



مجموعه ها

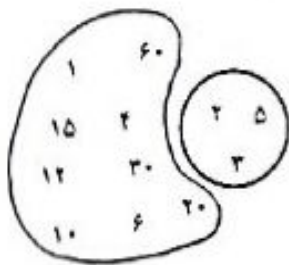
وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ
او کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های
خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...
(سوره انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که
روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستاره خورشید. ستاره هایی
با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازه
خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشانند.

درس اول: معرفی مجموعه

فعالیت



در شکل روبه‌رو شماره‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شماره‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شماره‌های ۶۰ را که اول نیست در یک مخرجی بسته قرار دهید.

اگر شماره‌های طبیعی و اول عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل

دو آکلاذ قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ در

این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم و به هر یک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک عضو مجموعه A

می‌گوییم: در این صورت مجموعه A دارای ۳ عضو است.

* شما شماره‌های مرکب عدد ۶۰ را به صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

$$B = \{4, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 40\}$$

* مجموعه شامل شماره‌های عدد ۶۰ که نه اول باشد و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این

$$C = \{1\}$$

مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

* مجموعه D شامل همه شماره‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید: این مجموعه چند عضو

$$D = \{10, 12, 15, 20, 30, 40\}$$

دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل ۳ شماره‌ی زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد

نوشت: $\{4, 6, 10\}$ و رضا نوشت: $\{6, 10, 12\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ چون ۸ شماره‌ی زوج وجود دارد

نتیجه: عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کننده یک مجموعه معین و یکتا نباشد، احمد در رضا که کدام از این ۸

شماره‌ی ۵ شماره‌ی انتخاب کرده‌اند

مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جای‌جایی

عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک

مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به جای $\{3, 2, 4\}$ می‌نویسیم $\{2, 4\}$.

معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه

استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران

را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای

مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری) استفاده می‌کنیم.

فعالیت

۱- کدام یک از عبارات‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.

الف) اعداد طبیعی و یک رقمی (ب) چهار شاعر ایرانی (ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲
 {۱، ۲، ۳، ... و ۹}

۲- با توجه به شرط متعین بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به جای $A = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$ باید بنویسیم $A = \{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$

ب) به دلیل تکراری بودن عدد ۵ در $B = \{۵، ۶، ۵، ۷\}$ آن را به صورت $\{۵، ۶، ۷\}$ می‌نویسیم.

اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, 5, 7\}$ در نظر بگیریم برای نشان دادن

اینکه a عضوی از مجموعه A است می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم « a عضو A است»

و چون عدد ۴ عضو A نیست، می‌نویسیم $4 \notin A$ و می‌خوانیم « 4 عضو A نیست».



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می‌توان با

استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$

را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم که نمایش با استفاده از نمودار ون است.

فعالیت

۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه A و B رسم

شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

$$A = \{a, b, c, d, s, k, f\} \quad B = \{m, n, s, f, k\}$$

۲- دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به A و

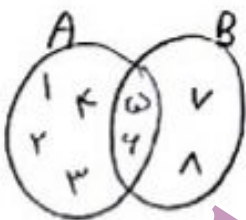
هم در منحنی بسته B وجود دارد؟ 5 و 6

۳- مجموعه عددهای دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند

عضو دارد؟ عضو ندارد.

$$E = \{ \}$$

۳



«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و

با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعه $\{0\}$ یا $\{0\}$

که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴- کدام یک از عبارات‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟

✓ الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ب) عددهای صحیح بین -۱ و ۱

ج) عددهای اول و زوج د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشند.

کار در کلاس

(سوال اول با زیربسته من باشد)

۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با

نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید. (اعداد طبیعی کوچکتر از ۱) د) (اعداد صحیح بین ۲- و ۷-) و (اعداد صحیح زوج بین ۲ و ۴)

۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (جنبین

مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک عضوی می‌نامند.) (اعداد صحیح کوچکتر از ۱) و (اعداد اول بین ۱۰ و ۹۰) د) (اعداد اول زوج)

۳- عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص

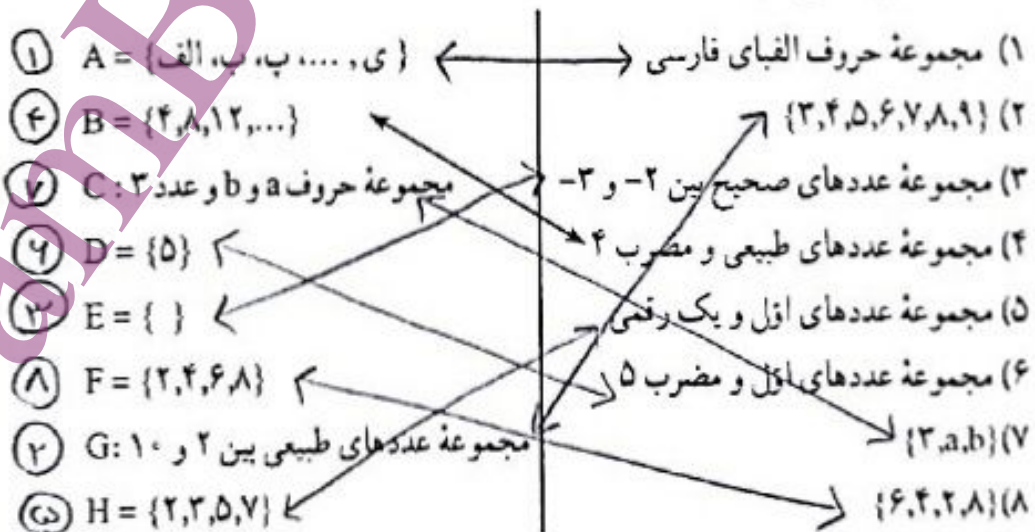
کنید (با ذکر دلیل).

✓ الف) چهار عدد فرد متوالی ✓ ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲

✓ ج) عددهای اول کوچکتر از ۲۰ ✓ د) سه شهر ایران ✓ ه) شمارنده‌های عدد ۲۴

× و) ۵ عدد بزرگ ✓ ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳

۴- مانند نمونه کامل کنید:





۵- کدام یک از عبارات های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید:

✓ الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰

✓ ب) شمارنده های اول عدد ۱۹

✓ ج) عددهایی که شش وجه یک ناس معمولی مشخص می کند.

✓ د) جواب های معادله $2x+8=1$

ه) چهار میوه خوشمزه

✓ و) عددهای منفی و بزرگتر از یک

تمرین

۱- متناظر یا هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد

عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید:

۵ عضو → الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ توان سوم اعداد طبیعی بین ۱ و ۱۰

۱ عضو → ب) $C = \{10\}$ اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱

۳۳۳ عضو → ج) عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچکتر از ۱۰۰۰

منفر عضو → د) عددهای طبیعی بزرگتر از ۴ و کوچکتر از ۵

صفر عضو → ه) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارند.

صفر عضو → و) عددهای اول دورقمی که مضرب ۷ باشند.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی کند.

ب) مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای ∞ عضو است.

ج) مجموعه $A = \{0, \emptyset\}$ دارای 2 عضو است.

د) با توجه به مجموعه $A = \{2, 5, 7, 9, 11\}$ داریم: $5 \in A$ است یا با نماد ریاضی $5 \in A$

و $12 \notin A$ نیست یا با نماد ریاضی $12 \notin A$.

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد. (باریاسخ)

$\{2\}$ و $\{2, 3, 5, \dots\}$ و $\{1, 2, 3\}$

دو مجموعه برابر

فعالیت

| | | |
|----|-----|----|
| ۱۰ | -۱۵ | ۱۲ |
| ۴ | ۴ | ۲ |
| -۲ | ۱۸ | -۲ |

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

$$A = \{2, 4, 4\}$$

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هر یک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ ۳ عضو دارد. $B = \{2, 4, 4\}$ آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟ بله

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان است و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه A و B برابر است و می‌نویسیم $A = B$.

$$A = \{8, 9, 10\}$$

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ $\{7, 8, 9\}$

ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ $\{8, 9, 10\}$

ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است. $\{8, 9, 10\}$ همان‌طور که دیدید مجموعه $\{8, 9, 10\}$ با مجموعه $\{7, 8, 9\}$ برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان

یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

می‌توان اعداد را به صورت‌های دیگر نیز نوشت

$$\left\{5, -3, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3}\right\} = \left\{\frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)}, \sqrt{12}, \sqrt{25}\right\}$$

$$\left\{ 7 \cdot \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{4}{9}}, 0.1625 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -0.15, \frac{5}{8}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -2 \right\} \text{ (ب)}$$

۲- دو مجموعه به نام های A و B مانند سوال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

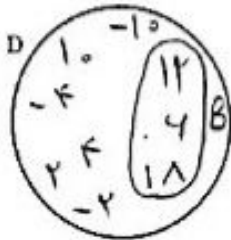
$$A = \{-\sqrt{4}, -\sqrt{9}, -\sqrt{25}\}$$

(باز پاسخ) هر چه در دست آورد قبول است

$$B = \{-2, -3, -5\}$$

زیر مجموعه

فعالیت



مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار بین رو به رو بنویسید:

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۲ بخش پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ $B = \{4, 12, 18\}$

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D = C$ ؟ $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

همان طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B زیر مجموعه D است و می نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعه C زیر مجموعه D است؟ بله

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

اکنون زیر مجموعه ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این

مجموعه چیست؟ $\{10, 4, -6, 2\} \subseteq D$

آیا عبارت $\{10, 4, -6, 2\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟ نظیر. چون ۴ عضو مجموعه D نمی باشد.

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می گوئیم B زیر مجموعه A نیست و می نویسیم $B \not\subseteq A$.

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟ نظیر

مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

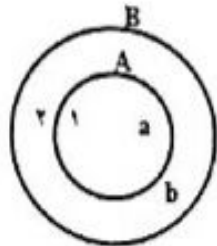
مثال: دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \subseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعه سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست

نیست.

ب) $\{-1,0,1,3\} \subseteq \{2,3,0,1,-1,2\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه

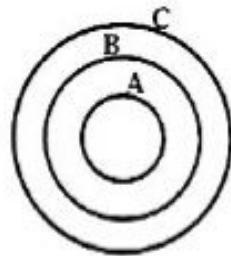
سمت راست است.



$$A \subseteq B, B \supseteq A$$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همه عضوهای A در B قرار دارد و $B \supseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند 2 می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر

را مشخص کنید:

$$C \subseteq A \checkmark, B \subseteq A \times, A \subseteq C \times$$

$$A \subseteq B \checkmark, B \subseteq C \checkmark, \emptyset \subseteq A \checkmark$$

۲- مجموعه‌های A, B, C را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را

مشخص کنید (با ذکر دلیل):

$$A = \{1, 2, 6, 4\}, B = \{5, 1, 2\}, C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$$

$$B \subseteq A \checkmark, 2 \in B \times, A \subseteq B \times, B \subseteq C \checkmark, A \subseteq C \checkmark, 2 \in A \times$$

$$\{1, 4\} \in A \times, 6 \in A \times, \{5, 6\} \subseteq C \checkmark, 5 \in C \checkmark, 6 \in A \times$$

مثال: همه زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ در زیر نوشته شده است:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲ = $\{10, 11\}$ (ب) $\{a, b, c, d\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

$\{a, b, c, d\}$
 $\{a, b, c, d\}$
 $\{a, b, c, d\}$

مجموعه عددهای طبیعی را با \mathbb{N} نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

ناکنون مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار ون مشخص کردیم. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است: برای مثال: مجموعه عددهای طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$ پس می‌نویسیم:

$$E = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعه عددهایی به شکل $2k$ به طوری که k متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه E علامت «|» خوانده می‌شود «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم:

الف) مجموعه عددهای طبیعی فرد: $O = \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{7, 8, 9, 10\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} | 7 \leq x \leq 10\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} | 6 < x < 11\}$

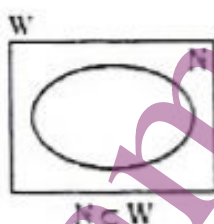
ج) زیرمجموعه‌ای از \mathbb{N} که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش پذیر است: $\{2k | k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه $A = \{5n+3 | n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید:

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای n یک عدد طبیعی در $5n+3$ قرار دهید.

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ... |
|--------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----|
| $5n+3$ | $\frac{5(1)+3}{8}$ | $\frac{5(2)+3}{13}$ | $\frac{5(3)+3}{18}$ | $\frac{5(4)+3}{23}$ | $\frac{5(5)+3}{28}$ | $\frac{5(6)+3}{33}$ | $\frac{5(7)+3}{38}$ | ... |

بنابراین داریم: $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$



مجموعه عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

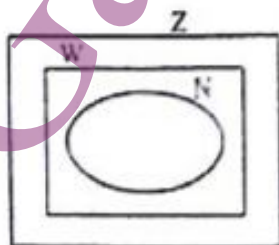
$$W = \{k-1 | k \in \mathbb{N}\}$$

نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq W$

مجموعه عددهای صحیح را با \mathbb{Z} نمایش می‌دهیم:

$$= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو \mathbb{Z} هم هستند؛ پس: $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید: $\{ \dots, 2, 4, \dots, -4, -5 \}$
 الف) مجموعه عددهای صحیح فرد $\{ \dots, 1, 3, 5, \dots \}$
 ب) $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$

ج) $B = \{2k+2 | k \in \mathbb{Z}\} = \{ \dots, -2, 0, 2, 4, \dots \}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

تمرین

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

(B و C مساویند)

برابر است؟ $\{ -1, 1 \}$ $\{ 0, 1, 2 \}$ $\{ -1, 0, 1 \}$
 $B = \{x | x \in A, x^2 \leq 2\}$, $C = \{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$, $D = \{x | x \in A, x^2 = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه

گرفت $A \subseteq C$ ؟ (بزرگ‌تر است)

$A = \{1, 2\}$

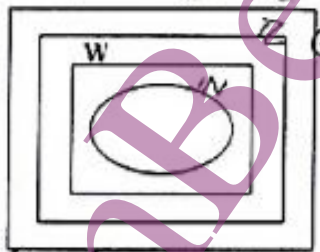
$B = \{2, 3\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2x+1=3\}$ ب) $B = \{2x | x = 0, 2, 3\}$

۴- نمودار رولک‌رو، وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Q}$ و \mathbb{Z}



را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام گذاری و با علامت \subseteq باهم

مقایسه کنید. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

کدام درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص

کنید: مثلاً \mathbb{Q} و \mathbb{W} هست ولی حساب نیست

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است.

ب) هر عدد صحیح عددی گویا است.

ج) هر عدد صحیح را می‌توان به صورت کسری

نوشت که شرح آن مخالف صواب است.

د) بین گویا است.

هر عدد حسابی را می‌توان به صورت یک عدد کسری نوشت که مخرج آن مخالف

صواب است. هر عدد حسابی عددی گویا است.

بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است.

آن دسته از اعداد گویا که بعد از ساده کردن به صورت عدد صحیح در می‌آیند را

می‌توانیم در نظر بگیریم

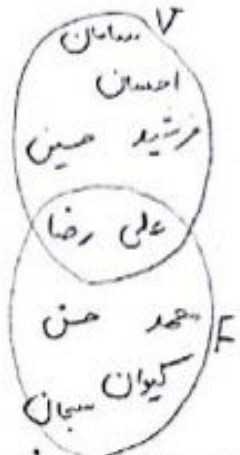
$\{ \dots, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, \dots \}$



درس سوم: اجتماع، اشتراك و تفاضل مجموعه‌ها

$F = \{ \text{علی، رضا، محمد و کیوان و سبحان و حسن} \}$
 $V = \{ \text{علی، رضا و حسین، فرشید و احسان و سامان} \}$

فعالیت



۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید.

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید: $\{ \text{علی و رضا} \}$

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید: $\{ \text{سامان و کیوان و محمد و حسن و علی و رضا و فرشید و حسین و احسان و سبحان} \}$

۲- دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x \leq 2\}$ را در نظر بگیرید و

مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ب) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

ج) $\{1, 2, 3\}$ = مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اشتراك A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم).

د) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم).

اشترك دو مجموعه: اشتراك دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای شامل

همه عضوهای است که هم عضو مجموعه A و هم عضو

مجموعه B است. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان

می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاتسور خورده اشتراك

دو مجموعه را نشان می‌دهند.

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B ،

مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که حداقل در یکی

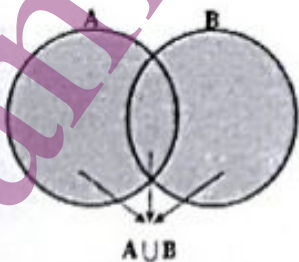
از دو مجموعه A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A \cup B$

نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاتسور خورده، اجتماع

دو مجموعه را نشان می‌دهد:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

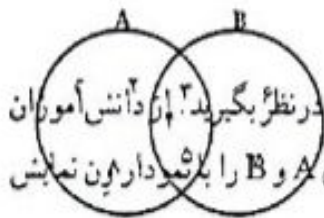
اگر در شکل فقط قسمت اشتراك رنگی باشد بهتر است.



مثال: با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A \cap B$ و $A \cup B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\} \text{ , } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



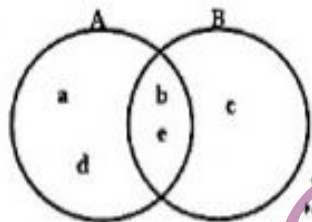
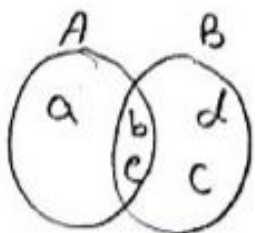
۱- دو مجموعه $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, e\}$ را در نظر بگیرید. از دانش آموزان یک کلاس خواسته نشده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را بشمارد و این نمایش

فعالیت

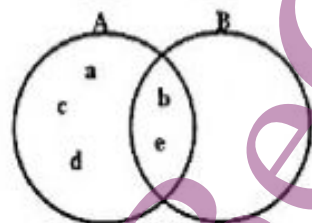
دهند. پاسخ چهار دانش آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:

الف) درباره درستی یا نادرستی پاسخ این دانش آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.

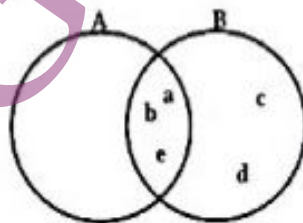
ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.



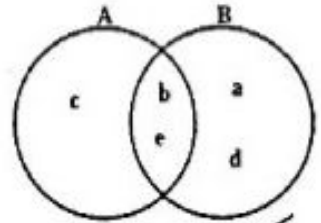
پاسخ حمید ✓



پاسخ ریحانه ✓



پاسخ زهرا ✓



پاسخ حنا ✓

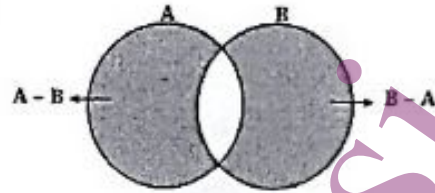
۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم:

$$V - F = \left\{ \begin{array}{l} \text{اساسان و فرستادگان} \\ \text{وسسان} \end{array} \right\}$$

$$F - V = \left\{ \begin{array}{l} \text{کلیان و سجان} \\ \text{دومر} \end{array} \right\}$$

