فصل

۵ کاربرد مشتق

مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنهٔ این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیمم نمودن فاصله زمان و هزینه و همچنین ماکزیمم کردن حجم، مساحت و سود گسترده است.

درس اول

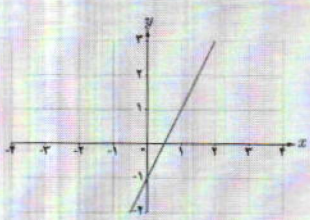
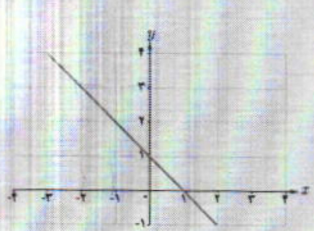
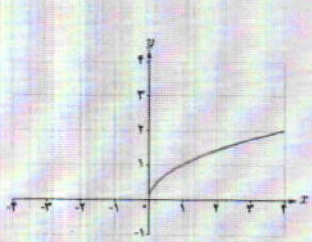
اکسترمم‌های تابع

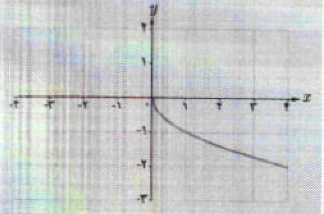
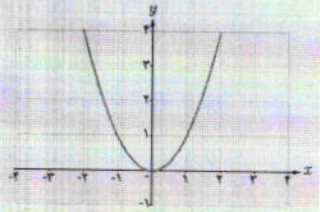
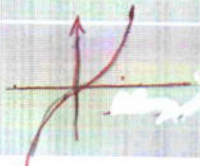
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

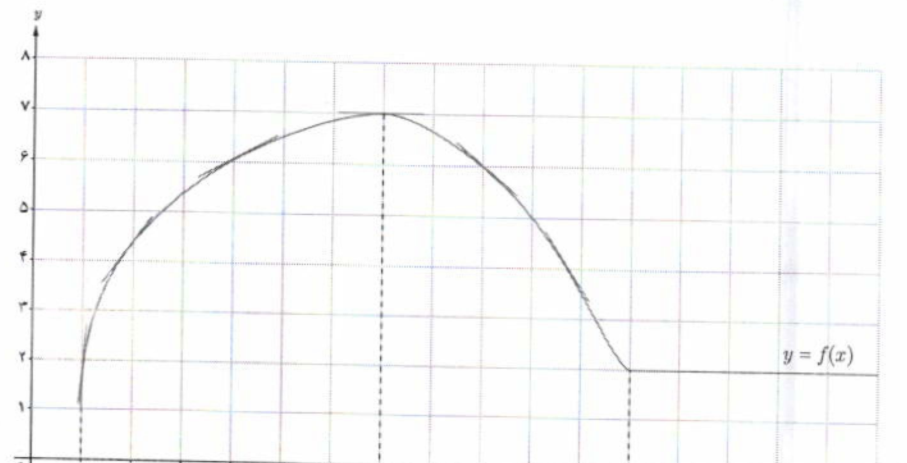
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطهٔ تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x)=2$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x)=2x-1$
g' همواره منفی... است	$g'(x)=-1$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی... است		$g(x)=-x+1$
h' در $(0, +\infty)$ مثبت... است	$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	تابع h در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x)=\sqrt{x}$

$u(x) = -\sqrt{x}$		تابع u در $[\,۰\,,+\infty)$ اکیداً نزولی است	$u'(x) = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	u' در $(۰\,,+\infty)$، همواره منفی
$k(x) = x^۲$		تابع k در $(-\infty\,,۰)$ اکیداً نزولی و در $(۰\,,+\infty)$ اکیداً صعودی است.	$k'(x) = ۲x$	k' در $(-\infty,۰)$ منفی و در $(۰,+\infty)$ مثبت است. +
$l(x) = x^۳$		تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی	$l'(x) = ۳x^۲$	l' در $(-\infty,۰)$ مثبت و در $(۰,+\infty)$ نیز مثبت است.

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را درنظر بگیرید :



ملاحظه می‌شود که :

الف) در بازهٔ $(۱, ۷)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' مثبت است.

ب) در بازهٔ $(۷, ۱۲)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، منفی است؛ بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

پ) در بازه $(۱۲, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر صفر است.

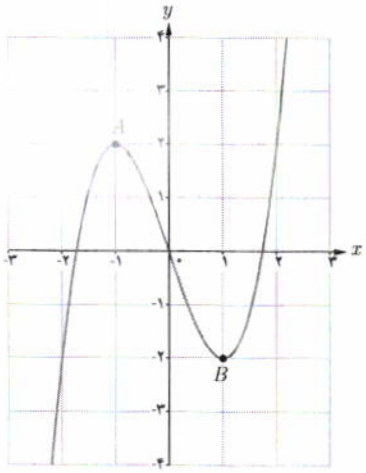
مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن‌را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال[1] : تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل : f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
بازه		$(-\infty, -۱)$		$(-۱, ۱)$		$(۱, +\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	۰	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی ↗	۲	اکیداً نزولی ↘	-۲	اکیداً صعودی ↗	$+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید. در نقطه $A\big|^{-۱}_{۲}$ ماکزیمم و در نقطه $B\big|^{۱}_{-۲}$ مینیمم وجود دارد

