

فصل دوم : احتمال

درس اول : مبانی احتمال

علم آمار و احتمال هر دو برای حل مسأله هایی به کار می روند که همراه با عدم اطمینان و ناآگاهی از شرایط آینده است.

موافقی که جامعه نامعلوم بوده و اطمینان بررسی همه اعضای جامعه نیست، با انجام نمونه گیری و جمع آوری داده های معلوم سعی داریم جامعه را بشناسیم، این کار در **علم آمار** صورت می گیرد.

* شناخت جامعه نامعلوم از روی نمونه معلوم، کار علم آمار است *

اما وقتی جامعه معلوم است و هدف شناخت نمونه نامعلوم است، این کار در **علم احتمال** انجام می شود.

* شناخت نمونه نامعلوم از روی جامعه معلوم، کار علم احتمال است *

مثال : کدام یک از سوال های زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟
الف) چند نفر از فوتبالیست های لیگ برتر در سال گذشته تحصیلات دانشگاهی داشته اند؟

علم آمار

ب) ۹۷٪ افراد جامعه ای با سوادند، اگر ۱۰ نفر از آنها را انتخاب کنیم، چقدر ممکن است یکی از آنها بی سواد باشد؟

علم احتمال

پ) چند نفر از دانش آموزان ایران عضو شبکه های اجتماعی فضای مجازی هستند؟

علم آمار

ت) درآمد کارمندان شرکت نفت چقدر است؟

علم آمار

ث) می دانیم از بین ۱۰ لامپ یک جعبه ۴ تا از آنها سالم است. چند تا لامپ از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که حداقل یکی از لامپ ها سالم نیست؟ علم احتمال



فضای نمونه Ω : در آزمایش تصادفی، به مجموعه‌ی هم‌پای نتایج ممکن، در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه Ω گفته می‌شود.

برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوئیم. به طور مثال در پرتاب یک تاس مجموعی $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضای نمونه Ω بوده که تعداد اعضای آن $n(S) = 6$ است و هر یک از اعضای S یک برآمد است. مثلاً 1 یک برآمد از S است.

توجه: اگر آزمایش اصلی از دو آزمایش بافضاهای نمونه‌ای S_1 و S_2 تشکیل شده باشد، فضای نمونه‌ای مناسب $S_1 \times S_2$ خواهد بود. (البته فرقی نمی‌کند $S_1 \times S_2$ یا $S_2 \times S_1$ را در نظر بگیریم).

به عنوان نمونه در پرتاب یک تاس و یک سکه داریم:

$$S_1 = \{R, P\} \quad \text{و} \quad S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Rightarrow S = S_1 \times S_2 = \{(R, 1), (R, 2), \dots, (R, 6), (P, 1), (P, 2), \dots, (P, 6)\}$$

پیامد: به هر زیر مجموعه از فضای نمونه Ω ، پیامد می‌گوئیم. توجه داشته باشیم که هر پیامد غیر ممکن و S پیامد حتمی است.

سوال: با چه شرطی می‌توان ادعا کرد، یک پیامد رخ داده است؟
پاسخ: اگر با انجام آزمایش تصادفی، یکی از عضوهای پیامد، اتفاق بیفتد، تویم پیامد رخ داده است.

به طوری مثال اگر در پرتاب یک تاس $A = \{1, 3, 6\}$ پیامد مورد نظر باشد و نتیجه‌ی پرتاب تاس عدد 3 باشد، تویم A رخ داده است. به عبارت دیگر



اگر $B \subseteq A$ و با انجام آزمایش B رخ بدهد، حتماً A هم رخ داده است.

سؤال: اگر a برآمدی از یک فضای نمونه Ω عضوی باشد، بارخ دادخ a ، چند پیامد از این فضای نمونه ای رخ داده است؟

بارخ دادخ a ، همه پیامدهایی که a عضوی از آنهاست رخ داده است. یعنی تمام زیر مجموعه های S که شامل a هستند. تعداد آنها برابر است با:

$$\text{حالات} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \xrightarrow{\times} \quad 2^4 = 16$$

a ۴ عضو دیگر

سؤال: از میان ۴ معلم، ۱ کارگر، ۲ کارمند، یک گروه ۳ نفره انتخاب کرده ایم. مطلوب است تعداد اعضای:

