

((فصل چهارم : مشتق))

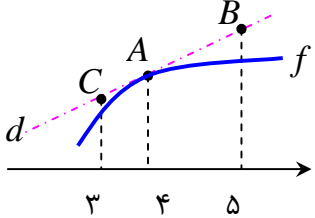
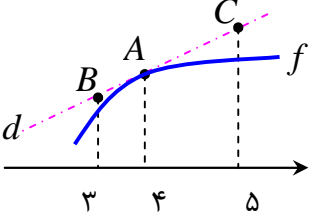


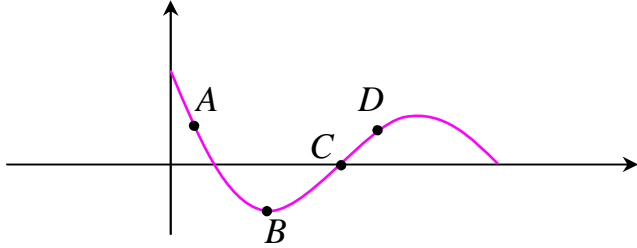
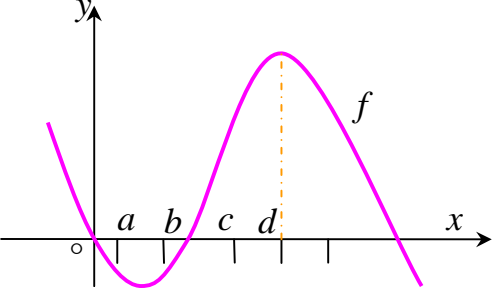
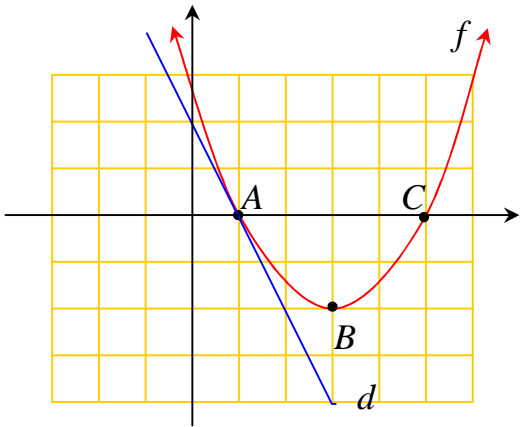
درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

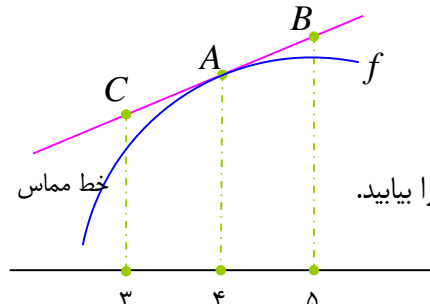
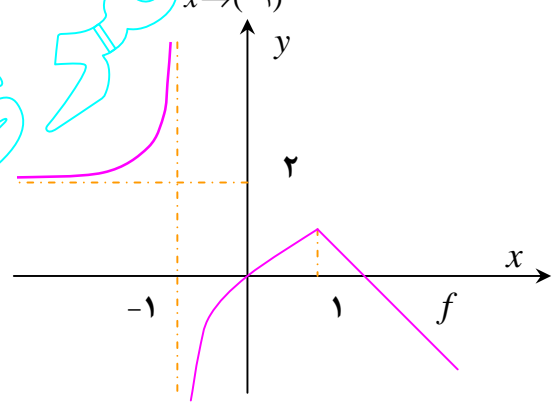
تعریف مشتق

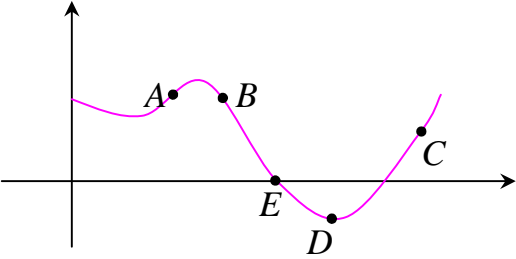
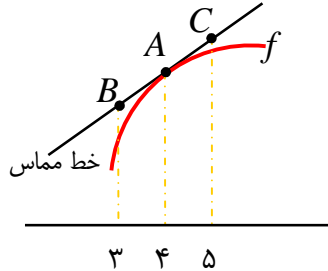
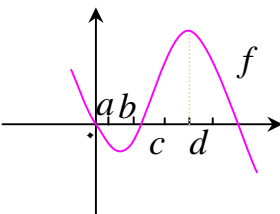
۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد. $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸	مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به دست آورید.	۲

تعبیر هندسی مشتق

۰/۷۵ نمره	دی ۹۷	<p>در شکل مقابل ، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی A مماس شده است. اگر $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.</p> 	۱
۱ نمره	تیر ۹۸	<p>در شکل مقابل ، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی A مماس شده است. اگر $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.</p> 	۲

<p>شهریور ۹۸ نمره ۱</p>	<p>نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.</p> <table border="1" data-bbox="502 358 1101 504"> <tr> <td>شیب</td> <td>۱</td> <td>۰</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>-۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> 	شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲	نقطه					<p>نمره ۱ دی ۹۸</p>	<p>با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a و b و c و d را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.</p> <table border="1" data-bbox="430 940 678 1220"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f'(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>۰</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۰/۵</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td>-۰/۵</td> </tr> </tbody> </table> 	x	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵	<p>نمره ۱ خرداد ۹۹</p>	<p>در نمودار مقابل خط d در نقطه‌ی $x=1$ بر نمودار f مماس شده است. الف: مشتق تابع f را در نقطه‌ی $x=1$ محاسبه کنید. ب: شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.</p> 
شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲																					
نقطه																									
x	$f'(x)$																								
	۰																								
	۰/۵																								
	۲																								
	-۰/۵																								

۱۳۵ نمره	خرداد ۹۹	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.</p>	۶
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	<p>اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه‌ی ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.</p>	۷
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>برای تابع f در شکل روبرو داریم:</p>  <p>$f(4) = 25$ و $f'(4) = \frac{3}{2}$</p> <p>با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید.</p>	۸
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>با توجه به نمودار $y = f(x)$</p> <p>الف: حدود خواسته شده را بنویسید.</p> <p>۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$</p> <p>۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$</p>  <p>ب: تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست.</p>	۹

انمره	دی ۹۹	<p>نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است).</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>شیب</th> <th>نقطه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-۳</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-۱</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۱</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> 	شیب	نقطه	-۳		-۱		۰		۱		۱۰
شیب	نقطه												
-۳													
-۱													
۰													
۱													
انمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>برای تابع f در شکل روبرو داریم، $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۴$ با توجه به شکل، مختصات B و C را بیابید.</p> 	۱۱										
انمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول های a و b و c و d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f'(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>۰</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۰/۵</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td></td> <td>-۰/۵</td> </tr> </tbody> </table> 	x	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵	۱۲
x	$f'(x)$												
	۰												
	۰/۵												
	۲												
	-۰/۵												

فرمول های مشتق گیری

انمره ۰/۷۵	دی ۹۷	<p>اگر $f'(۲) = ۳$ و $g'(۲) = ۵$ باشد. آنگاه حاصل عبارت $(۲g - f)'(۲)$ برابر است.</p>	۱
انمره ۲	دی ۹۷	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست).</p> <p>الف) $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$</p> <p>ب) $g(x) = x^2 \sqrt{x+1}$</p>	۲

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست). الف) $f(x) = (x^4 - 3x)^5$ ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$	۳
۲ نمره	۹۸ تیر	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{5x^2 - x}{\sqrt{x}}$	۴
۱/۵ نمره	۹۸ شهریور	مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$ را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	۵
۱/۷۵ نمره	۹۸ دی	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$ ب) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$	۶
۱/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$ ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$	۷
۲/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 1}$ ب) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$	۸
۱ نمره	۹۹ خرداد	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$ ب) $f(x) = \sqrt{5x+3}$	۹
۱/۷۵ نمره	۹۹ شهریور	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 5x)^7$	۱۰
۱/۵ نمره	۹۹ دی	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x+1}\right)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$	۱۱

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل چهارم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

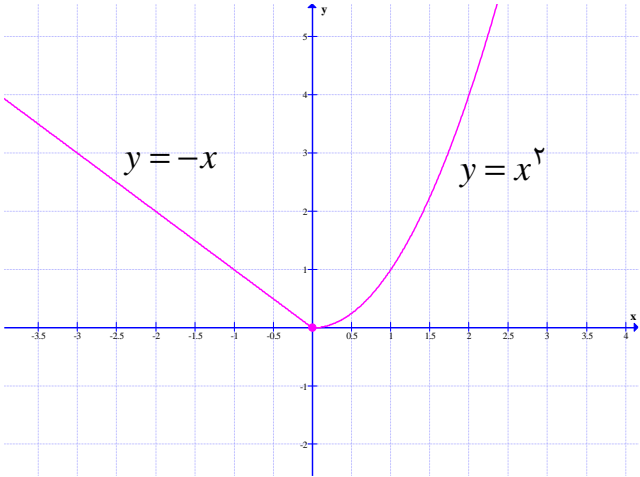
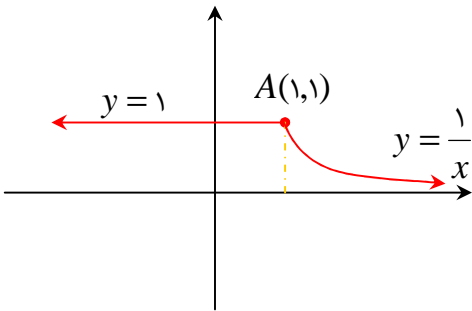
نمره ۱/۵	خرداد ۱۴۰۰	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$	۱۲
نمره ۱/۵	شهریور ۱۴۰۰	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}$	۱۳
نمره ۱/۷۵	دی ۱۴۰۰	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1)$	۱۴
نمره ۰/۷۵	دی ۱۴۰۰	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.	۱۵

درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی

نمره ۱/۵	خرداد ۹۸	تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد. ب: ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. ج: نمودار تابع f' را رسم کنید.	۱
نمره ۱/۵	شهریور ۹۸	مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$	۲
نمره ۱/۲۵	دی ۹۸	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید که $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	۳
نمره ۰/۲۵	خرداد ۹۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.	۴

تهیه کننده: جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست. خط $x=0$ را منحنی می نامیم.	۵
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در نقطه‌ی $x = -2$ بررسی کنید.	۶
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ی $x=0$ مماس قائم دارد. ب: اگر تابع f پیوسته باشد، لزوماً مشتق پذیر است.	۷
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ باشد، نشان دهید $f'(0)$ موجود نیست.	۸
۱ نمره	خرداد ۹۹	مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$	۹
۰/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a ، است.	۱۰
۱/۵ نمره	شهریور ۹۹	تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$ داده شده است. الف: نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ب: ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. پ: نمودار تابع f' را رسم کنید.	۱۱
۰/۲۵ نمره	دی ۹۹	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h''(1)$ برابر است.	۱۲

۱/۲۵ نمره	دی ۹۹	<p>با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه‌ی ، نشان دهید این تابع در نقطه‌ی مشتق پذیر نیست.</p> 	۱۳
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>با محاسبه‌ی مشتق راست و مشتق چپ تابع f ، در نقطه‌ی A ، نشان دهید که تابع f در نقطه‌ی A ، مشتق پذیر نیست.</p> 	۱۴
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(\cdot)$ و $f'_-(\cdot)$ موجودند ولی $f'(\cdot)$ موجود نیست.</p>	۱۵
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۰	<p>مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه‌ی $x = -1$ بررسی کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$	۱۶

درس ۳: آهنگ تغییر

۱ نمره	دی ۹۷	<p>یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه‌ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟</p>	۱
-----------	-------	--	---

تهیه کننده: جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۱ نمبره	۹۸ خرداد	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، بر حسب متر داده شده است. تعیین کنید که در چه زمانی، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.	۲
۱/۵ نمبره	۹۸ تیر	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه‌ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه‌ی $t = 3$ چقدر است؟	۳
۱ نمبره	۹۸ شهریور	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند را به دست آورید.	۴
۱ نمبره	۹۸ دی	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. اگر x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) باشد، حساب کنید که آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟	۵
۱/۵ نمبره	۹۹ خرداد	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. الف: سرعت افزایش جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $1 \leq t \leq 4$ چقدر است؟ ب: آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 4$ چقدر است؟	۶
۱/۵ نمبره	۹۹ خرداد	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ برابر است؟	۷
۱ نمبره	۹۹ خرداد	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم، $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ رشد جرم این توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 1$ چقدر است؟	۸
۱/۵ نمبره	۹۹ شهریور	خودرویی در امتداد خط راست، طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟	۹
۱ نمبره	۹۹ دی	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟	۱۰

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. حال اگر جهت حرکت به طرف بالا مثبت در نظر بگیریم و ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه، از معادله - $h(t) = -5t^2 + 40t$ ی به دست آید. الف : سرعت متوسط جسم را در بازه ی $[5, 8]$ به دست آورید. ب : مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم ۳۵ متر بر ثانیه است؟</p>	۱۱
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>تابع ضابطه ی $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قدر کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟</p>	۱۲
۱ نمره	دی ۱۴۰۰	<p>معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه - $[0, 5]$ ی (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه ی $[0, 5]$ زمانی با هم برابرند؟</p>	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل چهارم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۴ : مشتق

درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف مشتق

$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1-x)(1+x)}{x + 1} = 4$	۱
$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$	۲

تعبیر هندسی مشتق

$f(4) = 24 \rightarrow A(4, 24)$ $f(4) = 24, f'(4) = m_{AB} = 1/5$ $d: y - 24 = \frac{3}{2}(x - 4) \rightarrow y - 24 = \frac{3}{2}x - 6 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 18$ $x = 5 \rightarrow y = \frac{3}{2}(5) + 18 = \frac{51}{2} \rightarrow B(5, \frac{51}{2})$ $x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}(3) + 18 = \frac{45}{2} \rightarrow C(3, \frac{45}{2})$	۱
---	---

$f(۴) = ۲۵ \rightarrow A(۴, ۲۵)$ $f(۴) = ۲۵$, $f'(۴) = m_{AB} = ۱/۵$ $d: y - ۲۵ = \frac{۳}{۲}(x - ۴) \rightarrow y - ۲۵ = \frac{۳}{۲}x - ۶ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۱۹$ $x = ۵ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۵) + ۱۹ = \frac{۵۱}{۲} \rightarrow B(۵, \frac{۵۱}{۲})$ $x = ۳ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۳) + ۱۹ = \frac{۴۷}{۲} \rightarrow C(۳, \frac{۴۷}{۲})$	۲										
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>شیب</td> <td>۱</td> <td>۰</td> <td>$\frac{۱}{۲}$</td> <td>-۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td>C</td> <td>B</td> <td>D</td> <td>A</td> </tr> </tbody> </table>	شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲	نقطه	C	B	D	A	۳
شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲							
نقطه	C	B	D	A							
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>d</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>a</td> </tr> <tr> <td>f'(x)</td> <td>.</td> <td>۰/۵</td> <td>۲</td> <td>-۰/۵</td> </tr> </tbody> </table>	x	d	b	c	a	f'(x)	.	۰/۵	۲	-۰/۵	۴
x	d	b	c	a							
f'(x)	.	۰/۵	۲	-۰/۵							
الف) $f'(۱) = \frac{۲-۰}{۰-۱} = -۲$ ب) $m_B < m_C$	۵										
	۶ نادرست										
$f(۲) = ۳(۲)^۲ - ۲(۲) + ۱ = ۱۲ - ۴ + ۱ = ۹$ $f'(x) = ۶x - ۲ \rightarrow m = f'(۲) = ۶(۲) - ۲ = ۱۰$ شیب خط مماس $y = m(x - a) + b \rightarrow y = ۱۰(x - ۲) + ۹ \rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$ معادله‌ی خط مماس	۷										