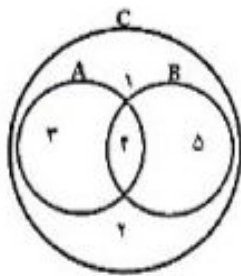
تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ هاشور خورده است:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر $A = \{a, b, c, d, e, k\}$ و $B = \{c, d, k, f, s, t\}$ در این صورت:
 $A - B = \{a, b, e\}$ و $B - A = \{f, s, t\}$

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست

است؟

- الف) $A \subseteq C$ ✓ ب) $B \subseteq C$ ✓ ج) $C \subseteq (A \cup B)$ ✗
 د) $(A \cup B) \subseteq C$ ✓ ه) $2 \in (A \cup B)$ ✗ و) $4 \in (A \cap B)$ ✗
 ز) $A \cup B = A$ ✗ ح) $5 \in (A \cup B)$ ✓ ط) $4 \in (A \cup B)$ ✓

۲- مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارنده ۱۸ باشد ولی شمارنده ۱۲ نباشد. $\{9, 18\}$

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارنده ۱۲ و هم شمارنده ۱۸ باشند. $\{1, 2, 3, 6\}$

۳- مجموعه‌های $(Z - N)$ ، $(N - Z)$ و $(W - N)$ را تشکیل دهید.

$$\{ \dots, -2, -1, 0, \dots \} \quad \{ 0, 1, 2, \dots \} \quad \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به

عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A) = k$.

مثلاً اگر $A = \{2, 4, 6, 7\}$ در این صورت $n(A) = 4$.

$$Z - N = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} - \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} = \{ \dots, -2, -1, 0, \dots \}$$

$$N - Z = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} - \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} = \{ \}$$

$$W - N = \{ \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \} - \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} = \{ \dots, -1, 0, \dots \}$$

سؤال ۳:

- الف $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 ب $\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
 ج $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
 د $\{9\}$
 ه $\{2, 4, 6, 8\}$
 و $\{8, 10, 11\}$

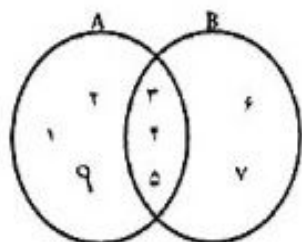
- ز $\{2, 4, 6, 8, 9\} \cup \{5, 7, 9\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 ح $\{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$
 ط $\{2, 4, 6, 8, 9\}$
 ی $\{ \}$
 ک $\{1, 5, 7, 9\}$
 ل $\{1, 7, 8, 10, 11\}$

سؤال ۱:

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

- الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$
 ه) $A - B$ و) $C - B$ ز) $(A - C) \cup (B - C)$ ح) $(A \cup B) - C$
 ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارات‌های درست را با \checkmark و گزاره‌های نادرست را با \times مشخص کنید:



$(A - B) \cup (A \cap B) = A$ (ب) \checkmark $B - A = \{6, 7\}$ (الف) \checkmark

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$ (ج) \times

$n(A \cup B) = 8$ (د) \checkmark

$n(A - B) = n(B - A)$ (و) \checkmark $A - B = B - A$ (ه) \times

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعه ۵) $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه اجتماع همان دو مجموعه است.

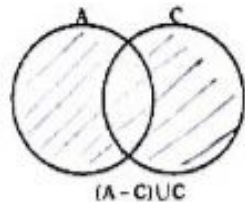
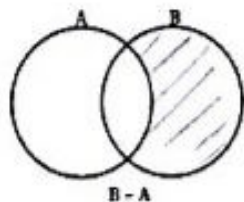
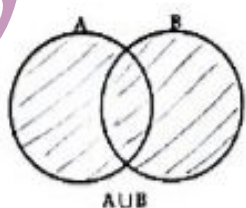
ب) هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه $A \cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیرمجموعه هر یک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه A است.

ه) اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه B مساوی است.

۴- در هر یک از شکل‌های زیر مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.



درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال گذشته برای محاسبه احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را S ، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید:



(الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

(ب) عدد رو شده اول باشد.

(ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

(د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل: (الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم:

$$A = \{3, 6\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; n(A) = 2, n(S) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ب) $B = \{2, 3, 5\}; n(B) = 3$; پیشامد رو شدن عدد اول: B

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

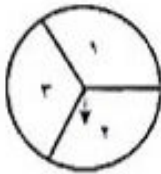
(ج) $C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = 0$; پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶: C

$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{0}{6} = 0$$

(د) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$; پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷: D

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$

فعالیت



۱- با توجه به چرخنده مقابل، همه حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

$$S = \{1, 2, 3\}$$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$$A = \{3, 1\} \text{ (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)}$$

$$B = \{1, 2\} \text{ (عقربه روی اعداد زوج بایستد)}$$

$$C = \{2, 3\} \text{ (عقربه روی اعداد اول بایستد)}$$

$$D = \{2\} \text{ (عقربه روی عدد فرد چپ بایستد)}$$

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هر یک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هر یک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\} \rightarrow P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$D = \{1, 2\}, E = \{1, 3\}, F = \{2, 3\} \rightarrow P(D) = P(E) = P(F) = \frac{2}{3}$$

$$G = \{\} \rightarrow P(G) = 0$$

$$H = \{1, 2, 3\} \rightarrow P(H) = 1$$

کار در کلاس

۱۰ کارت بکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعه همه حالت‌های ممکن $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعه A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ب) مجموعه با پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، $\frac{4}{10}$ باشد. عدد روی کارت خارج شده بیشتر از ۶ باشد.

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخداد هر یک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس است؟ چرا؟

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$P(B) = \frac{4}{10}$$

۱۶

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$P(C) = \frac{5}{10}$$

۱- اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد:

(الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ (ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ تر باشد. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. $\frac{1}{4}$ (د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید

(هر عضو این مجموعه را به طور مثال به صورت (د،د،ب) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این

خانواده دارای دو دختر باشد؟ (دارای دو دختر یعنی دقیقاً دو دختر و یعنی فرزند اول سر و دو فرزند

یعنی دختر بوده است). $\frac{3}{8}$

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی

از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

(الف) این مهره آبی باشد. $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (ب) این مهره سبز نباشد. $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

(ج) این مهره قرمز یا سبز باشد. (یعنی اینها باشد) $\frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ (د) $1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسی آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد:

(اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم. $n(s) = 36$)

(الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ (ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(ج) دو عدد رو نشده، مضرب ۳ باشد. $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

تعمیرات

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از

اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیاء است، باید

بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

در واقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سی‌مورلیب‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر)

بگوییم: در همه شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر

مجموعه جزء نخستین تعریف شده‌ها است، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه،

که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

الف) (۵،۲) و (۵،۳) و (۵،۴) و (۲،۲) و (۲،۳) و (۲،۴) و (۳،۲) و (۳،۳) و (۳،۴) و (۴،۲) و (۴،۳) و (۴،۴)

ب) (۲،۲) و (۲،۳) و (۲،۴) و (۳،۳) و (۳،۴) و (۴،۴) و (۵،۲) و (۵،۳) و (۵،۴)

سؤال ۴: ج) (۲،۳) و (۳،۴) و (۴،۲) و (۴،۳)

د) (۴،۳) و (۵،۲) و (۵،۳) و (۶،۴) و (۲،۴) و (۳،۴) و (۴،۳)