الف) فضای نمونه $n(S) = \binom{11}{3} = 165$

ب) پیامد A این که هر ۳ نفر انتخاب شده دارای یک شغل باشند.
 با توجه به اینکه تعداد کارمندان کمتر از ۳ است، بنابراین هر سه نفر معلم یا هر سه نفر کارگر خواهند بود. در نتیجه:

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{1}{3} = 4 + 1 = 5$$

پ) پیامد B این که هیچ یک از افراد انتخاب شده همکار نباشند.
 یعنی از هر شغلی یک انتخاب صورت گیرد:

$$n(B) = \binom{4}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 1 \times 2 = 8$$

ت) پیامد C این که حداقل یکی از افراد انتخاب شده کارمند باشد.
 یعنی ۱ کارمند و ۲ نفر دیگر از بقیه یا این که ۲ کارمند و ۱ نفر دیگر از بقیه باشند:

$$n(C) = \binom{2}{1} \times \binom{9}{2} + \binom{2}{2} \times \binom{9}{1} = 2 \times 36 + 1 \times 9 = 81$$



سؤال: اگر A و B دو پیامد از فضای نمونه S باشند، هر یک از پیامدها زیر را توضیح دهید:

الف) $A \cap B$ ← این پیامد وقتی رخ می دهد که هر دو پیامد A و B رخ بدهند.

ب) $A \cup B$ ← این پیامد زمانی رخ می دهد که دست کم یکی از دو پیامد رخ دهد.

پ) $A - B$ ← این پیامد وقتی رخ می دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد. همان $A \cap B'$ است.

ت) A' ← این پیامد وقتی رخ می دهد که A رخ ندهد.

ث) $(A - B) \cup (B - A)$ ← این پیامد وقتی رخ می دهد که فقط یکی از دو پیامد رخ دهد. یعنی A و B با هم رخ ندهند.

پیامدها ناسازگار: دو پیامد A و B را ناسازگار گوئیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد. در حالت کلی تر، چند پیامد را ناسازگار گوئیم هرگاه دو به دو هیچ اشتراکی نداشته باشند.

سؤال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم. پیامد A آن است که رو و تاس عدد فرد باشد. پیامد B آن است که تاس عدد اول را نمایش دهد. آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

$$A = \{(R, 1), (R, 3), (R, 5)\}$$

$$B = \{(R, 2), (R, 3), (R, 5), (P, 2), (P, 3), (P, 5)\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{(R, 3), (R, 5)\} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A, B \text{ سازگارند}$$

تمرین: اگر A و B دو پیامد ناسازگار باشند، آیا همواره دو پیامد A' و B' سازگارند؟
خیر - اگر $B = A'$ باشد نگاه کنید:

$$B' \cap A' = A \cap A' = \emptyset \rightarrow \text{ناسازگارند}$$



تمرین: یک راننده تاکسی با حداکثر ۴ مسافر در یک خط رفت و برگشت کار می‌کند. فضای نمونه‌ای پدیده تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت چند عضو دارد هرگاه بدانیم حداقل در یک مسیر خالی حرکت نمی‌کند؟

فضای نمونه‌ای تعداد مسافران موجود در تاکسی در مسیر رفت و برگشت به صورت $S = S_1 \times S_2$ است که ۲۵ عضو دارد.

حال با توجه به این که طبق فرض سوال، حداقل در یک مسیر خالی حرکت نمی‌کند، پس حالت (۰، ۰) قابل قبول نیست. در نتیجه فضای نمونه‌ای ۲۴ عضو دارد.

تمرین: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. هر عددی که ظاهر شود به همان تعداد سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

برای هر عدد تاس، تعداد حالات پرتاب سکه را طبق جدول زیر می‌نویسیم:

عدد تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد پرتاب سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد حالات سکه	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

$$\Rightarrow n(S) = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^6 = 126$$

تمرین: در پرتاب دو تاس متمایز اگر A پیشامد مجموع شماره‌ها برابر چهار باشد، چند پیشامد و عضو نامزگار با A داریم؟

$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ و می‌دانیم فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است. اعضای A را از S خارج نموده و تعداد زیرمجموعه‌ها دو عضو از آن ۳۳ عضو باقی‌مانده را حساب می‌کنیم: $\binom{33}{2} = \frac{33 \times 32}{2} = 528$



اصول احتمال:

احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم که همواره $0 \leq P(A) \leq 1$ است.
اصول احتمال عبارتند از:

$$P(S) = 1 \quad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2) \text{ اگر } A \text{ و } B \text{ دو پیشامد ناسازگار باشند، نگاه}$$

مثال: در مجتمع آموزشی صالحین آبادان ۴۳٪ دانش آموزان گروه خونی A ، ۲۶٪ نوع B ، ۱۷٪ نوع AB و بقیه از نوع O هستند.
اگر دانش آموزی را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد گروه خونی آن از نوع A یا B باشد؟
گروه خونی افراد پیشامدهای ناسازگارند، بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.43 + 0.26 = 0.69$$

قضیه‌های احتمال:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (1)$$

اثبات: میدانیم دو پیشامد A و A' ناسازگارند و اجتماع آنها برابر S است. بنابراین طبق اصل (۱) و اصل (۲) می‌توان نوشت:

$$P(S) = P(A \cup A') \Rightarrow 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

مثال: اگر امروز احتمال بارش باران دو برابر بارش فردا باشد، چقدر احتمال دارد امروز باران نبارد؟
پیشامد بارش باران را A فرض می‌کنیم بنابراین:

$$P(A) = 2P(A')$$

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A') = 1 - 2P(A') \Rightarrow 3P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = \frac{1}{3}$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (2)$$

اثبات: با توجه به اینکه \emptyset متمم S است، طبق قضیه (۱) می‌نویسیم:

$$P(\emptyset) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

(6)



③ اگر A, B, C پیاپی دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

* این قانون قابل تعمیم برای هر تعداد پیاپی است *

اثبات: A, B, C دو به دو ناسازگارند پس بدیهی است $A, B \cup C$ نیز دو پیاپی ناسازگارند و لذا طبق اصل ② می‌توان نوشت:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) \stackrel{\text{اصل ②}}{=} P(A) + P(B \cup C) \stackrel{\text{اصل ②}}{=} P(A) + P(B) + P(C)$$

مسئله: در پرتاب دو تاس متمایز، سه پیاپی شرح زیر تعریف می‌کنیم:

A : مجموع اعداد رو شده برابر ۴ باشد

B : یکی از اعداد رو شده ۵ باشد

C : یکی از اعداد رو شده دو برابر دیگری باشد

احتمال اینکه حداقل یکی از سه پیاپی فوق‌رُخ دهد چقدر است؟

(ابتدا پیاپی‌ها را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم):

$$A = \{(1, 4), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\} \rightarrow n(A) = 4 \quad n(S) = 36 \rightarrow P(A) = \frac{4}{36}$$

$$B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$\rightarrow n(B) = 10 \Rightarrow P(B) = \frac{10}{36}$$

$$C = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3)\} \rightarrow n(C) = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{6}{36}$$

واضح است که پیاپی‌های A, B, C دو به دو ناسازگارند پس:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{6}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$



④ برای هر دو پیغام دگواه A و B داریم $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

اثبات: واضح است که پیغامها $A-B$ و $A \cap B$ ناسازگارند و $(A-B) \cup (A \cap B) = A$ لذا بنا به اصل ② داریم:

$$P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$



مثال: احتمال اینکه زهره در آزمون رانندگی قبول شود ۸۰٪ و احتمال اینکه او به همراه خواهرش در این آزمون قبول شود ۴۵٪ است. احتمال این که فقط زهره قبول شود، خواهرش قبول نشود چقدر است؟

پیغام قبولی زهره را A و خواهرش را B می نامیم. بنابراین:

$$P(A \text{ فقط}) = P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.80 - 0.45 = 0.35$$

مثال: اگر $P(A \cap B') = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{1}{3}$ ، مقدار $P(B-A')$ را بیابید.

$$P(A \cap B') = P(A-B) \rightarrow P(A-B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A') = \frac{1}{3} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - P(B-A') \Rightarrow P(B-A') = \frac{1}{6}$$

⑤ برای هر دو پیغام دگواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اثبات: می دانیم $A \cup B = B \cup (A-B)$ ، همچنین دو پیغام B و $A-B$ ناسازگارند. در نتیجه بنا به اصل ② احتمال داریم:

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$$

از طرفی طبق قضیه ④، $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ بوده و در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



سؤال: با فرض $P(A) = 0.4$ و $P(A' \cup B') = 0.7$ مقدار $P(A' \cup B)$ را بدست آورید.
طبق قانون قضیه متمم و قانون دمورگان داریم:

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0.7 = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

$$= (1 - 0.4) + P(B) - P(B - A)$$

$$= 0.6 + P(B) - (P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0.3}) = 0.9$$

سؤال: ثابت کنید:

الف) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$$

ب) $P(A' \cup B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

$$= 1 - \cancel{P(A)} - \cancel{P(B)} + \cancel{P(A)} + \cancel{P(B)} - P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A \cap B) = P((A \cap B)') = P(A' \cup B')$$

پ) $P(A' \cup B) - P(A \cap B) = 1 - P(A)$

$$= P(A') + P(B) - \underbrace{P(B \cap A')}_{P(B-A)} - P(A \cap B)$$

$$P(B-A) = P(B) - P(B \cap A)$$

$$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A)$$



نکته: می خواهم از بین اعداد $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$ تعداد افرادی را تعیین کنیم که بر k بخش پذیرند، برای این منظور عدد n را بر k تقسیم می کنیم، خارج قسمت این تقسیم همان تعداد مضارب k است.

مثال: از بین اعداد $1, 2, 3, \dots, 70$ چه تعداد از آنها بر 3 بخش پذیرند؟
(یعنی مضرب 3 هستند؟)

$$70 \div 3 = 23 \text{ با } 1 \text{ باقی ماند} \rightarrow 23 \text{ تا از آنها بر } 3 \text{ بخش پذیرند}$$

مثال: عددی به تصادف از بین اعداد 1 تا 100 انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:
الف) عدد انتخابی بر 2 یا 3 بخش پذیر باشد.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = 100$$

$$A = \text{پسبامد اینده عدد بر } 2 \text{ بخش پذیر باشد} \Rightarrow n(A) = 50 \Rightarrow P(A) = \frac{50}{100}$$

$$B = \text{پسبامد اینده عدد بر } 3 \text{ بخش پذیر باشد} \Rightarrow n(B) = 33 \Rightarrow P(B) = \frac{33}{100}$$

$$A \cap B = \text{پسبامد اینده عدد بر } 2 \text{ و } 3 \text{ یعنی } 6 \text{ بخش پذیر باشد} \Rightarrow n(A \cap B) = 16 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{16}{100}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$$

ب) عدد انتخابی بر 2 بخش پذیر باشد، ولی بر 3 بخش پذیر نباشد

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{34}{100}$$

پ) عدد انتخابی نه بر 2 بخش پذیر باشد و نه بر 3

$$P(A' \cap B') = 1 - P((A' \cap B')') = 1 - P(A \cup B) \stackrel{\text{طبق الف}}{=} 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$$



تمرین (۱) اگر A و B دو پدیده از فضای نمونه‌ای S باشند بطوری که $B \subseteq A$ ثابت کنید:

$$P(A-B) = P(A) - P(B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{طبق قضیه (۴) داریم:}$$

$$A \cap B = B \quad \text{از طرفی بنا به } B \subseteq A \text{، داریم:}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(B) \quad \text{بنابراین:}$$

$$\text{ب) } P(B) \leq P(A)$$

$$P(A) \geq P(B) \rightarrow P(A) - P(B) \geq 0 \xrightarrow{\text{الف}} P(A-B) \geq 0 \quad \text{میرانیم}$$

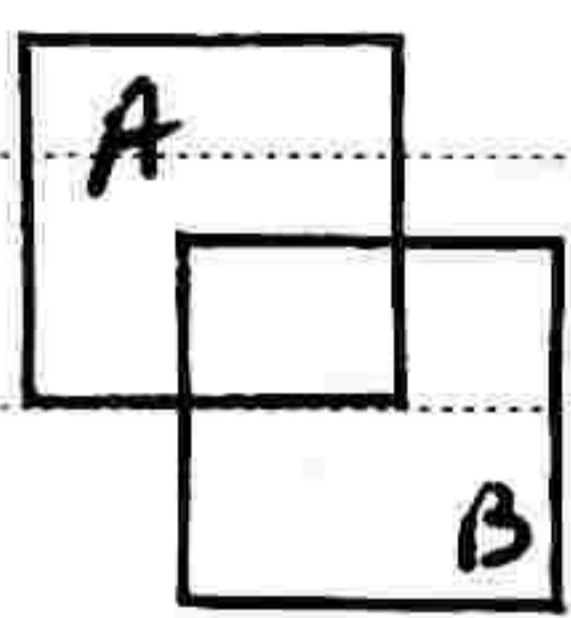
تمرین (۲) برای دو پدیده A و B از فضای نمونه‌ای S سوال دهید

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$P(A \Delta B) = P((A-B) \cup (B-A)) \quad \text{از آنجا که } A-B \text{ و } B-A \text{ ناسازگارند}$$

$$= P(A-B) + P(B-A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$



تمرین (۳) شخص به سمت یک تخته هدف مطابق شکل روبرو شلیک می‌کند.