$f(4) = 25 \rightarrow A(4, 25)$						۸												
$f'(4) = \frac{3}{2} \rightarrow m = \frac{3}{2}$ شیب خط مماس																		
$y = m(x - a) + b \rightarrow y = \frac{3}{2}(x - 4) + 25$ معادله‌ی خط مماس																		
$x = 5 \rightarrow y = \frac{3}{2}(5 - 4) + 25 = 26/5 \Rightarrow B(5, 26/5)$																		
$x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}(3 - 4) + 25 = 23/5 \Rightarrow C(3, 23/5)$						۹												
الف:																		
۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$			۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$															
ب: تابع در نقاط $x = -1$ و $x = 1$ مشتق پذیر نیست.																		
<table border="1"> <tbody> <tr> <td></td> <td>نقطه</td> <td>A</td> <td>D</td> <td>B</td> <td>E</td> </tr> <tr> <td></td> <td>شیب</td> <td>۱</td> <td>.</td> <td>-۱</td> <td>-۳</td> </tr> </tbody> </table>							نقطه	A	D	B	E		شیب	۱	.	-۱	-۳	۱۰
	نقطه	A	D	B	E													
	شیب	۱	.	-۱	-۳													
$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \xrightarrow{f(4)=24} 24 - f(3) = 1/5 \rightarrow f(3) = 22/5$						۱۱												
$\rightarrow B(3, 22/5)$																		
$\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \xrightarrow{f(4)=24} f(5) - 24 = 1/5 \rightarrow f(5) = 25/5$						۱۲												
$\rightarrow C(5, 25/5)$																		
<table border="1"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>$-0/5$</td> <td>$0/5$</td> <td>۲</td> <td>.</td> </tr> </tbody> </table>						x	a	b	c	d	$f'(x)$	$-0/5$	$0/5$	۲	.	۱۲		
x	a	b	c	d														
$f'(x)$	$-0/5$	$0/5$	۲	.														

فرمول های مشتق گیری

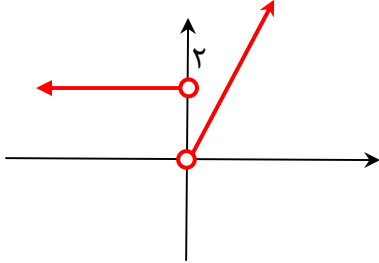
$2g'(2) - f'(2) = 2(5) - 3 = 7$	۱
---------------------------------	---

<p>الف) $f'(x) = 5 \times \left(\frac{x}{2x-1}\right)^4 \times \left(\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}\right)$</p> <p>ب) $g'(x) = 2x \times (\sqrt{x+1}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \times x^2$</p>	۲
<p>الف) $f'(x) = 5 \times (4x^3 - 3)(x^4 - 3x)^4$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$</p>	۳
<p>الف) $f'(x) = 5 \times (2x+2)(x^2 + 2x+1)^4$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{(1 \cdot x - 1)\sqrt{x} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5x^2 - x)}{(\sqrt{x})^2}$</p>	۴
<p>$y' = \frac{-1}{x^2} \times (2\sqrt{x} - 1)^4 + 4\left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - \cdot\right)(2\sqrt{x} - 1)^3 \times \frac{1}{x}$</p>	۵
<p>الف) $f'(x) = 3(2x)(x^2 + 1)^2 (5x - 1) + 5(x^2 + 1)^3$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$</p>	۶
<p>الف) $f'(x) = 8\left(\frac{-3(x^2 + 5) - (2x)(-3x+1)}{(x^2 + 5)^2}\right)\left(\frac{-3x+1}{x^2 + 5}\right)^7$</p> <p>ب) $g'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)(\sqrt{3x+2}) + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)$</p>	۷

