مثلثات

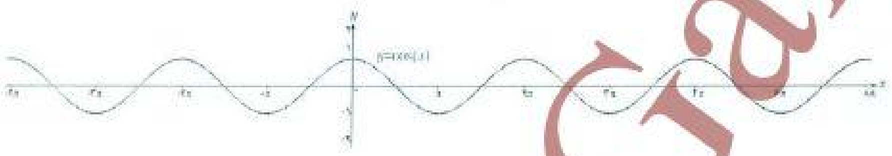
فصل ۲

انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس ۱

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها یکسان است ($\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول ۲π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان ۲π است. چنین توابعی را توابع متناوب و ۲π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

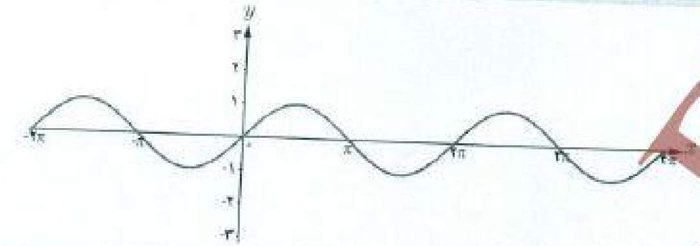
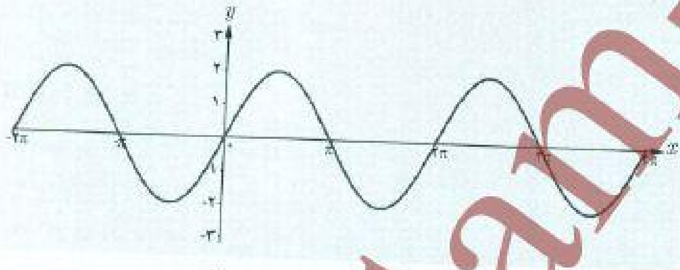
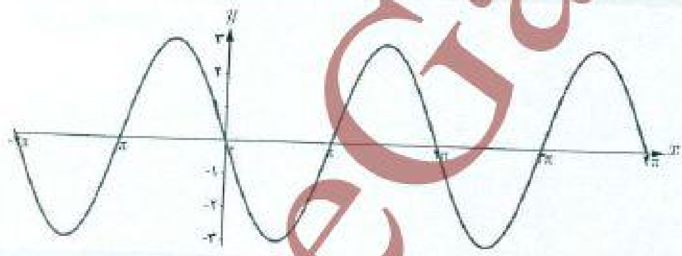
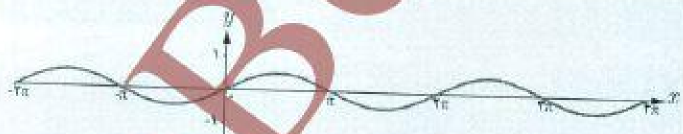
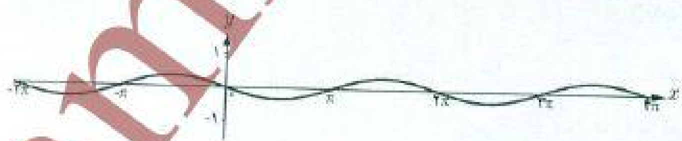
تعریف :

تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x$ ($f(x) = \cos x$) برابر ۲π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱- است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y=\sin x$		۱	-۱	۲π
$y=۲\sin x$		۲ ...	-۲ ...	۲π ...
$y=-۳\sin x$		۳	-۳	۲π
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$		۱/۲	-۱/۲	۲π
$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$		۱/۳	-۱/۳	۲π

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

اگر $a>0$ دوره تناوب ۲π و ماکزیمم a و مینیمم $-a$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است. با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

$-1\leq \sin x\leq 1$

$-a\leq a\sin x\leq a$

$-a+c\leq a\sin x+c\leq a+c$

$\underset{\text{MIN}}{-a+c}\leq y\leq \underset{\text{MAX}}{a+c}$

$-1\leq \cos x\leq 1$

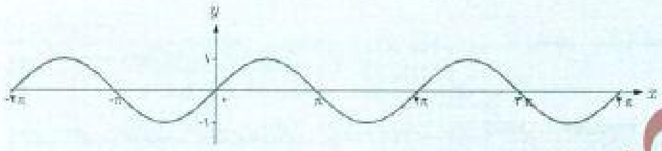
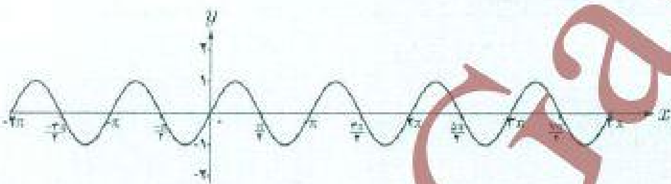
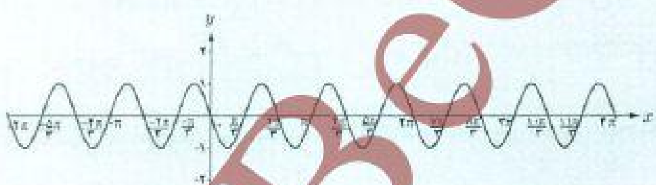
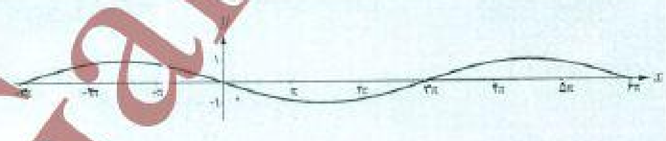
$-a\leq a\cos x\leq a$

$-a+c\leq a\cos x+c\leq a+c$

$\underset{\text{MIN}}{-a+c}\leq y\leq \underset{\text{MAX}}{a+c}$

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
2π	-1	1		$y=\sin x$
π	-1	1		$y=\sin 2x$
$\frac{2\pi}{3}$	-1	1		$y=\sin(-3x)$
4π	-1	1		$y=\sin\frac{x}{2}$
6π	-1	1		$y=\sin(-\frac{x}{3})$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید.

$T=\frac{2\pi}{|b|}$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است.

$-1 \leq \sin bx \leq 1$

$-1+c \leq \sin bx+c \leq 1+c$

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

> توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y=3\sin(2x)-2$

ب) $y=-\frac{1}{4}\cos(\pi x)$

پ) $y=\pi\sin(-x)+1$

ت) $y=8\cos(\frac{x}{3})$

حل :

الف) $\max=|3|-2=1$ $\quad \min=-|3|-2=-5$ $\quad T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

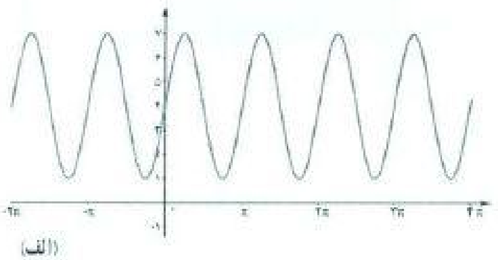
ب) $\max=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ $\quad \min=-\left|-\frac{1}{4}\right|=-\frac{1}{4}$ $\quad T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\pi}=2$

پ) $\max=|\pi|+1=\pi+1$ $\quad \min=-|\pi|+1=1-\pi$ $\quad T=\frac{2\pi}{|-1|}=2\pi$

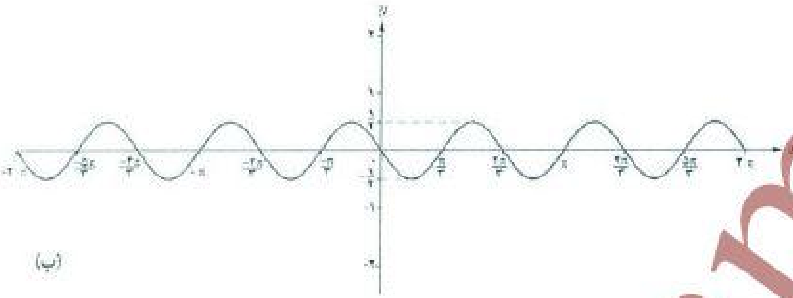
ت) $\max=|8|=8$ $\quad \min=-|8|=-8$ $\quad T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=6\pi$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

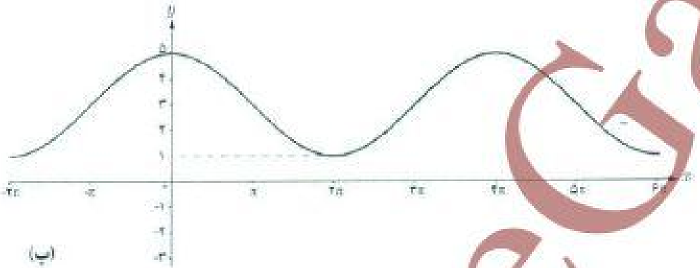
❖ **مثال :** هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.



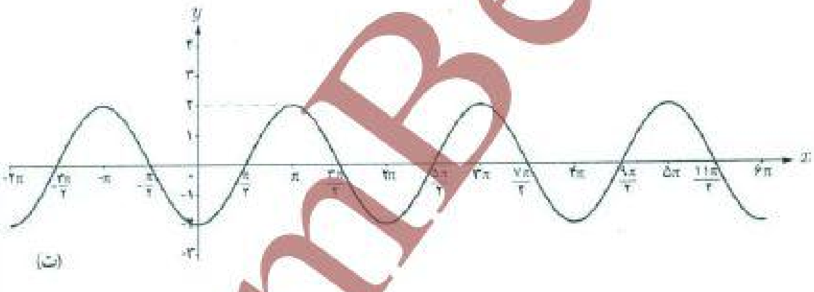
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

❖ **حل :**

الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است: $y = 3\sin(2x)+4$

ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{2}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

بنابراین داریم: $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$ که در آن علامت a مثبت و علامت b منفی است. لذا $a = 2$ و $b = -\frac{1}{2}$ و بنابراین داریم $y = 2\cos(-\frac{x}{2}) + 3$.

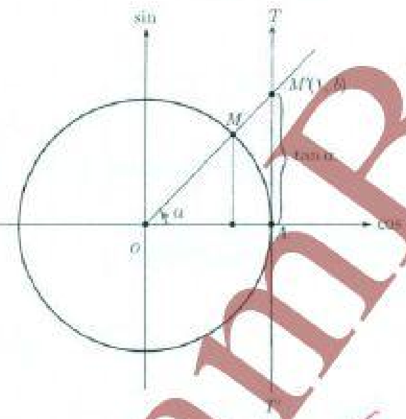
ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است.

بنابراین داریم: $y = -2\cos x$

تابع تانژانت

فعالیت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.



الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan\alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

چون تانژانت زوایایی که در ربع اول و سوم هستند در جهت بالای محور تانژانت یا سمت مثبت محور تانژانت را قطع می‌کند ولی تانژانت زوایایی که در ربع دوم و چهارم قرار دارند امتداد OM جهت منفی محور تانژانت‌ها را قطع می‌کند

پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{2}$ عددی حقیقی است؟ خیر $\tan\frac{3\pi}{2}$ چطور؟ خیر به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

چون برای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ خط OM موازی محور تانژانت‌ها می‌شود و آن را قطع نمی‌کند که بتوان نقطه مشخصی از اعداد حقیقی را به عنوان تانژانت آن‌ها در نظر گرفت

تغییرات تانژانت

فعالیت

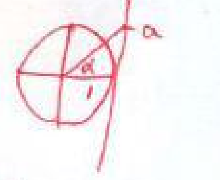
با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟ بی‌نهایت

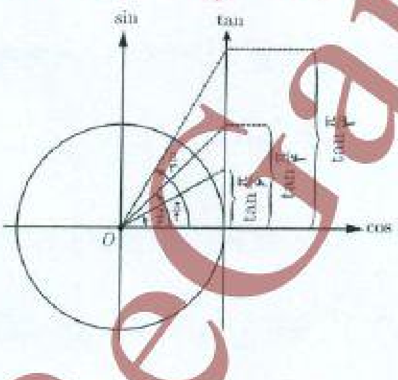
(توضیح در دستهٔ اعداد حقیقی یا در ساختار اعداد حقیقی بی‌نهایت تعریف نشده است)

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

به اندازه a روی محور تانژانت جدا می‌کنیم و به مرکز O وصل می‌کنیم



$\tan\alpha = \frac{a}{1} = a$



کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

افزایشی 0 تا $+\infty$

$-\infty$ تا 0 افزایشی

0 تا $+\infty$ افزایشی

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

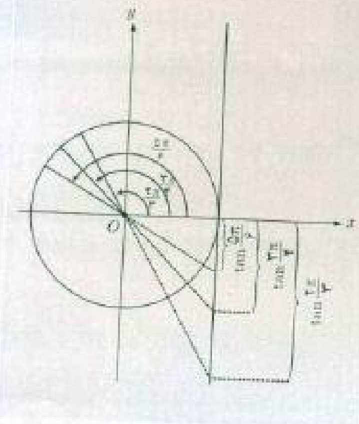
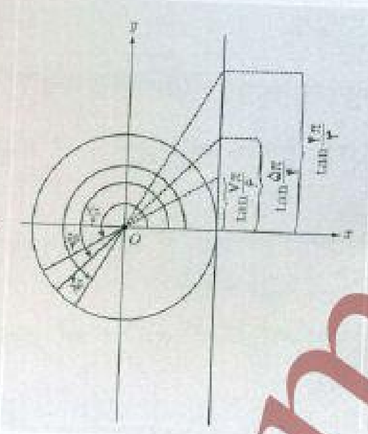
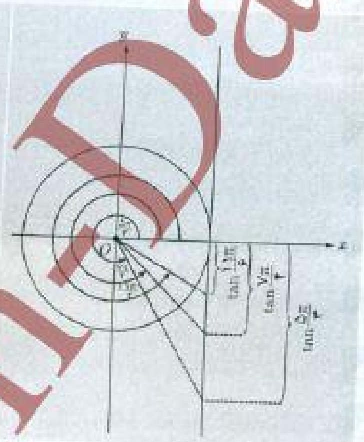
در ربع اول تغییرات تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایشی

در ربع دوم تغییرات تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایشی

در ربع سوم تغییرات تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایشی

در ربع چهارم تغییرات تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایشی

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↘ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول					ربع دوم				ربع سوم				ربع چهارم			
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3} \nearrow$	$+\infty$	$-\sqrt{3} \nearrow$	$-1 \nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3}$	$+\infty \nearrow$	$-\sqrt{3} \nearrow$	$-1 \nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow$	0

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y=\tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y=\tan\alpha$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y=\tan\alpha$ را در بازه $[0\,,\,2\pi]$ بررسی کنید.

در بازه $[0\,,\,\frac{\pi}{2})$ صعودی

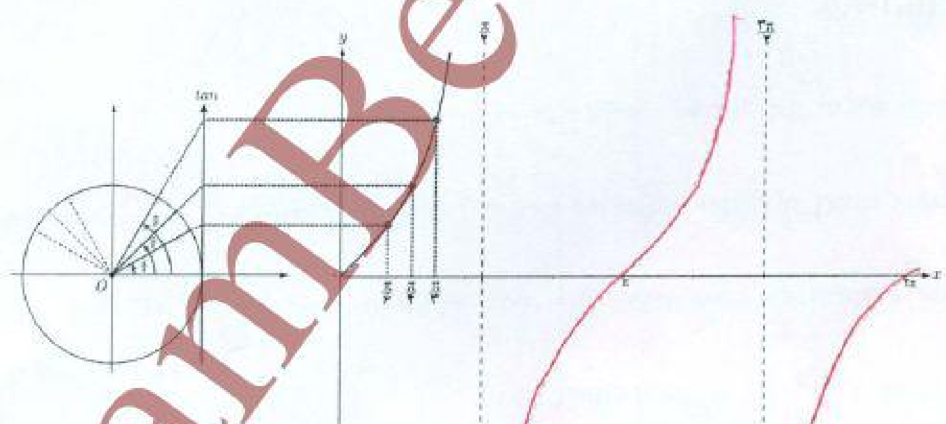
در بازه $(\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2})$ صعودی

در بازه $(\frac{3\pi}{2}\,,\,2\pi]$ صعودی

رسم تابع $y=\tan\alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y=\tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ـ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$ — $T = \frac{۲\pi}{۷}$ — ماکزیمم: ۳ — مینیمم: ۱-

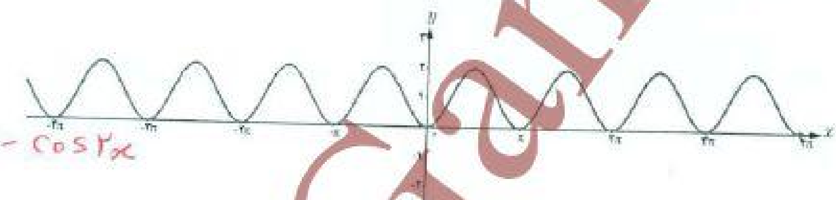
ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$ — $T = ۴$ — ماکزیمم: $\sqrt{۳}+۱$ — مینیمم: $\sqrt{۳}-۱$

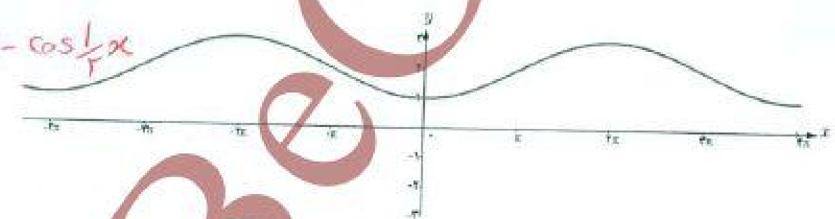
پ) $y = -\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$ — $T = ۴\pi$ — ماکزیمم: π — مینیمم: $-\pi$

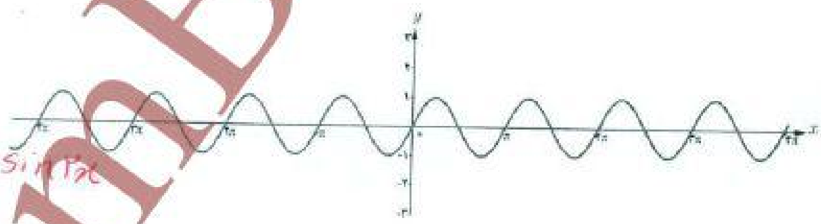
ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$ — $T = \frac{۲\pi}{۳}$ — ماکزیمم: $\frac{۳}{۴}$ — مینیمم: $-\frac{۳}{۴}$

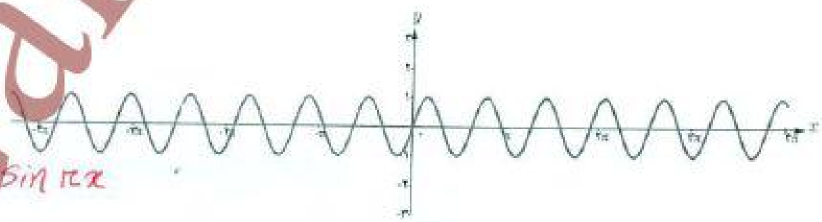
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin\pi x$ ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

۱)

$y = 1 - \cos 2x$

$y = 2 - \cos\frac{1}{2}x$
۲)


۳)

$y = \sin 2x$

۴)

$y = \sin \pi x$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = ۳$, $\min = -۳$ — $y = ۳\sin ۲x$

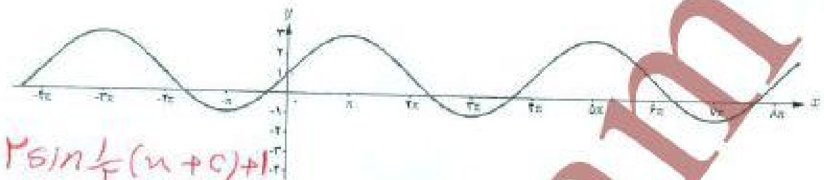
ب) $T = ۳$, $\max = ۹$, $\min = ۳$ — $y = -۴\sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۳$

پ) $T = ۴\pi$, $\max = -۱$, $\min = -۷$ — $y = -۳\sin\frac{۱}{۲}x - ۴$

ت) $T = \frac{\pi}{۲}$, $\max = ۱$, $\min = -۱$ — $y = \cos ۴x$

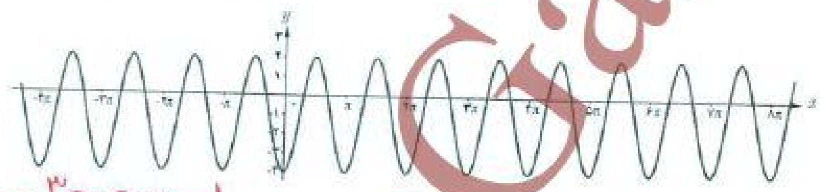
۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



$y = ۲\sin\frac{۱}{۲}(x + c) + ۱$

ب)



$y = -۳\cos ۲x - ۱$

۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. درست

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. درست

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
$\sin\alpha$	$۰ \nearrow$	$\frac{۱}{۲} \nearrow$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \nearrow$	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳} \nearrow$	$۱ \nearrow$	$\sqrt{۳} \nearrow$	$+\infty$

$\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ در ربع اول
هر دو صعودی هستند

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$\sin\alpha$	$-۱ \nearrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \nearrow$	$-\frac{۱}{۲}$	۰
$\tan\alpha$	$+\infty \nearrow$	$-\sqrt{۳} \nearrow$	$-۱ \nearrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳} \nearrow$	۰

$\tan\alpha$ و $\sin\alpha$ در ربع چهارم نیز
هر دو صعودی هستند

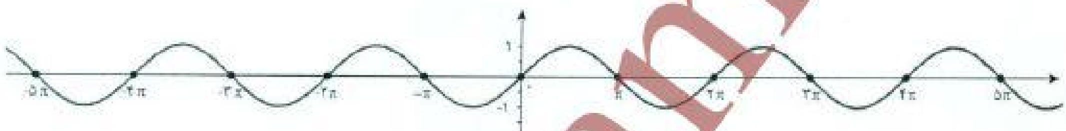
درس ۲

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

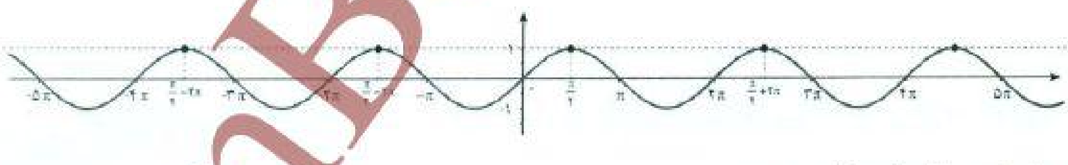
مثال : تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشند. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x=\dots,-۳\pi,-۲\pi,-\pi,0,\pi,۲\pi,۳\pi,\dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=۱$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=۱$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x=\cdots,\ \frac{\pi}{۲}-۴\pi\ ,\ \frac{\pi}{۲}-۲\pi\ ,\ \frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۲}+۲\pi\ ,\ \cdots$$

می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

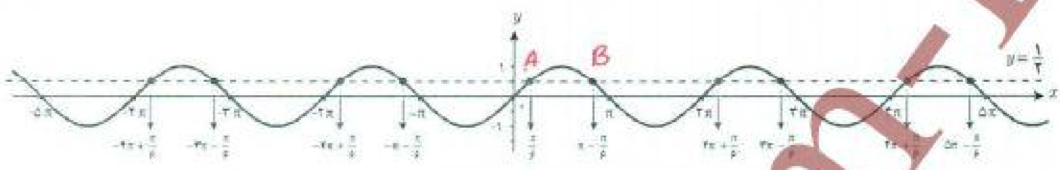
اکنون معادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید. $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$

۲ خط $y=\frac{1}{2}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ بله

A و B



تمامی پاسخ‌های یافته شده به ازای آن ها تساوی برقرار می باشد

۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y=\frac{1}{2}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

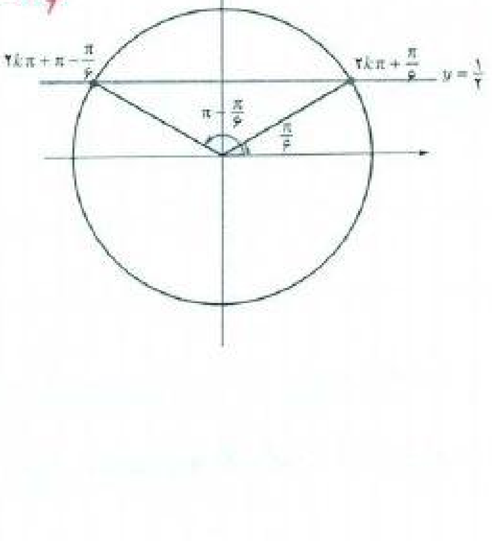
$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

$\sin(-\frac{7\pi}{6})=\frac{1}{2}$

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y=\frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi-\frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi-\frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\ldots -4\pi+\frac{\pi}{6}, -2\pi+\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{\pi}{6}, 4\pi+\frac{\pi}{6} \ldots$

هم انتها با $\pi-\frac{\pi}{6}$: $\ldots -3\pi-\frac{\pi}{6}, -\pi-\frac{\pi}{6}, \pi-\frac{\pi}{6}, 3\pi-\frac{\pi}{6}, 5\pi-\frac{\pi}{6} \ldots$

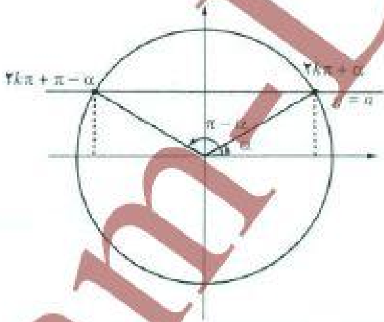


گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

برای عدد حقیقی $-1 \le a \le 1$ که $\sin x = a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال : معادلهٔ $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & , \ k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} & , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

$2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \sin 60^\circ$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$4\sin x + \sqrt{8} = 0$

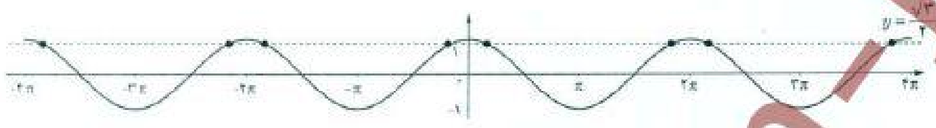
$\sin x = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

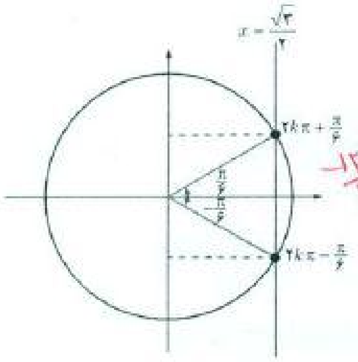
$\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

فعالیت

نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.





الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

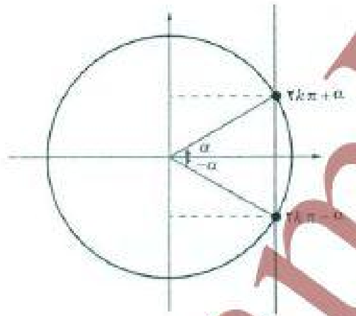
$\frac{\pi}{۶}$ و $-\frac{\pi}{۶}$ ، $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ، $-\frac{۱۱\pi}{۶}$ ، $\frac{۲۳\pi}{۶}$ و $-\frac{۲۳\pi}{۶}$ ، $\frac{۱۳\pi}{۶}$ و $-\frac{۱۳\pi}{۶}$

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

$۲\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۶}$

$۲\pi+\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۶}$

برای هر عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=۲k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

✤ **مثال :** جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به‌صورت $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

✤ **مثال :** معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)\pi}{5} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

✤ **مثال :** معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$
$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} & , k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)}{3}\pi - \dfrac{\pi}{12} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

✤ **مثال :** یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta=\frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

✤ **مثال :** جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x\cos x=۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

✤ **مثال :** معادله $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^۲ x-۹\cos x-۵=۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x=t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $۲t^۲-۹t-۵=۰$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۵$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=۵$ و $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=۵$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ k=\mathbb{Z}$$

✤ **مثال :** معادله $\sin x+\cos x=۱$ را در بازه $۰\le x\le ۲\pi$ حل کنید.

$\sin x+\cos x=۱$

$\sin x=۱-\cos x$

$\sin^۲ x=(۱-\cos x)^۲$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$\sin^۲ x=۱-۲\cos x+\cos^۲ x$ استفاده از رابطه $\sin^۲=۱-\cos^۲ x$

$۱-\cos^۲ x=۱-۲\cos x+\cos^۲ x$

$۲\cos^۲ x-۲\cos x=۰$

$۲\cos x(\cos x-۱)=۰ \Rightarrow ۲\cos x=۰$ یا $\cos x-۱=۰$

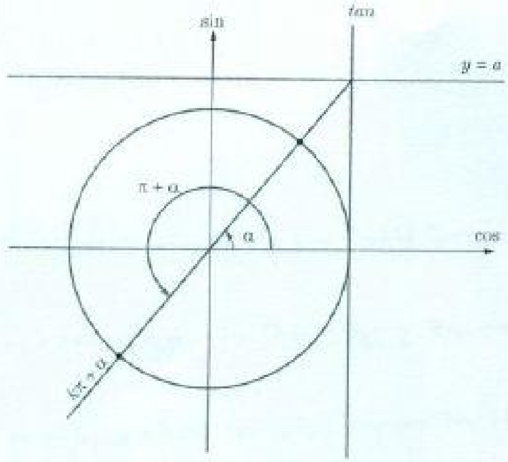
اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $۰\leq x\leq ۲\pi$ می‌یابیم:

$$۲\cos x=۰ \Rightarrow \cos x=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$
$$\cos x-۱=۰ \Rightarrow \cos x=۱ \Rightarrow x=۰\ ,۲\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x=\frac{۳\pi}{۲}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x=۰,\frac{\pi}{۲}$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

چون از به توان رساندن ممکن است به جواب‌های ما مقداری جواب فرعی اضافه شده باشد که با چک کردن آن‌ها حذف می‌شود

در شکل زیر نمودار تابع $y=\tan x$ و خط $y=a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x=a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a، که $\tan x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan\alpha=a$. بنابراین معادله $\tan x=a$ به‌صورت $\tan x=\tan\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x=\tan\alpha$ باید رابطه بین زوایای x و a را بیابیم.



از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ که k یک عدد صحیح، است می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a=1$ باشد، داریم :

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in z)$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال : معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

حل : $x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

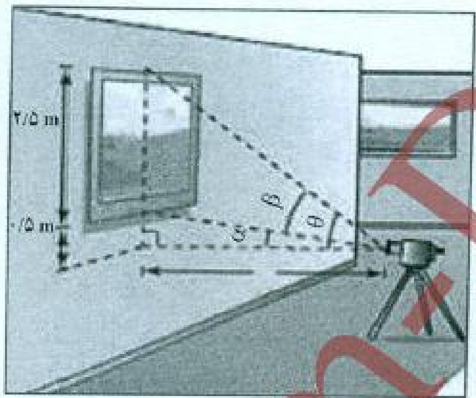
$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

✤ **مثال** : نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به‌صورت زیر است.

$$\tan\beta=\frac{2/5\,x}{x^2+\frac{3}{2}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به‌دست آورید.

✤ **حل** :با توجه به شکل برای مثلث قائم‌الزاویه پایین شکل داریم :

$$\tan\alpha=\frac{0/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم :

$$\tan\theta=\frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به‌دست می‌آید :

$$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{x}-\frac{0/5}{x}}{1+\frac{3}{x}\times\frac{0/5}{x}}=\frac{\frac{2/5}{x}}{\frac{x^2+\frac{3}{2}}{x^2}}=\frac{2/5x}{x^2+\frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم :

$$x=1\rightarrow\tan\beta=\frac{2/5\times1}{1^2+\frac{3}{2}}=\frac{2/5}{2/5}=1$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan\frac{\pi}{4}=1$ پس جواب‌های معادله $\tan\beta=1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\beta=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta=\frac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌دهد قابل قبول می‌باشد.

$$\textcircled{1}\begin{cases} \cos\alpha = \frac{5}{13} \\ \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\times\frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169} \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

$$\sin 22{,}5 = \sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22{,}5 = \sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

ث) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

چ) $\tan(2x-1) = 0$

ح) $\tan 2x = \tan \pi x$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$$\frac{1}{2}\times 2\times 6\times \sin\alpha = 3$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \pi/6 & k\in Z \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \pi/6 & k\in Z \end{cases}$$

$\alpha = \pi/6$ و $\alpha = 5\pi/6$ دو مثلث می‌توان ساخت

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - \cancel{1} - \cos x + \cancel{1} = 0$

$2\cos^2 x - \cos x = 0 \longrightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$

ج) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \longrightarrow -2\sin^2 x + 1 - \sin x = 0 \longrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

د) $\cos x = \cos 2x$

$x = 2k\pi \pm 2x$

$\begin{cases} x = 2k\pi + 2x \longrightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

ه) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \longrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

و) $\sin x - \underbrace{\cos 2x}_{-2\sin^2 x + 1} = 0 \longrightarrow \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \longrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

ز) $\tan(2x - 1) = 0$

$2x - 1 = k\pi$

$x = \frac{k\pi + 1}{2}$

ح) $\tan 3x = \tan \pi x$

$3x = k\pi + \pi x$

$(3 - \pi)x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{3 - \pi}$