اکسترمم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱− و ۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

همچنان‌که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطهٔ A $(-۱,۲)$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

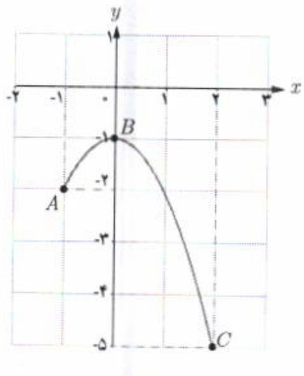
در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟ در نقطه ی (۱۳-و۳) مینیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱۳- می باشد

تذکر : نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع هم می‌گوییم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

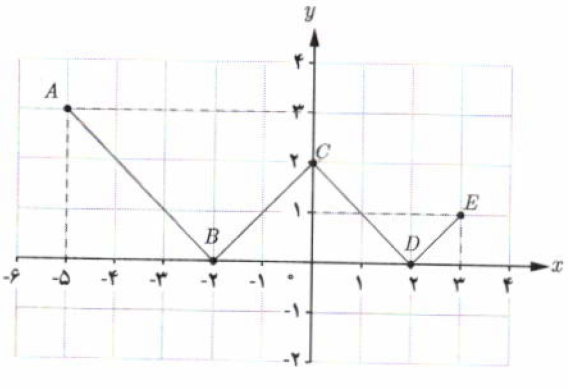
کار در کلاس

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



ب) $g(x) = -x^2 - ۱ \quad x \in [-۱, ۲]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست	–	–
B	max نسبی	۱-	$f'(۰)$ برابر صفر است
C	نقطه اکسترمم نسبی ندارد	–	–



الف) $f(x) = \left|\,|x| - ۲\right|, x \in [-۵, ۳]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست
C	max نسبی	۲	مشتق ناپذیر در $f'(0)$
D	min نسبی	۰	مشتق ناپذیر در $f'(2)$
E	نه Min نه Max	–	–

نقاط بحرانی تابع

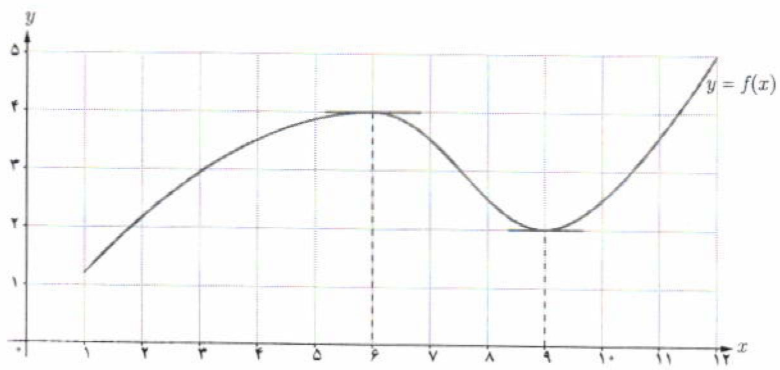
حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنهٔ تابع f باید به دنبال اکسترمم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از **نقاطی از دامنهٔ f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است**. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم :

تعریف : فرض کنیم $c \in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطهٔ به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال : در کار در کلاس قبل دیدیم که تابع $f(x)=||x|-2|$ در نقاط B، C و D مشتق‌ناپذیر است. به عبارت دیگر، نقاط به طول ۲−، صفر و ۲ که جزو نقاط دامنهٔ f هستند، در دامنهٔ f' نیستند. پس، این سه نقطه، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. همچنین در همین کار در کلاس، مشتق تابع $g(x)=-x^2-1$ به ازای صفر برابر صفر است؛ یعنی $g'(0)=0$. بنابراین نقطهٔ $B(0,-1)$، نقطهٔ بحرانی تابع g است.

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را درنظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم :

$$f'(6)=0 \quad , \quad f'(9)=0$$

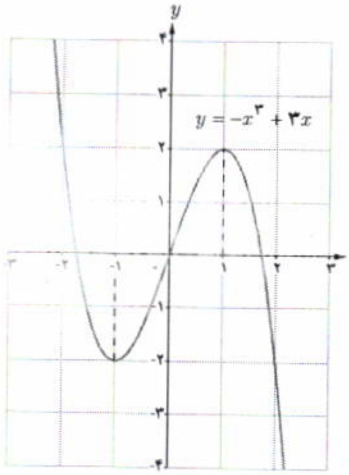


این مطلب در مورد نقاط اکسترمم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

قضیه فرما[1] : اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

1_ Pierre de Fermat (1601_1665)

کار در کلاس



۱ الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$، نشان دهید که f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد.

$f'_-(2)=-1$

$f'_+(2)=1$

ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟ خیر مشتق‌های چپ و راست برابر نیستند

پ) آیا $x=2$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟ بله تابع f در ۲ مشتق‌پذیر نیست.

۲ نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x$ را رسم کرده‌ایم. $x=\pm 1$

$f'(x)=-3x^2+3$

$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+3=0 \Rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

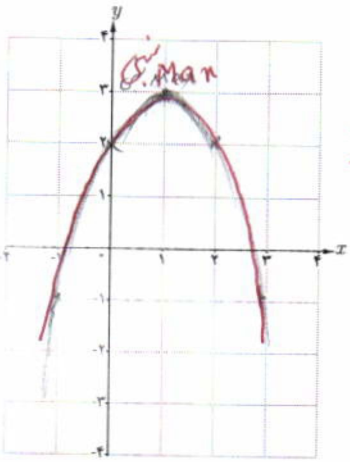
$f(1)=2$

$f(-1)=-2$

الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه فرما را در مورد این تابع بررسی کنید. قضیه فرما برقرار است.



۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

$f'(x)=-2x+2$

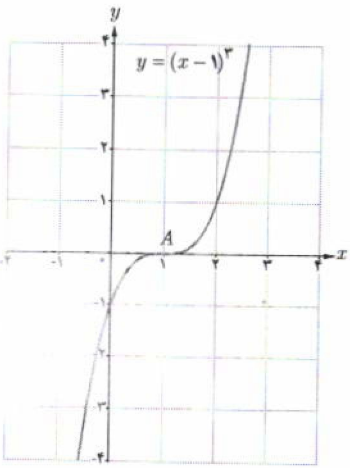
الف) $f'(x)$ را به‌دست آورید.

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

$-2x+2=0 \Rightarrow -2x=-2 \rightarrow x=1$

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟ بله

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابعِ مشتق، همواره طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را به‌دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست.



مثال : به نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3$ دقت کنید. تابعِ مشتقِ این تابع به‌صورت $f'(x)=3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x=1$ برابر صفر است، امّا با توجه به نمودار f، دیده می‌شود که نقطهٔ به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f'، قبل و بعد از $x=1$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

تذکر : مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ فرما در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطهٔ A به طول $x=1$ برای تابع $f(x)=(x-1)^3$ یک نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

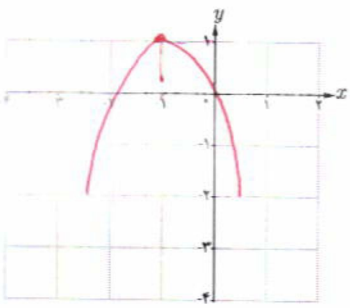
کار در کلاس

۱ جدول تغییرات تابع $f(x)=-x^2-2x$ در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت f'، بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است :

$f'(x)=-2x-2$

$f'(x)=0 \rightarrow x=-1$ طول نقطهٔ بحرانی

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
بازه	$(-\infty,-1)$		$(-1,+\infty)$
علامت f'	+	۰	−
یکنوایی f	صعودی اکید	۱	نزولی اکید
	$-\infty$ ↗	max نسبی	↘ $-\infty$



با توجه به جدول، مشخص است که نقطهٔ به طول (-1)، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x)=x^3-3x^2$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

$g'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$

طول ن بحرانی $x=0 \quad x=2$

x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
بازه	$(-\infty,0)$	$(0,2)$		$(2,+\infty)$
علامت f'	+	۰ − ۰		+
یکنوایی f	$-\infty$ صعودی	نزولی		صعودی

مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می‌کنند که تغییر رفتار این‌گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهندهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

آزمون مشتق اول

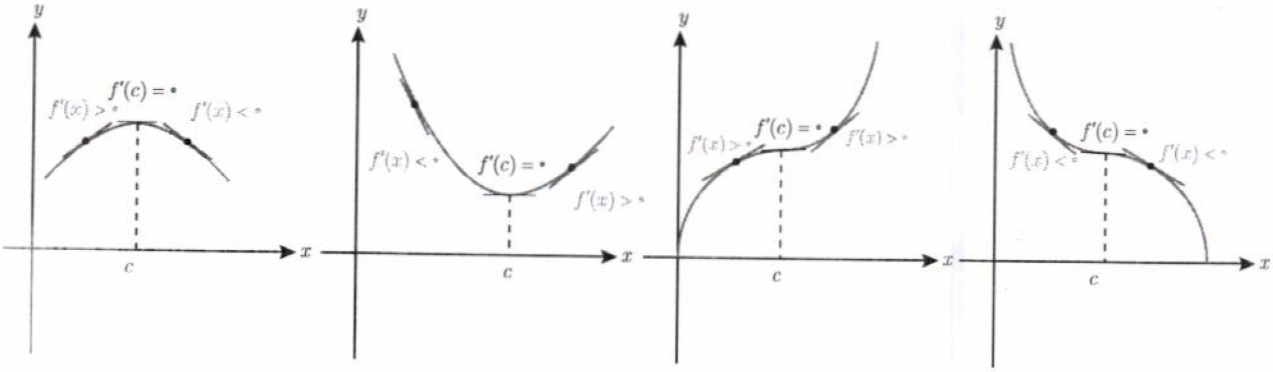
فرض کنیم c طولِ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطهٔ c در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