احتمال زدن ناحیه A ، $\frac{6}{7}$ و زدن ناحیه B ، $\frac{7}{7}$ و زدن

ناحیه مشترک برابر $\frac{5}{7}$ است. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) حداقل یکی از دو ناحیه را بزند.

ب) نه A را بزند و نه B را بزند.

$$P(A) = \frac{6}{7} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{7}{7} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{7}$$

$$\text{الف) } P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{7} - \frac{5}{7} + \frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\text{ب) } P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{6}{7} - \frac{7}{7} + \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$



تمرین (۴) احتمال آن که شخصی ناراحتی قلبی داشته باشد ۰.۲۳، ناراحتی قلبی داشته باشد ۰.۲ و دست کم یکی از دو نوع بیماری را داشته باشد ۰.۳۸ است. مطلوب است احتمال آنکه:
الف) هر دو نوع بیماری را داشته باشد.
ب) برابری در معادله، پساً مرد ناراحتی قلبی را با k و ناراحتی قلبی را با g نمایش دهیم:

$$P(k) = 0.23, \quad P(g) = 0.2, \quad P(k \cup g) = 0.38$$

$$P(k \cup g) = P(k) + P(g) - P(k \cap g) \Rightarrow 0.38 = 0.23 + 0.2 - P(k \cap g) \Rightarrow P(k \cap g) = 0.05$$

ب) فقط ناراحتی قلبی داشته باشد.

$$P(g - k) = P(g) - P(g \cap k) = 0.2 - 0.05 = 0.15$$

پ) هیچ کدام از بیماری ها را نداشته باشد.

$$P(g' \cap k') = 1 - P(g \cup k) = 1 - 0.38 = 0.62$$

تمرین (۵) اگر A و B دو پدیده از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A) = 0.6$ ، $P(B) = 0.7$ و $P(A \cap B) = 0.2$ باشد، مطلوب است $P(A' \cap B)$.

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0.2 = 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

تمرین (۶) در صورتی $P(A \cup B) = 2P(A \cap B)$ ، حاصل $\frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{P(A) - P(A \cap B)}$ را بیابید.

$$\frac{2P(A \cap B) + P(A \cap B)}{P(A) - \underbrace{P(A - B)}_{P(A) - P(A \cap B)}} = \frac{3P(A \cap B)}{P(A) - P(A) + P(A \cap B)} = 3$$



تمرین (۷) اگر A ، B و C سه پدیده از فضای نمونه ای S باشند، ثابت کنید:

$$\text{الف) } P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

$$\text{می دانیم: } A \cap B \cap C \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B \cap C) \leq P(A)$$

$$P(A) \leq P(A) + P(B) + P(C) \quad \text{از طرفی برعکس است}$$

$$P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C) \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

$$\text{می دانیم: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\frac{P(A \cap B) \geq 0}{\Rightarrow} P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) \geq P(A \cup B)$$

بنابراین:

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \leq P(A \cup B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

تمرین (۸) اگر A و B دو پدیده A و B از فضای نمونه ای S داشته باشیم

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ثابت کنید $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A) \times P(B)$$

$$= P(A) (1 - P(B))$$

$$= P(A) \times P(B')$$



تمرین (۹) با فرض $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{9}{4}$ نشان دهید:

$$P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) \geq \frac{3}{2}$$

صی دانیس: $P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(B \cap C) \geq P(B) + P(C) - 1$$

$$P(C \cap A) \geq P(C) + P(A) - 1$$

+

$$P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) \geq 2(P(A) + P(B) + P(C)) - 3$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A) \geq \frac{3}{2}$$

تمرین (۱۰) اگر $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.6$ ، $P(A \cup B) = 0.7$ مطلوب است $P(A \Delta B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.7 = 0.3 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(A \Delta B) = P(A - B) + P(B - A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.3 - 0.2 + 0.6 - 0.2 = 0.5$$