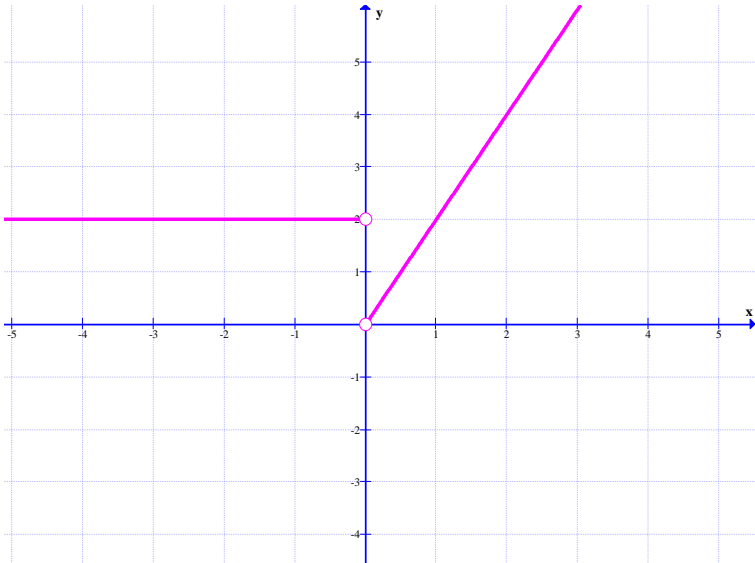
<p>الف: مشتق تابع کسری</p> $f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+1) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+1)^2}$ <p>ب: مشتق حاصل ضرب دو تابع</p> $f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(\Delta x-1) + \Delta(x^2+1)^3$	۸
<p>الف) $f'(x) = \Delta \left(\frac{-3(x^2+\Delta) - 2x(-3x-1)}{(x^2+\Delta)^2} \right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+\Delta} \right)^2$</p> <p>ب) $f'(x) = \frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta x+3}}$</p>	۹
<p>الف) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+1)}{(\sqrt{x})^2}$</p> <p>ب) $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+\Delta x)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) \times 2(2x+\Delta)(x^2+\Delta x)^2$</p>	۱۰
<p>الف) $f'(x) = \Delta \left(\frac{x^2}{3x-1} \right) \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \right)$</p> <p>ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3+1) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$</p>	۱۱
<p>الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$</p> <p>ب) $g'(x) = (6x)(2x-\Delta)^2 + (3)(2)(2x-\Delta)^2(3x^2-4)$</p>	۱۲
<p>الف) $f'(x) = \Delta(x^2+2x+1)^2(2x+2)$</p> <p>ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$</p>	۱۳

الف) $f'(x) = 5(2x+2)(x^2+2x-1)^4$	۱۴
ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3+1) + (\sqrt{3x+2})(3x^2)$	
$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$	۱۵

درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی

<p>الف: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است ولی مشتق راست و چپ در این نقطه برابر نمی باشند. لذا در $x=0$ تابع مشتق پذیر نیست و این نقطه، یک نقطه‌ی گوشه ای است.</p> <p>ب:</p> $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$ <p>ج:</p> 	۱
$f(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$ <p>حد راست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1)^2 + (1) = 2$</p> <p>حد چپ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3(1) - 1 = 2$</p> <p>و چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ پس تابع در این نقطه پیوسته است.</p> <p>مشتق راست $f'_+(x) = 2x+1 \rightarrow f'_+(1) = 2(1)+1 = 3$</p> <p>مشتق چپ $f'_-(x) = 3 \rightarrow f'_-(1) = 3$</p>	۲

<p>پس $f'_+(1) = f'_-(1)$</p> <p>لذا تابع در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق پذیر است.</p>	
<p>$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$ و $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$</p> <p>و چون $f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ نتیجه می شود که $f'(\cdot)$ وجود ندارد.</p>	۳
<p>نادرست</p>	۴
<p>مماس قائم</p>	۵
<p>تابع در نقطه‌ی $x = -2$ پیوسته است.</p> <p>$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{ x^2 - 4 - \cdot}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} =$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = 4$</p> <p>$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{ x^2 - 4 - \cdot}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = -4$</p> <p>و چون $f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$ لذا $f'(-2)$ موجود نیست.</p>	۶
<p>$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} f'(x) = +\infty$ زیرا الف : درست .</p> <p>ب : نادرست. پیوستگی تنها شرط مشتق پذیری نیست.</p>	۷
<p>نشان می دهیم که یا مشتقات راست و چپ نابرابرند و یا اینکه تابع ناپیوسته است.</p> <p>$f(\cdot) = (\cdot)^2 = \cdot$</p> <p>مشتق راست $f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x}{x} = 1$</p> <p>مشتق چپ $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} x = \cdot$</p>	۸

<p>حال چون $f'_+(\circ) \neq f'_-(\circ)$ تابع در $x = \circ$ مشتق پذیر نیست.</p>	
<p>حد راست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 1 + 3 = 4$</p> <p>حد چپ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2(1) = 2$</p> <p>لذا تابع در $x = 1$ دارای حد نیست و در نتیجه در این نقطه پیوسته نبوده و مشتق پذیر نیست.</p>	۹
<p>پیوسته</p>	۱۰
<p>الف : تابع f در نقطه‌ی $x = \circ$ پیوسته نیست. بنابراین $f'(\circ)$ موجود نیست.</p> <p>ب : $f'(x) = \begin{cases} 2x & x > \circ \\ 2 & x < \circ \end{cases}$</p> <p>پ :</p> 	۱۱
<p>۴۰</p>	۱۲
<p>$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x^2 - \circ}{x - \circ} = \circ$</p> <p>$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{-x - \circ}{x - \circ} = -1$</p> <p>موجود نیست. $\rightarrow f'_+(\circ) \neq f'_-(\circ)$</p>	۱۳

$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$ $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$ <p>و چون $f'_+(\cdot) = f'_-(\cdot)$ لذا $f'(\cdot)$ موجود نیست.</p>	۱۴
$f(\cdot) = \cdot$ $f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$ $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} x = \cdot$ <p>و چون $f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ پس $f'(\cdot)$ موجود نیست.</p>	۱۵
$\begin{cases} f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x^2 + 3) - 4}{x - (-1)} = -2 \\ f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(2x + 6) - 4}{x - (-1)} = 2 \end{cases} \rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ <p>لذا $f'(-1)$ موجود نیست.</p>	۱۶

درس ۳: آهنگ تغییر

$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = 130 - (\sqrt{3} + 54) = 76 - \sqrt{3}$	۱
<p>آهنگ متوسط $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(4) - f(\cdot)}{4 - \cdot} = \frac{28 - \cdot}{4} = 7$</p> $f'(t) = 4t - 1$ $4t - 1 = 7 \rightarrow t = 2$	۲
<p>آهنگ متوسط $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = 130 - (\sqrt{3} + 54) = 76 - \sqrt{3}$</p>	۳

$x(t) = \sqrt{t} + 2t^3 \rightarrow x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$ $\rightarrow x'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6(3)^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 54$	
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$	۴
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{15 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1/4$	۵
<p>الف) $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(4) - m(1)}{4 - 1} = \frac{130 - 3}{3} = \frac{127}{3}$</p> <p>ب) $m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \xrightarrow{t=4} m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 6(4)^2 = \frac{1}{4} + 96 = \frac{385}{4}$</p>	۶
$f(5) = (5)^2 - (5) + 10 = 25 - 5 + 10 = 30$ $f(0) = (0)^2 - (0) + 10 = 10$ <p>سرعت متوسط $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$</p> <p>سرعت لحظه ای $f'(t) = 2t - 1$</p> $f'(t) = 4 \rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	۷
$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$ $\rightarrow m'(1) = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$ آهنگ رشد توده‌ی باکتری	۸
$d'(t) = -1 \cdot t + 20 \rightarrow d'(2) = -1 \cdot (2) + 20 = 0$	۹
$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \\ f'(t) = 2t - 1 \end{array} \right\} \rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	۱۰

الف) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 75}{8 - 5} = -25$	۱۱
ب) $h'(t) = -10t + 40 \xrightarrow{h'(t)=35} -10t + 40 = 35 \rightarrow t = 0.5$	
آهنگ متوسط تغییر $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{185 - 50}{25} = \frac{7}{5}$	۱۲
آهنگ لحظه ای $f'(x) = 7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \rightarrow f'(49) = 7\left(\frac{1}{2\sqrt{49}}\right) = \frac{1}{2}$	
سرعت متوسط $\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$	۱۳
سرعت لحظه ای $f'(t) = 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان