

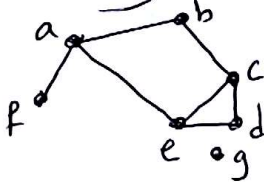
$$H \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg(v_i) = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب:

گراف G را در نظر بگیرید. این $E(G)$ و $V(G)$ را بنویسید
 (الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$

(ب) مجرای همبندی هر رأس a, b, c, d, e, f, g را بنویسید.

(ج) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$ است، رأس x کدام است؟



حل الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$E(G) = \{ab, af, ae, bc, cd, ed\}$

حل ب) $\Delta(G) = 3, \delta(G) = 0$

حل ج) $N_G(e) = \{a, c, d\}$

$N_G(g) = \{e\}, N_G(f) = \{a\}$

حل د) $N_G(u) = \{a, c\} \Rightarrow u = b$

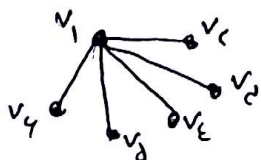
تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب:

گراف G با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ و
 مضروب است. اگر $N_G(v_1)$ را از مضروب های
 $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 4$ تک عنصری شده گراف

G را رسم کنید.

حل الف) $N_G(v_1) = 5 \rightarrow \deg(v_1) = 5$

$N_G(v_i) = 1 \rightarrow \deg(v_2) = \dots = \deg(v_4) = 1$



تمرین ۱ صفحه ۱۱ کتاب:

گراف G با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e, f\}$
 و مجموعه یال های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$

مضروب است. نمودار آن را رسم کنید و به عبارتی جواب دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) درجه رئوس گراف G را مشخص کنید.

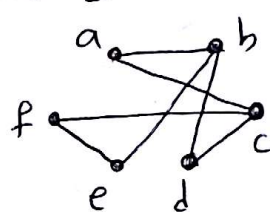
ج) کدام رأس های گراف G با رأس f مجاورند.

د) مجموع درجه رئوس این گراف برابر چند است؟

ه) گراف H با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال های

$E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$

مضروب است بدون گره نمره آن به مرتبه های
 الف) $\Delta(H)$ (ب) درجه رئوس H پاسخ دهید.



حل الف) $\Delta(H) = 4$

مرتبه $p = 4$
 اندازه $q = 7$

حل ب) $\Delta(H) = 4$

$\deg(a) = \deg(f) = \deg(e) = \deg(d) = 2$

$\deg(b) = \deg(c) = 3$

$S = 3, 3, 2, 2, 2, 2$

حل ج) $N_G(f) = \{c, e\}$

حل د) $\sum_{i=1}^4 \deg(v_i) = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14 = 2q$

حل ه) $p_H = 4, q_H = 6$

$\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 3$

$N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}, N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$

$N_G(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}, N_G(v_4) = \{v_1, v_2, v_3\}$

تمرین ۳ صفحه ۴۱ کتاب

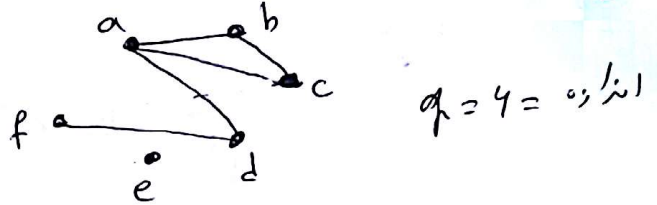
اداره حل تمرین ۵:
 G در گراف $\rightarrow \deg(a) = 2, \deg(c) = 3$
 \bar{G} در گراف $\rightarrow \deg(a) = 4 - 2 = 2$
 \bar{G} در $\rightarrow \deg(c) = 4 - 3 = 1$

تمرین ۴ صفحه ۴۱ کتاب

در گراف G با مجموعه رأسهای
 $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$

دایم:
 $N_G(a) = \{b, c, d\}$, $N_G(b) = \{a, c\}$
 $N_G(c) = \{a, b\}$, $N_G(d) = \{a, f\}$
 $N_G(e) = \{ \}$, $N_G(f) = \{d\}$

گراف G را رسم کنید و اندازه آن را مشخص کنید.
 حل:



تمرین ۶ صفحه ۴۲ کتاب

گراف کامل K_p دارای ۳۴ لبه است در این گراف
 $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.
 حل:

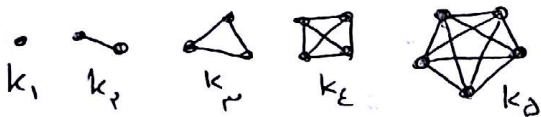
K_p در $\rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2} = 34 \rightarrow p(p-1) = 68$

$\rightarrow p = 9$

K_9 در $\rightarrow \Delta(G) = \delta(G) = p-1 = 9-1 = 8$

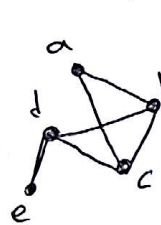
تمرین ۷ صفحه ۴۲ کتاب

گراف چهار کامل از مرتبه ۵ را رسم کنید.
 حل:



تمرین ۵ صفحه ۴۱ کتاب

گراف G رسم شده است. مجموع درجه‌های رأسهای
 گراف \bar{G} را مشخص کنید و همچنین درجه رأس
 a در گراف \bar{G} را تعیین کنید.



حل: مرتبه گراف ۵ است پس مرتبه \bar{G} نیز ۵
 است و درجه رأس a در \bar{G} عبارتست از:

$\{2, 1, 1, 1, 3\}$

$\sum_{i=1}^5 \deg(v_i) = 2 + 1 + 1 + 1 + 3 = 8$

در نتیجه:

K_5 در $\rightarrow \sum \deg(v_i) = p(p-1) = 5 \times 4 = 20$

در گراف اصلی $\sum \deg(v_i) = 2q = 2 \times 4 = 8$

در گراف \bar{G} $\sum \deg(v_i) = 20 - 8 = 12$

تمرین ۸ صفحه ۴۲ کتاب

در هر یک از حالات زیر (در صورت امکان) یک گراف
 ۳- منظم از مرتبه n رسم کنید.

(الف) $r=1$ و $n \geq 4$

(ب) $r=2$ و $n \geq 4$

(ج) $r=2$ و $n \geq 8$


(د) $r=3$ و $n \geq 8$ \leftarrow وجود ندارد زیرا ۵ رأس ندارد.


(ه) $r=4$ و $n \geq 4$


(و) $r=3$ و $n \geq 7$ \leftarrow وجود ندارد زیرا ۷ رأس ندارد.

تمرین ۹ صفحه ۴۲ کتاب:


برای هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک کرافت
۵ رأس رسم کنید به طوری که:

(الف) یک رأس تنها داشته باشد. ← 

(ب) دو رأس تنها داشته باشد. ← 

(پ) ۳ رأس تنها داشته باشد. ← 

(ت) ۴ رأس تنها داشته باشد. ← امکان ندارد.

(ث) ۵ رأس تنها داشته باشد. ← 

تمرین ۱۱ صفحه ۴۲ کتاب:

علی، سمان، محمد، ناصر و مراد در یک شبکه اجتماعی
عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فرست
دوستان هر کدام از هم نفر دیگر باشد یا نباشد.
این شبکه حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد.
(الف) اگر مجموع در فرست دوستان رابطه ای (وطرفه)
باشد یعنی هر دو نفر یا در فرست دوستان هم هستند
و یا هیچ کدام در فرست دوستان دیگری نیستند
در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته
باشد.

حل (الف) ۵ نفر را به عنوان ۵ رأس کرافت در نظر
می گیریم. مگر آنکه علی در فرست دوستان ناصر باشد
یک لبه دارد از رأس علی به رأس ناصر. ناصر هم
می تواند در فرست دوستان مراد باشد و مراد هم
رأس هستد و تعداد آن را می شود.

$$2^5 - 2 = 2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$$

حل (ب). در این حالت کرافت که توسط این ۵ نفر
که به عنوان ۵ رأس در نظر می گیریم رسم می شود کرافت
مستطیل است و تعداد کرافت که می تواند با ۵ رأس
تکمیل می شود برابر است با

$$\frac{P(5,1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \quad P=5$$

تمرین ۱۰ صفحه ۴۲ کتاب:

مانند در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر
دست می دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با
۲ نفر دست داده اند. نشان دهید نفر هفتم نمی تواند
دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

حل اگر ۷ نفر را ۷ رأس کرافت در نظر بگیریم

باید بتوانیم این کرافت را چنان رسم کنیم که ۶ رأس درجه ۲
و ۱ رأس درجه ۵ داشته باشد و چنین

کرافت نمی توان رسم کرد زیرا ۱ رأس فرد دارد.

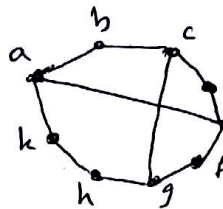
در حالتی باید تعداد رأس فرد در هر کرافت زوج باشد.

پس چنین کاری امکان پذیر نیست.

تمرین ۱۲ صفحه ۴۲ کتاب:

یک گراف ۹ رأس کنه به طوری که:

الف) دورهای به طول ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ داشته باشد
و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



- حل:
 ۱) a, b, c, d, e, a دور به طول ۵
 ۲) a, b, c, g, f, e, a دور به طول ۶
 ۳) a, e, f, g, c, d, e, a دور به طول ۷
 ۴) $a, b, c, d, e, f, g, h, k, a$ دور به طول ۹

ب) دورهای به طول ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

حل: چنین گرافی وجود ندارد. به هر طریق که این گراف را رسم کنیم به طوری که دور به طول ۸، ۷ داشته باشد دور به طول ۳، ۴، ۵ طول بزرگتر و کوچکتر که طبق خواص مثل این دورها در گراف نباید باشد.

تمرین ۱۳ صفحه ۴۲ کتاب:

فرض کنید G یک گراف باشد و $k \geq 3$ و $k \in G$ درست یا نادرست هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

- الف) G لزوماً یک مسیر به طول k دارد.
 ب) G لزوماً یک مسیر به طول $k+1$ دارد.

حل: الف) درست است

ب) رد است: رأس v_1 را در گراف G رسم کنیم. از v_1 مسیر به v_{k+1} متصل است زیرا در میزانی $k=5$ خواهد بود. همچنین v_1 به رأس v_2 متصل است مثلاً v_1 زیرا در میزانی $k=5$ خواهد بود.

ادامه ←

ادامه حل الف تمرین ۱۲

همچنین v_1 به رأس میزانی v_2, v_3, \dots, v_k و v_{k+1} وصل است زیرا در میزانی k مقدار k برابر خواهد بود.

این روند را ادامه می دهیم تا به رأس جدید v_k برسیم که با استدلال مشابه قبلی به رأس جدیدی مانده v_{k+1} وصل باشد.

بنابراین مسیری $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$

یک مسیر به طول k در گراف G است.

حل ب: نادرست است.

مثلاً در یک گراف با $p=1$ رأس داریم $k=2$

و یک مسیر به طول $k+1=3$ وجود ندارد.

تمرین ۱۴ صفحه ۴۲ کتاب:

یک گراف n رأس میزانی k منتظم یکسره که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



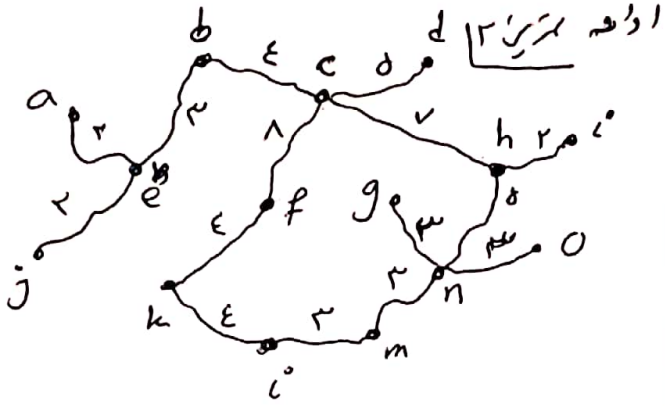
تمرین ۱۵ صفحه ۴۲ کتاب:

یک گراف n رأس میزانی k منتظم یکسره که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد

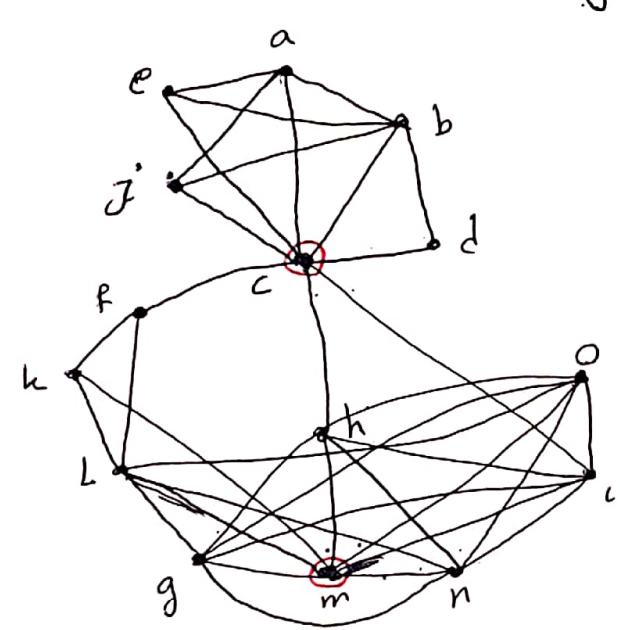
ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.





تمرین ① صفحہ ۵۲ کتاب:
در مثال استیفاہوں رادیوں (دو میں مثال این دریں)
الف) تعداد و محل نصب استیفاہوں را متفرقیہ
ب) حداقل ۳ استیفاہوں در صورت
۱) {d, k, o} ۲) {g, h, i} ۳) {d, e, f, ...}

حل



ب) اگر مجبوراً ۳ یکن از استیفاہوں را در ۳ تا
اعداد کنیم حداقل صند استیفاہوں دیگر در ۳ تریہاں
بہ اعداد کنیم؟
حل حداقل ۲ استیفاہوں دیگر بہ اعداد ۳ طور
کہ مکان آنہ عبارت از
۱) {g, i} ۲) {k, o} ۳) {d, ...}

تمرین ② صفحہ ۵۲ کتاب:

ہر ۳ روت کہ حاصل آن ہا ۱۰ تریہاں
را بہ یال ہاں بہ ہم وصل کنیم گراف فوق
حاصل منظور

فہم؟ تھہ بر نقتہ؟ کب منقطع تہاں صند روت
و چارہ ہاں بین آن روت ہاں کہ منقطع
چارہ کر ہیں آن روت ہاں در آن متفرق ہوں
فہم داریم صند بہارت ل محجز در رخ روت ہاں اعداد
کنیم بہ گویار کہ حاصل ہر روت تہاں نزدیک بہ بہارت
بہ آن روت اذ ۱۰ گدیتر ہستہ باشہ و از طرف
تہاں تعداد بہارت تہاں ملکہ اعداد کنیم. اہتر
بہ ترمیم ہستہ طرق مسلم مورد نظر را بہ تہاں
تہاں بدل ہوں کنیم و بین تعداد و محل
اعداد بہارت تہاں متفرقیہ

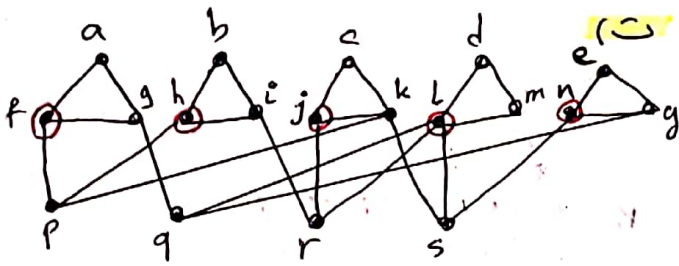
$$p = n = 10, \Delta = 3$$

$$\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \chi(G)$$

$$\rightarrow \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 2 \leq \chi(G)$$

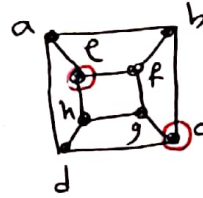
$$\chi(G) = 2$$

بہ صند تہاں بہارت تہاں کر۔ اعداد تہاں
برابر ۲



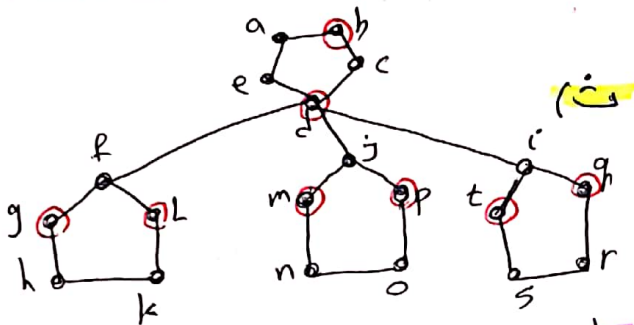
$P = n = 14$ $\Delta = 5$ حل
 $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil \leq \chi(G) \rightarrow \lceil \frac{14}{5+1} \rceil = 3 \leq \chi(G)$
 $S = \{f, h, j, l, n\}$ یک مجموعه احاطه گر هستیم
 $\rightarrow \chi(G) = 3$

تمرین ۳) صفحه ۵۲ کتاب: عدد احاطه گری را برابر هر یک از طرفین زیر بنویسید:

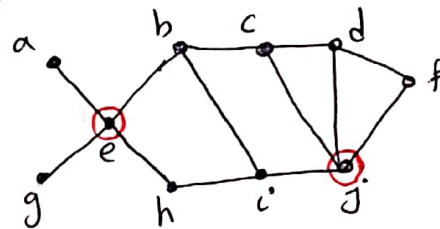


$\Delta = 3$, $P = n = 8$ حل

$\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil \leq \chi(G) \rightarrow \lceil \frac{8}{3+1} \rceil = 2 \leq \chi(G)$
 $\rightarrow 2 \leq \chi(G)$
 و مجموعه $S = \{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر هستیم
 پس $\chi(G) = 2$

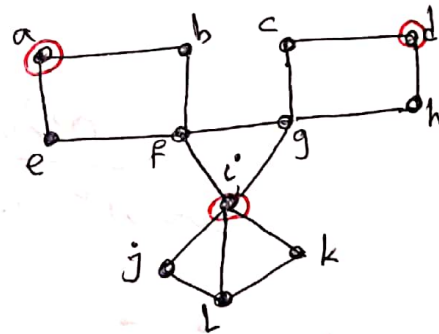


$P = n = 20$, $\Delta = 5$ حل
 $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil \leq \chi(G) \rightarrow \lceil \frac{20}{5+1} \rceil = 4 \leq \chi(G)$
 $S = \{b, d, g, l, m, p, t, g\}$ یک مجموعه احاطه گر هستیم
 $\rightarrow \chi(G) = 4$



$P = n = 10$ $\Delta = 4$ حل
 $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil \leq \chi(G) \rightarrow \lceil \frac{10}{4+1} \rceil = 3 \leq \chi(G)$
 $S = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه گر هستیم
 $\Rightarrow \chi(G) = 3$

تمرین ۴ صفحه ۵۳ کتاب: اگر برابری گراف G داشته باشیم $\chi(G) = 1$ در این صورت P به بیشترین درجه از گراف G همان P است. $\Delta(G)$ در صورتی که $\Delta(G) = 1$ در این صورت $\chi(G) = 1$ است.



$P = n = 12$, $\Delta = 5$ حل
 $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil \leq \chi(G) \rightarrow \lceil \frac{12}{5+1} \rceil = 2 \leq \chi(G)$
 $S = \{a, d, i\}$ یک مجموعه احاطه گر هستیم
 $\chi(G) = 3$

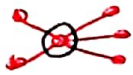
حل: چون $\chi(G) = 1$ پس از برابری گراف $P = n$ است. گراف به صورت $\Delta = n-1$ ، $q_{min} = n-1$ است.
 ۱) $\Delta = n-1$, $q_{min} = n-1$
 ۲) $\Delta = n-1$, $q_{max} = \frac{n(n-1)}{2}$

حل تمرینات درس احاطه تری در اینجا است صفحه (۳)

تمرین ۸ صفحه ۵۳ کتاب:

الف) یک گراف G رأس که γ - مجرم آن با اندازه ۱ باشد رسم کنید.

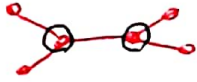
$P_2 = n = 6$
 $\gamma(G) = 1$



حل

ب) یک گراف G رأس که γ - مجرم آن با اندازه ۲ باشد رسم کنید.

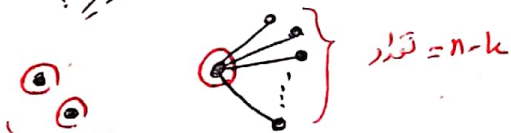
$P_2 = n = 6$
 $\gamma(G) = 2$



حل

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$. روش برای رسم یک گراف n رأس که عدد احاطه تری آن k باشد ارائه دهید.

حل: کامیت گراف دارای k مجرم رسم کنیم که $k-1$ رأس منفرد (انزوله) داشته باشد و یک رأس اندرجم $n-k$ داشته باشد به صورت زیر:



تعداد = $n-k$

تعداد = $k-1$

$\gamma(G) = (k-1) + 1 = k$

تمرین ۵ صفحه ۵۳ کتاب:

$\gamma(P_n)$, $\gamma(C_n)$ را برای هر n متفقاً

P_n	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	...
$\gamma(P_n)$	1	1	1	2	2	2	...

$\gamma(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

C_n	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	...
$\gamma(C_n)$	1	2	2	2	3	3	3	...

$\gamma(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

تمرین ۶ صفحه ۵۳ کتاب:

اگر G یک گراف k - منتظم n رأس باشد $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor \leq \gamma(G)$ نشان دهید.

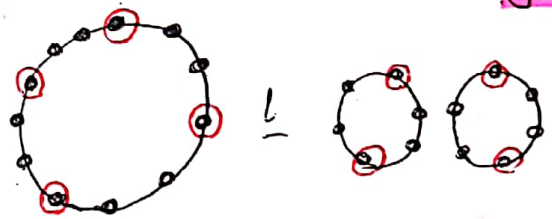
حل: در گراف k - منتظم داریم $\delta = \Delta = k$

و نیز در این در هر گراف $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor \leq \gamma(G)$

$\Delta = k \rightarrow \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor \leq \gamma(G)$

تمرین ۷ صفحه ۵۳ کتاب:

یک گراف 2 - منتظم 12 رأس بکشید که عدد احاطه تری آن کمتر از 4 باشد.

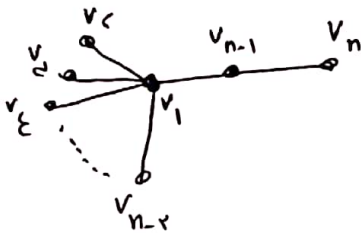


$\gamma(G) = 4$

اداره تمرین ۱۰ صفحه ۵۴ کتاب

الف) چگونه می توانیم یک گراف n رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنیم که بیش از یک مجرای احاطه گری با اندازه ۲ داشته باشد.

حل: کامیت یک گراف را به هم وصل زیر رسم کنیم

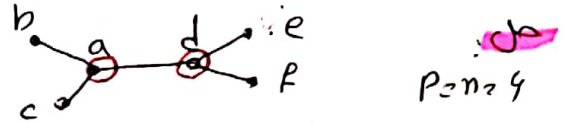


مجموعه گس احاطه گری با اندازه ۲ عبارتند از:

$$S_1 = \{v_1, v_{n-1}\} \text{ و } S_2 = \{v_1, v_n\}$$

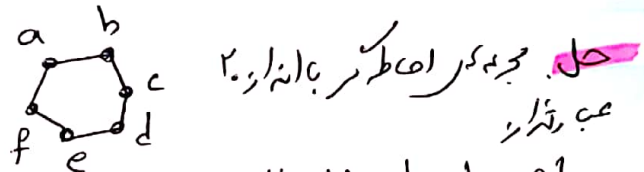
تمرین ۹ صفحه ۵۳ کتاب

الف) یک گراف 4 رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجرای احاطه گری با اندازه ۲ داشته باشد.



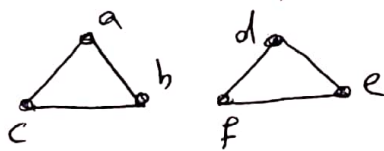
مجموعه احاطه گری با اندازه ۲: $S = \{a, d\}$

ب) یک گراف 4 رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجرای احاطه گری با اندازه ۲ داشته باشد.



مجموعه گس احاطه گری با اندازه ۲ عبارتند از: $\{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}$

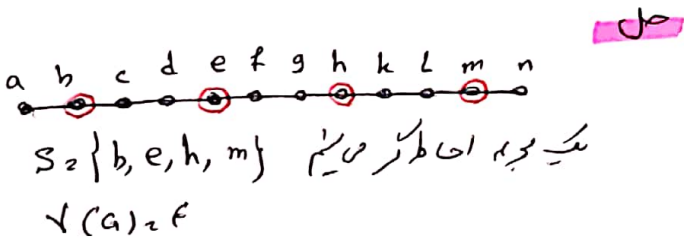
یا می توان به هم وصل زیر رسم کرد



مجموعه گس احاطه گری با اندازه ۲: $\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \dots$

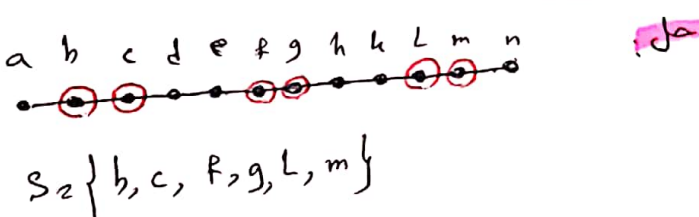
تمرین ۱۱ صفحه ۵۴ کتاب

گراف P_{12} را رسم کنید. الف) یک 4 -مجرای از آن را مشخص کنید.



یک مجرای احاطه گری $S_2 = \{b, e, h, m\}$ و $V(a) = f$

ب) یک مجرای احاطه گری منبسط 4 عضوی از آن مشخص کنید.



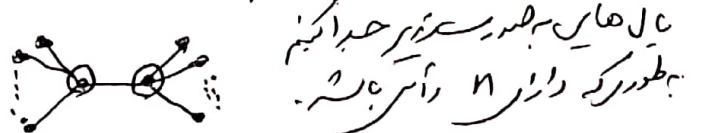
$S_2 = \{b, c, f, g, L, m\}$

تمرین ۱۰ صفحه ۵۴ کتاب

برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید:

الف) چگونه می توانیم یک گراف n رأسی رسم کنیم که یک مجرای احاطه گری با اندازه ۲ داشته باشد.

حل: کامیت یک n رأسی را رسم کنیم



یا می توان به هم وصل زیر رسم کرد. بطوریکه در n رأسی داشته باشد.