$x=c$: طول ماکزیمم نسبی

$x=c$: طول مینیمم نسبی

$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

اکسترمم‌های مطلق تابع

فعالیت

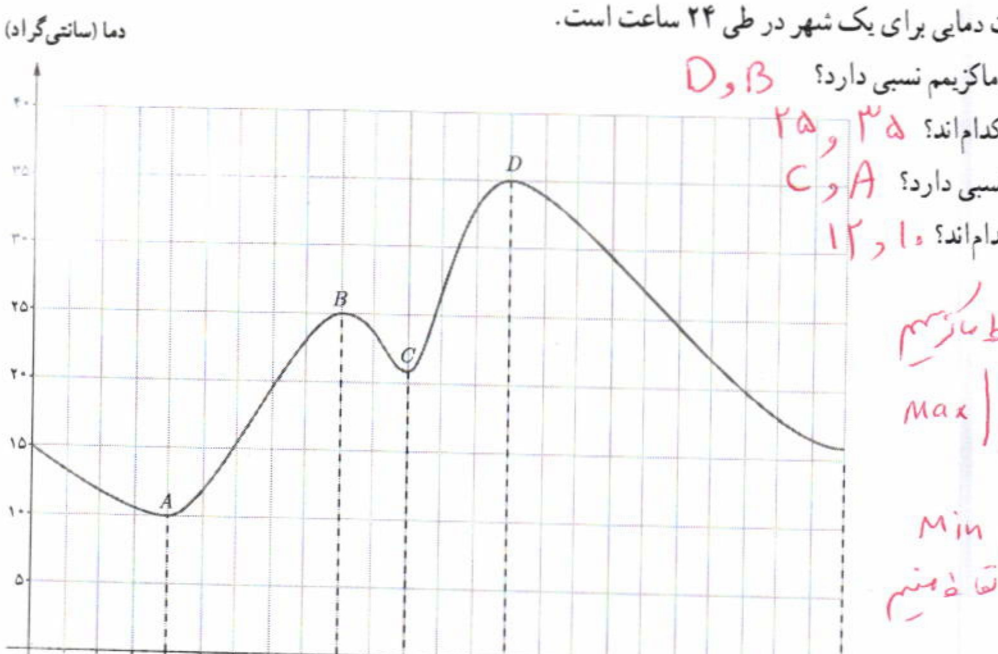
نمودار زیر نشان‌دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟ B , D

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام‌اند؟ ۳۵ و ۲۵

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟ A و C

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام‌اند؟ ۱۰ و ۱۲



نقاط ماکزیمم

Max | B D

نقاط

Min | A C

نقاط مینیمم

با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطهٔ $D(۱۴,۳۵)$ ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطهٔ مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید. تابع در نقطه‌ی (۴،۱۰) مینیمم مطلق دارد و مقدار مینیمم مطلق آن ۱۰ می‌باشد

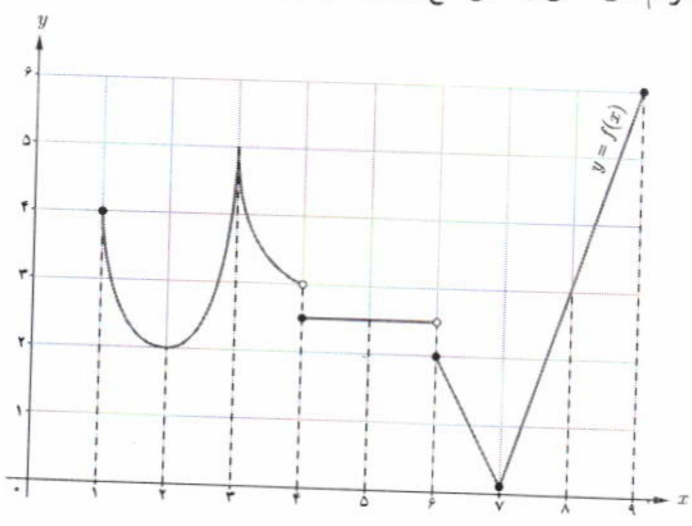
تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c, f(c))$، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c, f(c))$، یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترمم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

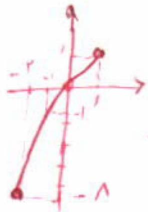
۱ با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×	✗	✗	×	×	✗	✗	✓
min مطلق	×	×	✗	✗	×	×	✓	✗	×
max نسبی	×	×	✓	✗	✓	×	✗	✗	×
min نسبی	×	✓	✗	✓	✓	×	✓	✗	×
نقطهٔ بحرانی	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	×

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $t(x) = x^3 \; ; \; x \in [-2, 1]$



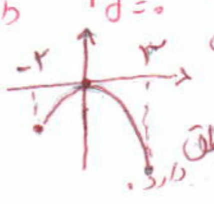
نه ماکزیمم و نه مینیمم دارند
در ۲- مطلق Min دارد،
در ۱ مطلق Max دارد.

ب) $g(x) = -x^2 \; ; \; x \in [-2, 3]$

$x = 0$
$y = 0$

Max مطلق و نسبی دارد

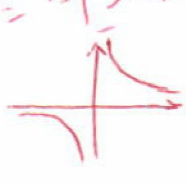
در صفر Max مطلق و نسبی دارد.



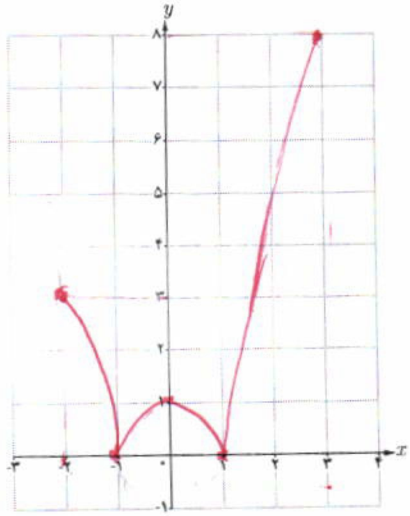
در ۳ مطلق Min دارد.

