱۹ | ۲۱ |
| تعداد مشتریان (N) | ۳۵۰ | ۷۵۰ | ۸۰۰ | ۶۵۰ | ۳۰۰ | ۵۰۰ | ۲۵۰ |

فرض می کنیم تعداد مشتری ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است.

الف) معادله خط گذرنده از دو نقطه $(۹, ۳۵۰)$ و $(۱۱, ۷۵۰)$ را

به دست آورید و آن را رسم کنید.



$$A(9, 350), \quad B(11, 750)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{750 - 350}{11 - 9} = \frac{400}{2} = 200$$

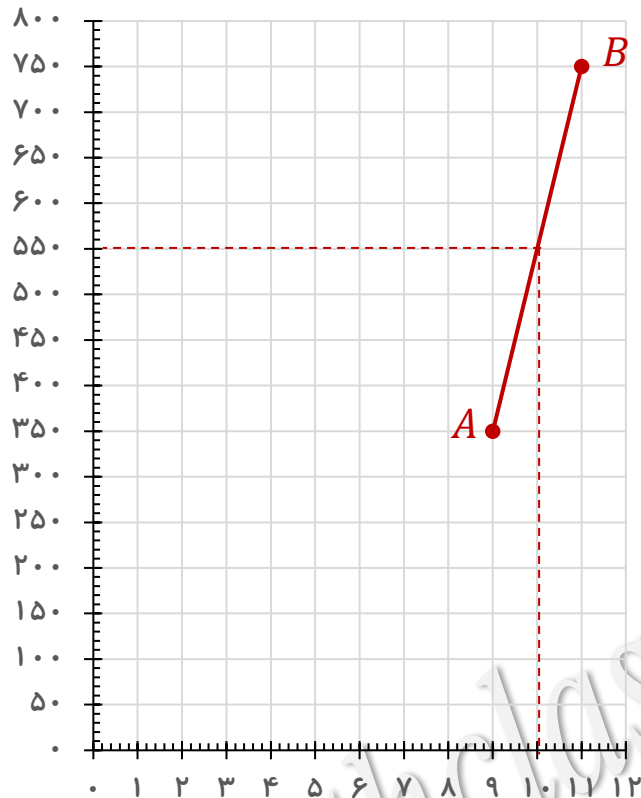
فرمول تعیین معادله خط گذرنده از نقطه $A(x_A, y_A)$ و با شیب m

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

$$y - 350 = 200(x - 9) \rightarrow y - 350 = 200x - 1800$$

$$\rightarrow y = 200x - 1450$$

فعالیت صفحه ۶۶ کتاب درسی



ب) مقدار این معادله به ازای ساعت ۱۰ چقدر است؟

$$y = 200 \cdot x - 1450 \xrightarrow{x=10} y = 200 \cdot (10) - 1450 = 550$$

مقدار این معادله به ازای ساعت ۱۰؛ همان درون یابی
تعداد مشتریان در ساعت ۱۰ است.

پ) این مقدار به کدام یک از شکل های فعالیت قبل نزدیک تر است؟

نمودار «ت»

فعالیت صفحه ۶۶ کتاب درسی

ت) اگر مقادیر داده های واقعی را به صورت ساعتی جمع آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط توپر نشان داده شده است، خطای درون یابی ساعت ۱۰ چه قدر است؟

$$E = |\text{مقدار واقعی} - \text{مقدار درون یابی شده}|$$

$$E_{10} = |550 - 600| = 50$$

ث) خطای درون یابی بقیه نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.

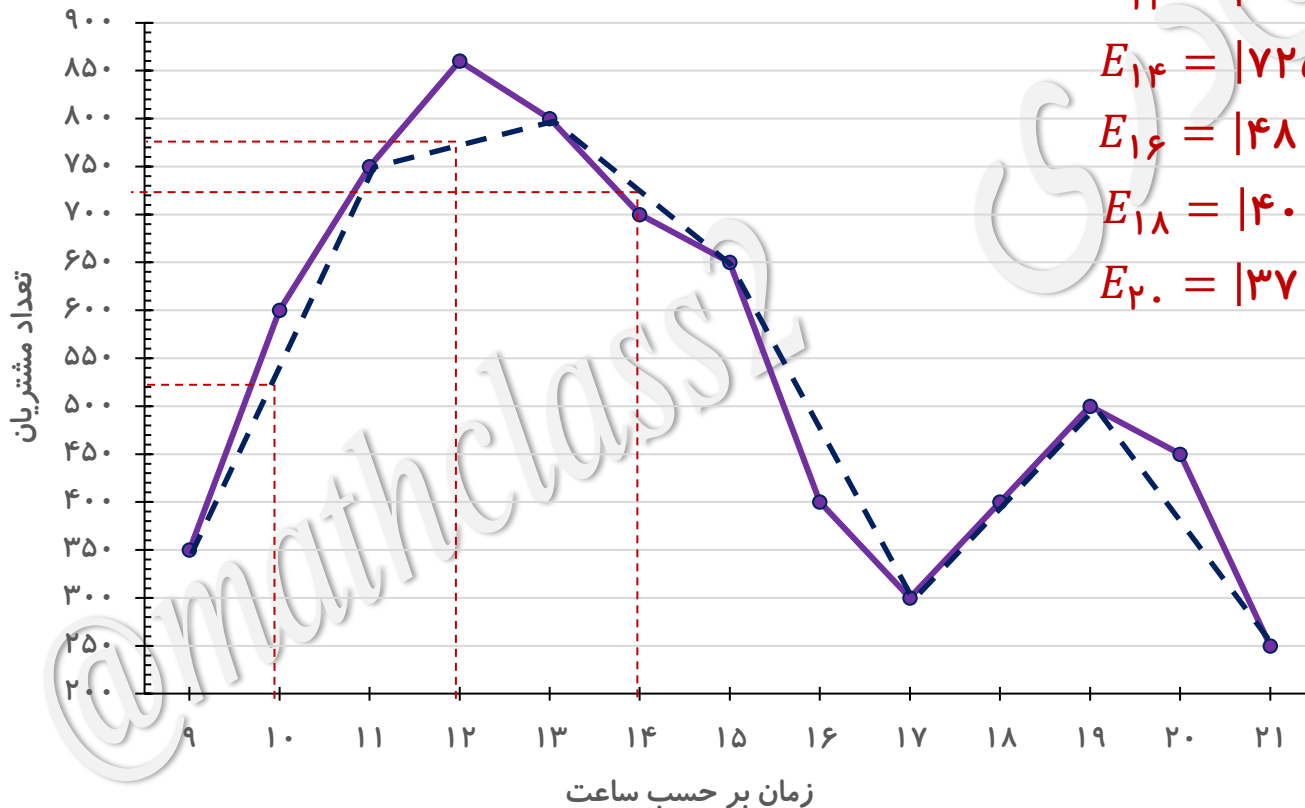
$$E_{12} = |775 - 860| = 85$$

$$E_{14} = |725 - 700| = 25$$

$$E_{16} = |480 - 400| = 80$$

$$E_{18} = |400 - 400| = 0$$

$$E_{20} = |370 - 450| = 80$$



تمرین تکمیلی

سوال ۳: جدول زیر تعداد فرزندان متولد شده در ساعات شبانه روز را در یکی از بیمارستان های بندرعباس نشان می دهد. با توجه به جدول زیر به طور تقریبی مشخص کنید که در ساعت ۹ صبح چه تعداد فرزند به دنیا آمده اند؟

| ساعت | ۸ | ۱۰ | ۱۲ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۸ | ۲۰ | ۲۲ | ۲۴ |
|----------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| تعداد فرزندان به دنیا آمده | ۲۰ | ۲۴ | ۱۰ | ۱۲ | ۱۸ | ۲۲ | ۱۴ | ۸ | ۸ |

داده های قبل و بعد از ساعت ۹ را مشخص کرده و معادله خط گذرنده از آنها را تعیین می کنیم.

$$A(8, 20) \quad \rightarrow \quad m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{24 - 20}{10 - 8} = \frac{4}{2} = 2$$

$$B(10, 24)$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$$

$$y - 24 = 2(x - 10) \rightarrow y - 24 = 2x - 20 \rightarrow y = 2x + 4$$

عدد ۹ را در معادله خط جایگزین x می کنیم.

$$y = 2x + 4 \xrightarrow{x=9} y = 2(9) + 4 = 22$$

صفحه ۶۸ کتاب درسی

برون یابی (Extrapolation)

برون یابی؛ تخمین داده های مجهول قبل یا بعد از همه داده های ثبت شده است.

برون یابی خطی (Liner extrapolation) :

برون یابی ای که به وسیله یک پاره خط انجام شود، برون یابی خطی است. پاره خطی که نقطه انتهایی یا ابتدایی را به نقطه میانگین داده ها وصل می کند.

مراحل برون یابی خطی:

- ۱- میانگین داده های مربوط به متغیرهای نشان داده شده روی محور های افقی و عمودی را جداگانه محاسبه می کنیم و حاصل را به صورت زوج مرتب می نویسیم.
- ۲- اگر بخواهیم قبل از داده های ثبت شده برون یابی کنیم، معادله پاره خطی را تعیین می کنیم که یک سر آن نقطه ابتدایی داده هاست و سر دیگر نقطه حاصل از میانگین ها.
- اگر بخواهیم بعد از داده های ثبت شده برون یابی کنیم، معادله پاره خطی را تعیین می کنیم که یک سر آن نقطه انتهایی داده هاست و سر دیگر نقطه حاصل از میانگین ها.
- ۳- داده ای که می خواهیم به ازای آن برون یابی کنیم را در معادله خط به جای متغیر x قرار می دهیم.

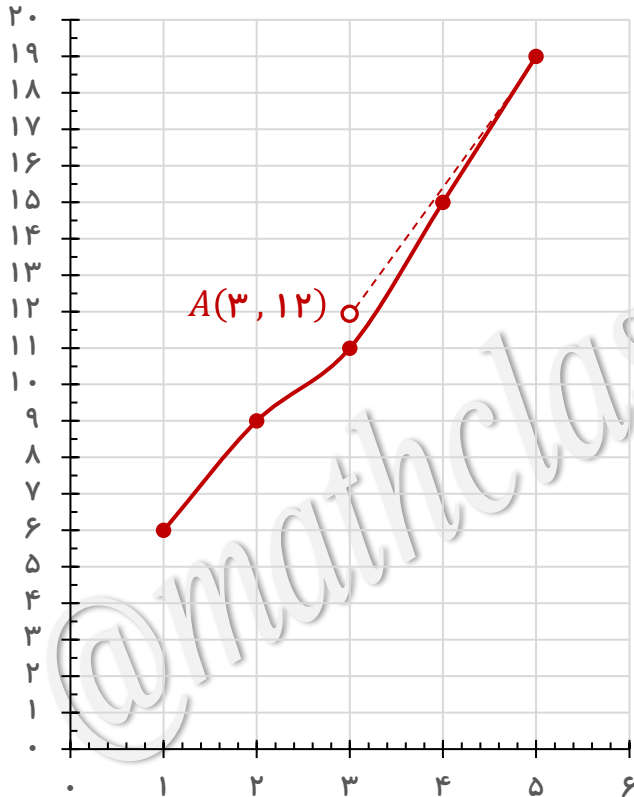
فعالیت صفحه ۶۸ کتاب درسی

میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

| | | | | | |
|----------------|---|---|----|----|----|
| سال (x) | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| میزان فروش (y) | ۶ | ۹ | ۱۱ | ۱۵ | ۱۹ |

الف) نمودار سری زمانی را رسم کنید.

ب) میانگین سال و فروش را محاسبه کنید، آن را A بنامید و روی نمودار نمایش دهید.



$$\text{میانگین سال ها} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{میانگین فروش} = \frac{6 + 9 + 11 + 15 + 19}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

پ) یک خط از نقطه میانگین ها به نقطه انتهایی به مختصات B(5, 19)

وصل کنید و معادله آن را بنویسید.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{19 - 12}{5 - 3} = \frac{7}{2} = 3/5$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \rightarrow y - 19 = 3/5(x - 5)$$

$$\rightarrow y - 19 = 3/5x - 17/5 \rightarrow y = 3/5x + 1/5$$

فعالیت صفحه ۶۸ کتاب درسی

اگر به جای x در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چه قدر است؟ آیا می توان این مقدار را به عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \xrightarrow{x=6} y = \frac{3}{5}(6) + \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$$

مقدار این معادله به ازای ساعت ۶؛ همان برون یابی میزان فروش در سال ششم است.

تمرین تکمیلی

سوال ۴: جدول زیر میزان درآمد شرکتی را در ۶ سال اول تاسیس شرکت؛ بر حسب میلیون تومان نشان می دهد.

درآمد این شرکت در سال هفتم چقدر خواهد بود؟

| | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| سال | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| درآمد | ۲۲ | ۲۵ | ۴۰ | ۵۰ | ۴۵ | ۵۲ |

میانگین سال ها و میانگین درآمدها را محاسبه کرده آن را به صورت زوج مرتب می نویسیم و نقطه A می نامیم.

$$\text{میانگین سال ها} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \rightarrow A(3.5, 39)$$

$$\text{میانگین درآمدها} = \frac{22 + 25 + 40 + 50 + 45 + 52}{6} = \frac{234}{6} = 39$$

نقطه انتهایی را B نامیده و معادله خط AB را تعیین می کنیم. $B(6, 52)$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{52 - 39}{6 - 3.5} = \frac{13}{2.5} = 5.2$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$$

$$y - 52 = 5.2(x - 6) \rightarrow y - 52 = 5.2x - 31.2 \rightarrow y = 5.2x + 20.8$$

عدد Y را در معادله خط جایگزین x می کنیم.

$$y = 5.2x + 20.8 \xrightarrow{x=7} y = 5.2(7) + 20.8 = 57.2$$

تمرین ۱ صفحه ۶۸ کتاب درسی

کدام یک از داده های زیر، سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته

ب) تعداد مشتریان یک تاجر بر حسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می کند.

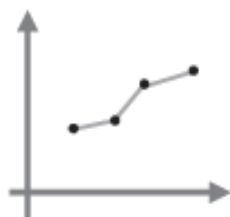
پ) تعداد ساعاتی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم؛ شدت آفتاب سوختگی.

فقط مورد «الف» سری زمانی است.

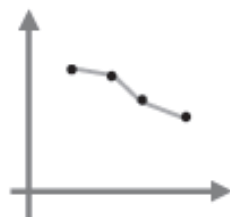
موارد «پ» و «پپ» سری زمانی نیستند زیرا جمع آوری داده ها در زمان های مساوی و منظم نمی باشند.

تمرین ۲ صفحه ۶۸ کتاب درسی

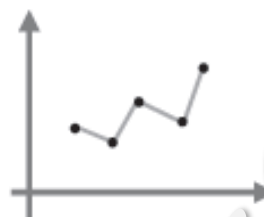
اگر نمودارهای شکل زیر، مربوط به سری های زمانی باشند، در کدام حالت، درون یابی و برون یابی خطی بهتری امکان پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

در نمودارهای (۱) و (۲) داده ها یکنواخت تر تغییر می کنند (خط کمتر)؛ لذا درون یابی و برون یابی خطی بهتری صورت می گیرد.

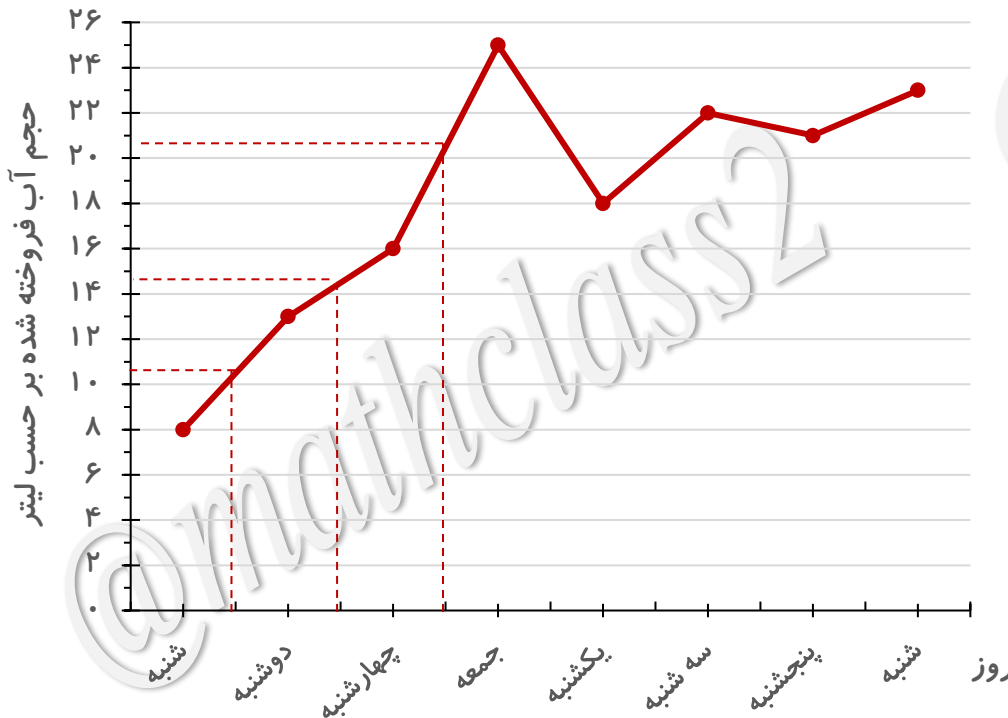
تمرین ۳ صفحه ۶۹ کتاب درسی

یک دکه دار حجم آب فروخته شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان (بر حسب لیتر)، مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

| روز های هفته | شنبه | دوشنبه | چهارشنبه | جمعه | یکشنبه | سه شنبه | پنجشنبه | شنبه |
|-------------------|------|--------|----------|------|--------|---------|---------|------|
| حجم آب فروخته شده | ۸ | ۱۳ | ۱۶ | ۲۵ | ۱۸ | ۲۲ | ۲۱ | ۲۳ |

(الف) نمودار سری زمانی داده ها را رسم کنید.

(ب) حجم آب فروخته شده در روزهای فرد را درون یابی کنید.



$$\text{حجم آب فروخته شده در روز یکشنبه هفته اول} = \frac{۸ + ۱۳}{۲} = ۱۰/۵$$

$$\text{حجم آب فروخته شده در روز سه شنبه هفته اول} = \frac{۱۳ + ۱۶}{۲} = ۱۴/۵$$

$$\text{حجم آب فروخته شده در روز پنجشنبه هفته اول} = \frac{۱۶ + ۲۵}{۲} = ۲۰/۵$$

تمرین ۳ صفحه ۶۹ کتاب درسی

یک دکه دار حجم آب فروخته شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان (بر حسب لیتر)، مطابق با جدول زیر ثبت کرده است:

| روز های هفته | شنبه | دوشنبه | چهارشنبه | جمعه | یکشنبه | سه شنبه | پنجشنبه | شنبه |
|-------------------|------|--------|----------|------|--------|---------|---------|------|
| حجم آب فروخته شده | ۸ | ۱۳ | ۱۶ | ۲۵ | ۱۸ | ۲۲ | ۲۱ | ۲۳ |

پ) تعداد بطری های فروخته شده در روز دوشنبه از هفته سوم (روز هفدهم) را برون یابی کنید.

میانگین فروش بطری های آب و میانگین شماره روزها را محاسبه کرده آن را به صورت زوج مرتب می نویسیم و نقطه A می نامیم.

$$\text{میانگین شماره روزها} = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15}{8} = \frac{64}{8} = 8 \rightarrow A(8, 18/25)$$

$$\text{میانگین فروش بطری های آب} = \frac{8 + 13 + 16 + 25 + 18 + 22 + 21 + 23}{8} = \frac{146}{8} = 18/25$$

نقطه انتهایی را B نامیده و معادله خط AB را تعیین می کنیم. $B(15, 23)$ یعنی در روز پانزدهم ۲۳ بطری آب فروخته شده است.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{23 - 18/25}{15 - 8} = \frac{4/25}{7} \cong 0/68$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$$

$$y - 23 = 0/68(x - 15) \rightarrow y - 23 = 0/68x - 10/2 \rightarrow y = 0/68x + 12/8$$

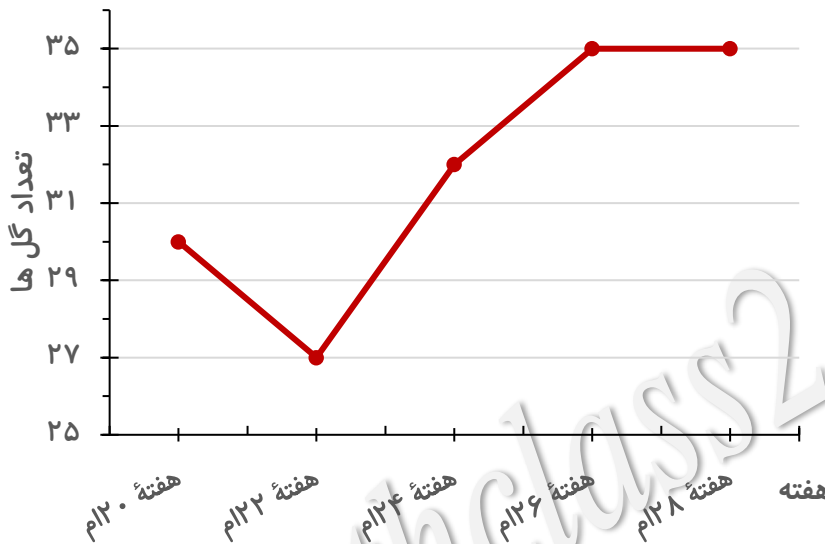
عدد ۱۷ را در معادله خط جایگزین x می کنیم.

$$y = 0/68x + 12/8 \xrightarrow{x=17} y = 0/68(17) + 12/8 = 24/36$$

تمرین ۴ صفحه ۶۹ کتاب درسی

تعداد گل های زده شده در لیگ برتر فوتبال (جام خلیج فارس) در هفته های زوج و پايانی در جدول زیر آمده است.

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|-------------|
| ۲۸ | ۲۶ | ۲۴ | ۲۲ | ۲۰ | هفته |
| ۳۵ | ۳۵ | ۳۲ | ۲۷ | ۳۰ | تعداد گل ها |



الف) نمودار سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید.

ب) تعداد گل های هفته سی ام را برون یابی کنید.

$$\text{میانگین هفته ها} = \frac{۲۰ + ۲۲ + ۲۴ + ۲۶ + ۲۸}{۵} = \frac{۱۲۰}{۵} = ۲۴$$

$$\text{میانگین تعداد گل ها} = \frac{۳۰ + ۲۷ + ۳۲ + ۳۵ + ۳۵}{۵} = \frac{۱۵۹}{۵} = ۳۱/۸$$

$$\rightarrow A(۲۴, ۳۱/۸) \text{ و } B(۲۸, ۳۵)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳۵ - ۳۱/۸}{۲۸ - ۲۴} = \frac{۳/۲}{۴} = ۰/۸$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \rightarrow y - ۳۵ = ۰/۸(x - ۲۸) \rightarrow y - ۳۵ = ۰/۸x - ۲۲/۴ \rightarrow y = ۰/۸x + ۱۲/۶$$

$$y = ۰/۸x + ۱۲/۸ \xrightarrow{x=۳۰} y = ۰/۸(۳۰) + ۱۲/۶ = ۳۶/۶ \cong ۳۷$$

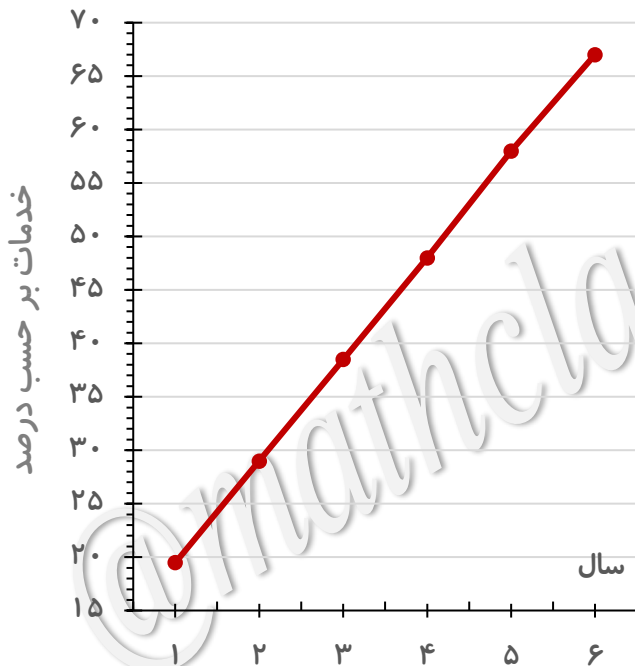
تمرین ۵ صفحه ۶۹ کتاب درسی

میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) بر حسب درصد در جدول زیر آمده است.

| سال | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|-------|------|----|------|----|----|----|
| خدمات | ۱۹/۵ | ۲۹ | ۳۸/۵ | ۴۸ | ۵۸ | ۶۷ |

الف) نمودار سری زمانی داده ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه، برون یابی کنید.



$$\text{میانگین سال ها} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3\frac{3}{5}$$

$$\text{میانگین درصد خدمات} = \frac{19\frac{1}{5} + 29 + 38\frac{1}{5} + 48 + 58 + 67}{6} = \frac{260}{6} \cong 43\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow A(3\frac{3}{5}, 43\frac{1}{3}) \text{ و } B(6, 67)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{67 - 43\frac{1}{3}}{6 - 3\frac{3}{5}} = \frac{23\frac{2}{3}}{2\frac{2}{5}} = 9\frac{1}{48}$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \rightarrow y - 67 = 9\frac{1}{48}(x - 6) \rightarrow$$

$$y - 67 = 9\frac{1}{48}x - 56\frac{1}{8} \rightarrow y = 9\frac{1}{48}x + 10\frac{1}{12}$$

$$y = 9\frac{1}{48}x + 10\frac{1}{12} \xrightarrow{x=7} y = 9\frac{1}{48}(7) + 10\frac{1}{12} = 76\frac{1}{48}$$

تمرین ۶ صفحه ۶۹ کتاب درسی

تعداد زلزله های دارای شدت بیش از ۷ ریشتر در جهان، مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

| سال | اول | دوم | سوم | چهارم | پنجم | ششم | هفتم | هشتم | نهم | دهم |
|-------------------------------|-----|-----|-----|-------|------|-----|------|------|-----|-----|
| تعداد زلزله های بالای ۷ ریشتر | ۳۰ | ۲۸ | ۲۹ | ۲۳ | ۲۰ | ۱۶ | ۲۱ | ۲۵ | ۱۶ | ۲۱ |

الف) نمودار سری زمانی آن را رسم کنید.

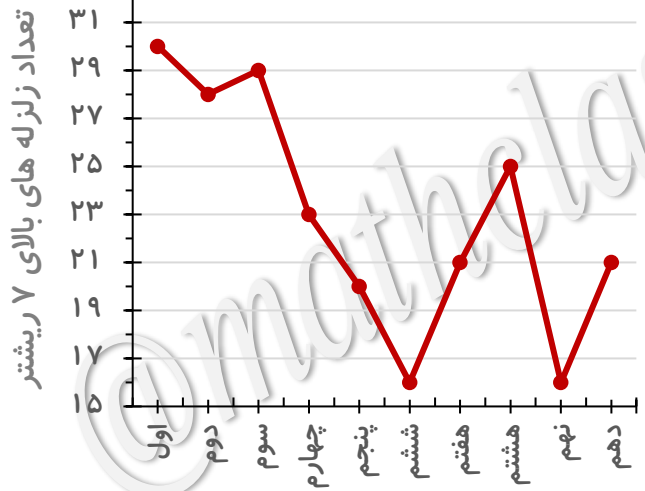
ب) میانگین سال و تعداد زلزله ها را به دست آورید.

پ) معادله خطی را که نقطه (۱۰, ۲۱) را به میانگین سال و تعداد زلزله ها وصل می کند، به دست آورید.

ت) با استفاده از خطی که معادله آن را به دست آورده اید، تعداد زلزله های شدیدتر از ۷ ریشتر در سال یازدهم در جهان را برون یابی کنید.

ج) اگر بدانیم که در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون یابی چه قدر است؟

$E = |25 - 20/58| = 4/46$



میانگین سال = $\frac{55}{10} = 5/5$ میانگین زلزله ها = $\frac{229}{10} = 22/9$

$\rightarrow A(5/5, 22/9)$ و $B(10, 21)$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{21 - 22/9}{10 - 5/5} = \frac{-1/9}{4/5} \cong -0/42$

$y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \rightarrow y - 21 = -0/42(x - 10) \rightarrow$

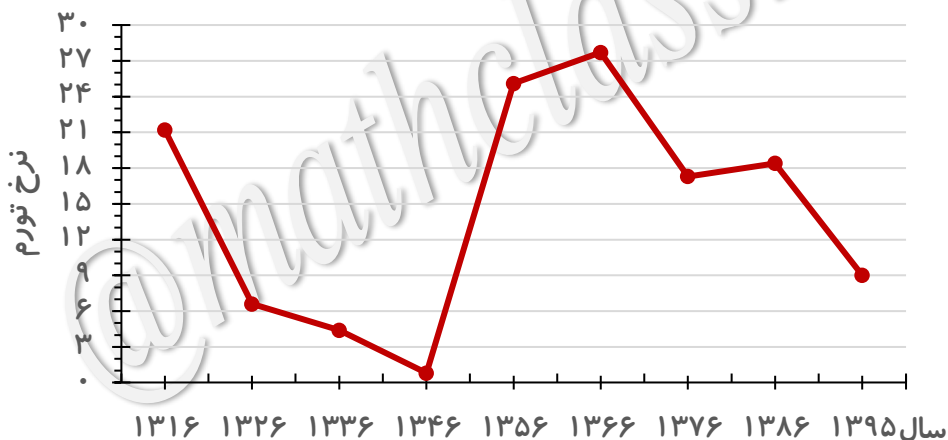
$y - 21 = -0/42x + 4/2 \rightarrow y = -0/42x + 25/2$

$y = -0/42x + 25/2 \xrightarrow{x=11} y = -0/42(11) + 25/2 = 20/58$

تمرین ۷ صفحه ۷۰ کتاب درسی

نرخ تورم در ایران طی سال های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده شده است.

| سال | نرخ تورم | سال | نرخ تورم | سال | نرخ تورم | سال | نرخ تورم | سال | نرخ تورم | سال | نرخ تورم | سال | نرخ تورم |
|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|
| ۱۳۱۶ | ۲۱/۲ | ۱۳۲۶ | ۶/۶ | ۱۳۳۶ | ۴/۴ | ۱۳۴۶ | ۰/۸ | ۱۳۵۶ | ۲۵/۱ | ۱۳۶۶ | ۲۷/۷ | ۱۳۷۶ | ۱۷/۳ |
| ۱۳۱۷ | ۸/۸ | ۱۳۲۷ | ۱۱/۱ | ۱۳۳۷ | ۱/۰ | ۱۳۴۷ | ۱/۵ | ۱۳۵۷ | ۱۰/۰ | ۱۳۶۷ | ۲۸/۹ | ۱۳۷۷ | ۱۸/۱ |
| ۱۳۱۸ | ۸/۰ | ۱۳۲۸ | ۲/۳ | ۱۳۳۸ | ۱۳/۰ | ۱۳۴۸ | ۳/۶ | ۱۳۵۸ | ۱۱/۴ | ۱۳۶۸ | ۱۷/۴ | ۱۳۷۸ | ۲۰/۱ |
| ۱۳۱۹ | ۱۳/۸ | ۱۳۲۹ | -۱۷/۲ | ۱۳۳۹ | ۷/۹ | ۱۳۴۹ | ۱/۵ | ۱۳۵۹ | ۲۳/۵ | ۱۳۶۹ | ۹/۰ | ۱۳۷۹ | ۱۲/۶ |
| ۱۳۲۰ | ۴۹/۵ | ۱۳۳۰ | ۸/۳ | ۱۳۴۰ | ۱/۶ | ۱۳۵۰ | ۵/۵ | ۱۳۶۰ | ۲۲/۸ | ۱۳۷۰ | ۲۰/۷ | ۱۳۸۰ | ۱۱/۴ |
| ۱۳۲۱ | ۹۶/۲ | ۱۳۳۱ | ۷/۲ | ۱۳۴۱ | ۰/۹ | ۱۳۵۱ | ۶/۳ | ۱۳۶۱ | ۱۹/۲ | ۱۳۷۱ | ۲۴/۴ | ۱۳۸۱ | ۱۵/۸ |
| ۱۳۲۲ | ۱۱۰/۵ | ۱۳۳۲ | ۹/۲ | ۱۳۴۲ | ۱/۰ | ۱۳۵۲ | ۱۱/۲ | ۱۳۶۲ | ۱۴/۸ | ۱۳۷۲ | ۲۲/۹ | ۱۳۸۲ | ۱۵/۶ |
| ۱۳۲۳ | ۲/۷ | ۱۳۳۳ | ۱۵/۹ | ۱۳۴۳ | ۴/۵ | ۱۳۵۳ | ۱۵/۵ | ۱۳۶۳ | ۱۰/۴ | ۱۳۷۳ | ۳۵/۲ | ۱۳۸۳ | ۱۵/۲ |
| ۱۳۲۴ | -۱۴/۴ | ۱۳۳۴ | ۱/۷ | ۱۳۴۴ | ۰/۳ | ۱۳۵۴ | ۹/۹ | ۱۳۶۴ | ۶/۹ | ۱۳۷۴ | ۴۹/۴ | ۱۳۸۴ | ۱۰/۴ |
| ۱۳۲۵ | -۱۱/۵ | ۱۳۳۵ | ۸/۸ | ۱۳۴۵ | ۰/۸ | ۱۳۵۵ | ۱۶/۶ | ۱۳۶۵ | ۲۳/۷ | ۱۳۷۵ | ۲۳/۲ | ۱۳۸۵ | ۱۱/۹ |

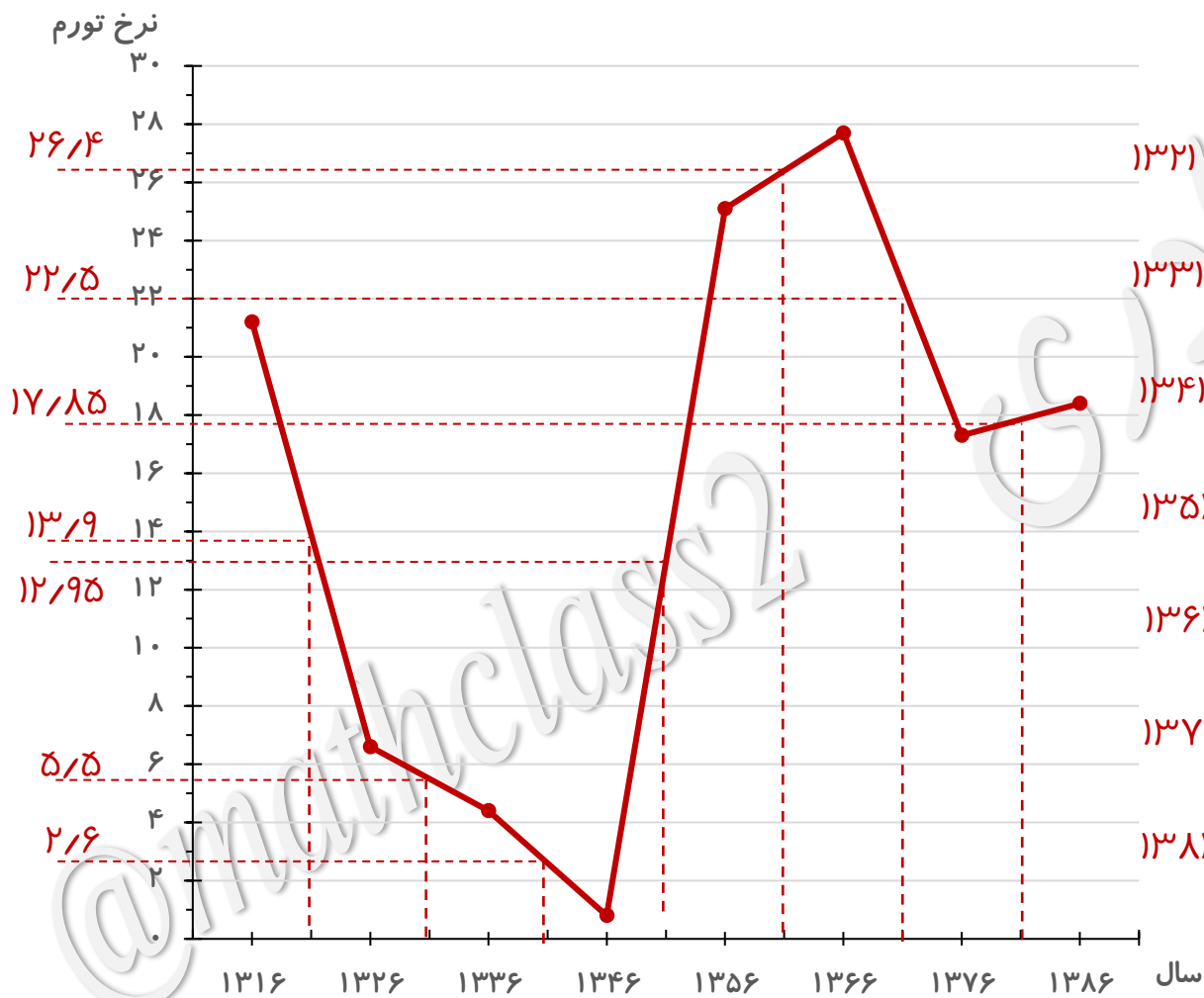


الف) نمودار سری زمانی داده های ده سال به ده سال را

رسم کنید.

تمرین ۷ صفحه ۷۰ کتاب درسی

ب) داده های پنج سال به پنج سال را با استفاده از قسمت قبل درون یابی کنید.



$$\text{تورم در سال } ۱۳۲۱ = \frac{۲۱/۲ + ۶/۶}{۲} = ۱۳/۹$$

$$\text{تورم در سال } ۱۳۳۱ = \frac{۶/۶ + ۴/۴}{۲} = ۵/۵$$

$$\text{تورم در سال } ۱۳۴۱ = \frac{۴/۴ + ۰/۸}{۲} = ۲/۶$$

$$\text{تورم در سال } ۱۳۵۱ = \frac{۰/۸ + ۲۵/۱}{۲} = ۱۲/۹۵$$

$$\text{تورم در سال } ۱۳۶۱ = \frac{۲۵/۱ + ۲۷/۷}{۲} = ۲۶/۴$$

$$\text{تورم در سال } ۱۳۷۱ = \frac{۲۷/۷ + ۱۷/۳}{۲} = ۲۲/۵$$

$$\text{تورم در سال } ۱۳۸۱ = \frac{۱۷/۳ + ۱۸/۴}{۲} = ۱۷/۸۵$$

تمرین ۷ صفحه ۷۰ کتاب درسی

پ) بر روی همان سری زمانی، داده های پنج سال به پنج سال را با استفاده از جدول بر روی همان نمودار رسم و خطای درون یابی را محاسبه کنید.

$$E_{1321} = |96/2 - 13/9| = 82/3$$

$$E_{1331} = |7/2 - 5/5| = 1/7$$

$$E_{1341} = |0/9 - 2/6| = 1/7$$

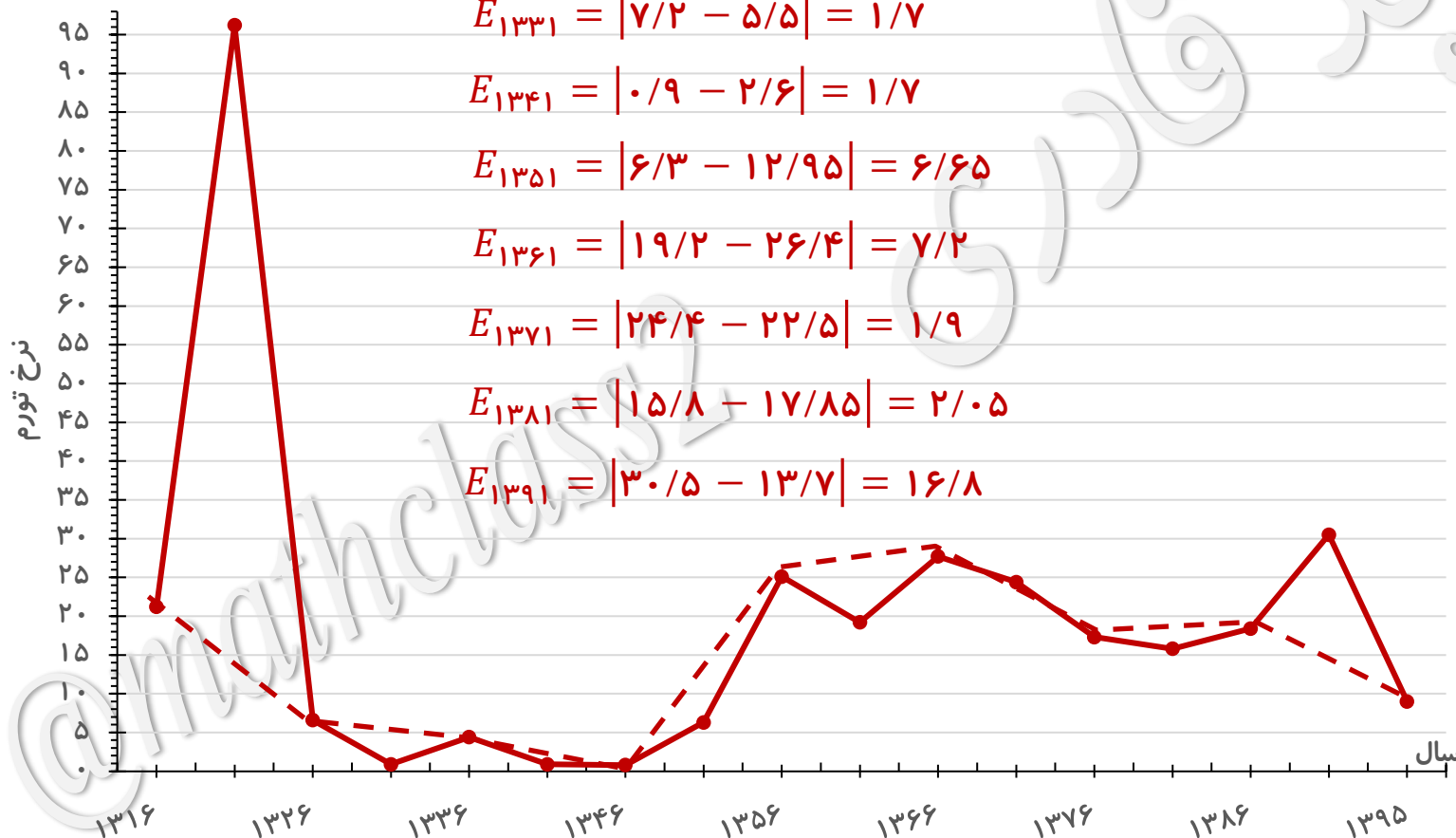
$$E_{1351} = |6/3 - 12/95| = 6/65$$

$$E_{1361} = |19/2 - 26/4| = 7/2$$

$$E_{1371} = |24/4 - 22/5| = 1/9$$

$$E_{1381} = |15/8 - 17/85| = 2/0.5$$

$$E_{1391} = |30/5 - 13/7| = 16/8$$



پایان درس دوم