پ) $u(x) = \frac{1}{x}$

نه ماکزیمم و نه مینیمم دارد



فعالیت



تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازهٔ $[-2, 3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید. در ۱و-۱، min نسبی و مطلق دارد.
در ۰ max نسبی دارد. در ۳، max مطلق دارد.

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوستهٔ $f(x) = |x^2 - 1|$ در بازهٔ بستهٔ $[-2, 3]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیهٔ فوق، تنها وجود اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ به شرح زیر است :

۱ــ مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.
۲ــ مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
۳ــ در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a, b]$ است.

مثال : نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازهٔ $[-1, 3]$ تعیین کنید.
حل : ابتدا به کمک f'، نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \ \text{نقطهٔ بحرانی} \end{cases}$$

علاوه بر نقطهٔ بحرانی، مقدار تابع را در نقاط انتهایی بازه هم به‌دست می‌آوریم که در جدول مقابل آمده است.

x	-1	1	3
$f(x)$	۱۳	-7	۴۵

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازهٔ $[-1, 3]$ برابر ۴۵ و کوچک‌ترین مقدار، مساوی -7 است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

سوال ۱ $f'(x)=3x^2-12 \Rightarrow f'(x)=0 \quad 3x^2=12 \to x=\pm 2$

$x=2 \to y=-12$

$x=-2 \to y=20$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

نزولی‌ترین بازه در $(-2,2)$ می‌باشد تابع در آن نزولی اکید است

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

تمرین

سوال ۲ $g'(x)=\frac{0(x^2+1)-2x(1)}{(x^2+1)^2}$

$g'(x)=0 \longrightarrow -2x=0 \quad x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
		صعودی		نزولی	

۱) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

۲) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۳) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ب) $g(x)=x^3+3x^2-4$ پ) $h(x)=\sqrt[3]{x}$

الف) $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$ $x=0$ نقطه بحرانی $(0,2)$

$g'(x)=3x^2+6x$ $g'(x)=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0$ نقاط بحرانی $x=0$ $(0,-4)$، $x=-2$ $(-2,0)$

$h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست؛ $x=0$ نقطه بحرانی $(0,0)$

۴) در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$h'(x)\neq 0$ نقطه بحرانی ندارد زیرا

الف) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ ب) $g(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ پ) $h(x)=-x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$f'(x)=0 \quad 3(x^2+2x-3)=0$ نقاط بحرانی

$(x-1)(x+3)=0 \quad x=1,\ x=-3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
			$+17$		-15		

ماکزیمم نسبی $B(-3,17)$ مینیمم نسبی $A(1,-15)$

ب) $g'(x)=-6x^2+6x+12$

$g'(x)=0 \quad -6(x^2-x-2)=0$

$(x-2)(x+1)=0$ بحرانی $x=2,\ x=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
			-16		11		

مینیمم $A(-1,-16)$ Max $(2,11)$

۵) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=-2x^3+9x^2-13 \quad ; \quad x\in[-1,2]$

$y'=0 \to -6x^2+18x=0 \to -6x(x-3)=0$ $x=0$، $x=3$ غ ق ق

$x=0 \to y=-13$

$x=-1 \to y=-2$

$x=2 \to y=7$

ماکزیمم مطلق $A(2,7)$ مینیمم مطلق $B(0,-13)$

ب) $g(x)=x^3+2x-5 \quad ; \quad x\in[-2,1]$

$g'(x)=3x^2+2$ $x^2=-\frac{2}{3}$ غ ق ق

$x=-2 \quad y=-17$ مینیمم

$x=1 \quad y=-2$ ماکزیمم

۶) اگر نقطهٔ $(1,2)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

$A(2,1) \longrightarrow 1=8+4b+d$ ①

$f'(x)=0 \Rightarrow 0=3(4)+2(2)b+0 \Rightarrow b=-3 \xrightarrow{①} 1=8+4(-3)+d \Rightarrow d=5$

۷) نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

بی‌شمار

$f(x)=k$ $k\in\mathbb{R}$,   جزء صحیح $f(x)=[x]$ $x\in\mathbb{R}$

درس دوم

بهینه‌سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و ... . در تمام این **فعالیت‌ها**، هدف آن است که **بهترین تصمیم‌ها** اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را درنظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی در زمرهٔ مسائل بهینه‌سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل‌اند. در اینجا مسائلی را با **هدف** ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد درنظر بگیریم. با استفاده از همهٔ این چوب‌کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجهٔ کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:

الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر ۱۴....... واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم‌محیط، دیده می شود که مساحت‌ها برابر **نیستند** و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و ۱۲... واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می‌شود که هرچقدر اندازهٔ طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، مساحت آن افزایش می‌یابد.

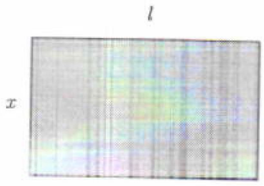
۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	۰/۵×۶/۵	۱×۶	۲×۵	۲/۵×۴/۵	۳×۴	۳/۲×۳/۸	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	۳/۲۵	۶	۱۰	۱۱/۲۵	۱۲	۱۲/۱۶	...

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، ۱۲/۱۶ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد ۱۲/۱۶ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟ بله

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟ ۱۲٫۲۵

درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.



مثال ۱ : نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

حل : فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است :

$$S = x.l \qquad (۱)$$

برای آنکه S به‌صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به‌دست آوریم :

$P = ۱۴$: محیط مستطیل

$$۲(x+l) = ۱۴ \Rightarrow x+l = ۷ \Rightarrow l = ۷ - x \quad (۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$S(x) = x(۷ - x)$$

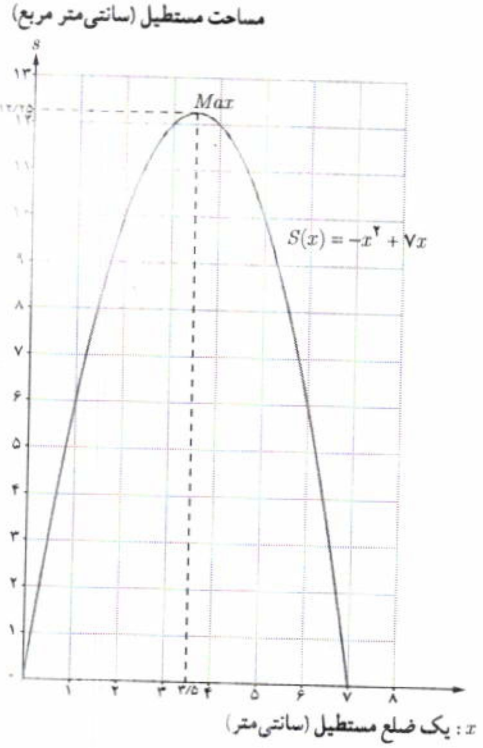
$$S(x) = -x^۲ + ۷x \quad , \quad x \in [\,۰, ۷\,]$$

از آنجا که S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشهٔ معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را بیابیم.

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow -۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۳/۵ \quad \text{(طول نقطهٔ بحرانی تابع)}$$

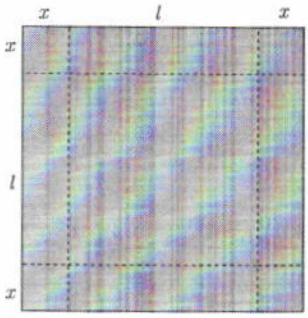
جدول تغییرات تابع S در بازهٔ موردنظر به شکل زیر است :

x	۰		۳/۵		۷
$S'(x) = -۲x + ۷$		+	۰	−	
$S(x) = -x^۲ + ۷x$	۰	↗	۱۲/۲۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰



از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی‌متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطهٔ ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

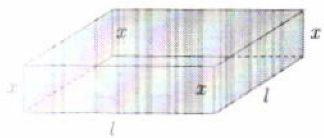
تذکر : در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطهٔ $\left(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a}\right)$، نقطهٔ اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را به‌دست می‌دهد. امّا همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲ : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع cm ۳۰ را درنظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبهٔ درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل : ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعدهٔ آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است : $V = x.l^2$

باید l را برحسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.



$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x\,(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x\ ,\ x \in [0,15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

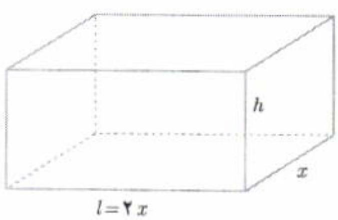
$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } V) \\ x = 15 \notin (0,15) \end{cases}$$

جدول تغییرات تابع V در بازهٔ موردنظر به‌صورت زیر است :

x	۰		۵		۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$		+	۰	−	۰
$V(x)$	۰	↗	۲۰۰۰ ماکزیمم مطلق	↘	۰

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل موردنظر، (cm^3) ۲۰۰۰ است که به ازای $x = 5$ (cm) حاصل می‌شود.

مثال ۳ : می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $10\ m^3$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟



حل : لازم است هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت :

$$C = 100(x.l) + 60[2xh + 2lh]$$
$$= 100xl + 120h(x + l)$$
$$= 100x(2x) + 120h(x + 2x)$$
$$C = 200x^2 + 360xh \qquad (1)$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

حجم مخزن : $V = 10(m^3) \Rightarrow x.l.h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \dfrac{5}{x^2} \quad (2)$

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$C(x) = ۲۰۰x^۲ + ۳۶۰x(\frac{۵}{x^۲}) \quad \Rightarrow \quad C(x) = ۲۰۰x^۲ + \frac{۱۸۰۰}{x} \quad x \in (۰, +\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع $C(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$C'(x) = ۰ \Rightarrow ۴۰۰x + \frac{-۱۸۰۰}{x^۲} = ۰ \Rightarrow \frac{۴۰۰x^۳ - ۱۸۰۰}{x^۲} = ۰ \Rightarrow ۴۰۰x^۳ - ۱۸۰۰ = ۰ \Rightarrow x^۳ = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{۴/۵} \simeq ۱/۶۵(m) \quad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x) = \frac{۴۰۰x^۳ - ۱۸۰۰}{x^۲}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(۴۰۰x^۳ - ۱۸۰۰)$ است. چرا؟

x	۰		$\sqrt[۳]{۴/۵}$		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	۰	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	↘	$\simeq ۱۶۳۵$ مینیمم مطلق C	↗	$+\infty$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعدهٔ مخزن برابر $\sqrt[۳]{۴/۵} \simeq ۱/۶۵(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱،۶۳۵،۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴ : غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t) = \frac{۳t}{t^۳ + ۲۷}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل : ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم.

$$C'(t) = \frac{۳(t^۳ + ۲۷) - ۳t^۲(۳t)}{(t^۳ + ۲۷)^۲}$$

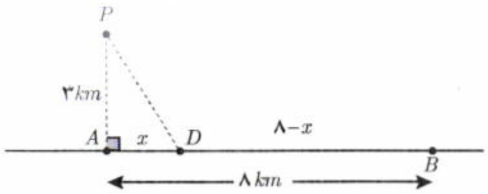
$$C'(t) = ۰ \Rightarrow ۳(t^۳ + ۲۷) - ۹t^۳ = ۰ \Rightarrow (t^۳ + ۲۷) - ۳t^۳ = ۰ \Rightarrow t^۳ = \frac{۲۷}{۲}$$

$$\Rightarrow t = \frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}} \simeq ۲/۳۸ \ (\text{ساعت}) \qquad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	۰		$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	۰	$-$	
$C(t)$	۰	↗	$\simeq ۰/۱۸$ ماکزیمم مطلق C	↘	۰

با توجه به جدول، دیده می‌شود که $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}} \simeq ۲/۳۸$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.



مثال ۵ : آرمان درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B درساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی آرمان در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟

حل : نقطه‌ای از ساحل را که آرمان پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطهٔ $x=vt$ یا معادل آن $t=\frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین :

زمان پارو زدن مسیر P تا D : $t_۱=\frac{PD}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}$

زمان پیاده‌روی مسیر D تا B : $t_۲=\frac{DB}{۴}=\frac{۸-x}{۴}=۲-\frac{۱}{۴}x$

زمان کل رسیدن از P به B : $t=t_۱+t_۲$

$$t(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}+(۲-\frac{۱}{۴}x)\qquad x\in[۰,۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به‌دست می‌آوریم.

$$t'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$t'(x)=۰\Rightarrow ۲x-\sqrt{x^۲+۹}=۰\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+۹\Rightarrow x=\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳(\text{km})$$

جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است :

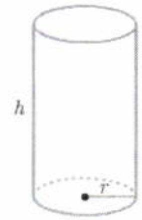
x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
$t'(x)$		−	۰	+	
$t(x)$ برحسب ساعت	۳/۵	↘	$\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۴}\simeq ۳/۳$ مینیمم مطلق t	↗	$\frac{\sqrt{۷۳}}{۲}\simeq ۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A، برابر $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

کار در کلاس

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل: باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.



حجم استوانه $1(\text{lit}) = 1000\,\text{cm}^3$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000(\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

مساحت کل استوانه : $S=$ مساحت قاعده + سطح جانبی

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

$S'(r) = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{2\pi} \to r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$

$S(r) = \frac{2000}{\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}}\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2} + 2\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2} = 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$

r	0		$\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	$6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

حجم درباز $S(r) = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$

$S'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 2000 \to r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

$S\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

هزینه t ساعت حرکت: $C = 800000t + (320v^2)t$

هزینه x کیلومتر حرکت: $C = 800000\left(\frac{x}{v}\right) + (320v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$

نقطهٔ بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

$C'(v) = 0 \Rightarrow -\frac{800000}{v^2} + 320 = 0 \Rightarrow +800000 = 320v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{800000}{32} = 25000$

$v = \pm\sqrt{25000}$ $\quad C'(v) = \frac{320v^2 - 800000}{v^2} = 0$

v	$-\infty$		$-\sqrt{25000}$		0		$\sqrt{25000}$	
$C'(v)$		$+$		$-$		$-$		$+$
$C(v)$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان

y		-5	
$P'(y)$	$-$	0	$+$
		min	

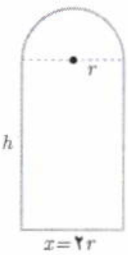
۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$x-y=10 \rightarrow x=10+y$

$P=xy=y(10+y)=y^2+10y \quad P'=2y+10 \quad P'=0 \rightarrow y=-5 \quad x=10+(-5)=5$

۴ دربرخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای برروی آن می‌باشد به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل : باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$\text{محیط} = ۴/۵ \Rightarrow ۲h + x + \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲} \rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}$$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = S : مساحت پنجره

$$S = xh + \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) \Rightarrow S(r) = ۲r(\frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \Rightarrow S(r) = -(\frac{\pi + ۴}{۲})r^۲ + \frac{۹}{۲}r$$

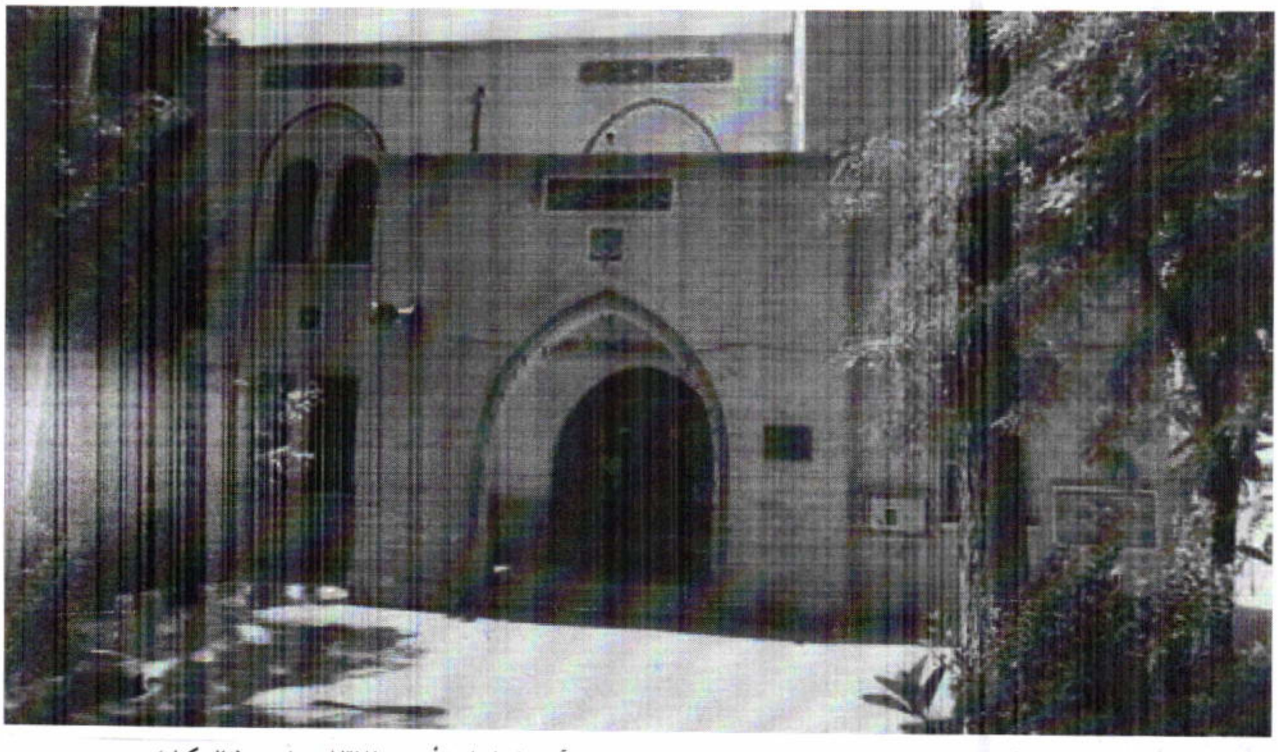
با پیدا کردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

$S'(r) = -2r\left(\frac{\pi+4}{2}\right) + \frac{9}{2} \qquad S'(r)=0 \Rightarrow$

$-r(\pi+4) = -4.5 \rightarrow r = \frac{4.5}{\pi+4}$

نسبت به r درجه دوم است.

r		$\frac{4.5}{\pi+4}$	
$S'(r)$	$+$	0	$-$
		max	



دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس : ۱۳۱۷، مساحت : ۲/۵ هکتار)

تمرین

۱ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

$C(x)=2x\times 2000000+2y\times 8000000$

$C(x)=4000000x+16000000\left(\frac{10000}{x}\right)$

$C'(x)=4\times10^6-\frac{16\times10^{10}}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=\frac{16\times10^{10}}{4\times10^6} \rightarrow x=2\times10^2=200 \quad y=\frac{10000}{200}=50$

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

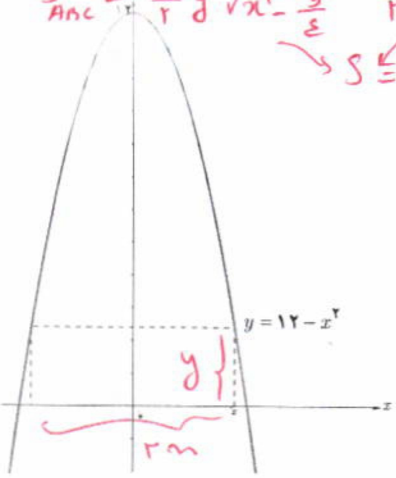
$AH=\sqrt{x^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}y\sqrt{x^2-\frac{y^2}{4}}$

$2x+y=100 \rightarrow y=100-2x$

$S=\frac{1}{2}(100-2x)\sqrt{x^2-\frac{(100-2x)^2}{4}} \rightarrow S'(x)=0$

۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.



$S=(2x)y=2x(12-x^2)$

$S(x)=24x-2x^3$

$S'(x)=24-6x^2=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

ماکزیمم ۳۲

۴ هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32cm^2 خواهد بود. هنگام طرّاحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه ۲cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

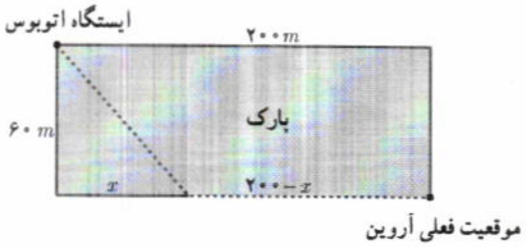
$xy=32 \quad y=\frac{32}{x}$

$S=(x+2)(y+4)=\left(\frac{32}{x}+4\right)(x+2)$

$S(x)=4x+\frac{64}{x}+40 \rightarrow S'(x)=4x^2-64=0 \rightarrow x=\pm4 \quad x=4 \rightarrow y=8$

$S=6\times12=72$ حداقل

۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان