

نام خداوند جان آفرین که سخن در زبان آید

راهنمای برتر ریاضی (۱)

پایه دهم

علوم تجربی و ریاضی فیزیک

فصل ۶



@MATHCLASS2



Majid.ghaderi.mathclass.2



m.ghaderi.5165@gmail.com



09177635165

جایگشت

فصل ۶

درس ۲

اهداف

- آشنایی با نماد فاکتوریل
- ایجاد مهارت در محاسباتی که شامل فاکتوریل است.
- آشنایی با مفهوم جایگشت
- رابطه اصل ضرب و مفهوم جایگشت
- به کارگیری مفهوم جایگشت در حل مسائل

فعالیت صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

۱) فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	c	a
b	a	c
c	b	a
c	a	b

۲) آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ **خیر**

۳) با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟
 $3 \times 2 \times 1 = 6$

فعالیت صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

به چند حالت مختلف می‌توان چهار رقم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

کنار هم بودن ارقام این معنی را می‌رساند که ارقام باید غیر تکراری باشند. به عبارت دیگر در اعداد ۴ رقمی مورد نظر می‌بایست از هر ۴ رقم داده شده استفاده شود.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۴ یا ۳ یا ۲ یا ۱

رقم باقی مانده
 یکی از دو رقم باقی مانده
 یکی از سه رقم باقی مانده

صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

جایگشت (تبدیل)

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیا می گوئیم.

به عنوان مثال: تعداد جایگشت های ۴ شیء متمایز برابر با $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ است.

تعداد جایگشت های حروف کلمه شیراز برابر با $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ است.

به عبارت دیگر، در جایگشت ها، جابه جایی ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

فعالیت ۲ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

به نظر شما تعداد روش های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ به ترتیب (آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت های پنج شیء متمایز چندتاست؟

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

فعالیت ۳ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «ب» و «ه» می توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

فعالیت ۴ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت؟

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

فعالیت ۵ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

تعداد جایگشت های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

فعالیت ۶ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

معرفی نماد فاکتوریل

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می کنیم.

به عبارت دیگر برای سهولت در انجام محاسبات ریاضی، حاصلضرب اعداد طبیعی و متوالی از یک تا n را با نماد $n!$ نشان می دهند.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

به عنوان مثال

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$20! = 20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 2 \times 1$$

$$1! = 1$$

$$(k+2)! = (k+2)(k+1)(k) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n-3)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-5)(n-4)(n-3)$$

$$0! = 1$$

قرار داد

تعداد جایگشت های n شی متمایز برابر با $n!$ است.

کار در کلاس ۱ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

$$\text{الف) } 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5!$$

$$\text{ب) } 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times 7!$$

$$\text{پ) } 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10 \times 9!$$

$$\text{ت) } n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n(n-1)!$$

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

$$\text{ب) } \frac{10!}{9!} = \frac{10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10$$

$$\text{پ) } \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\text{ت) } \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$$

$$\text{ث) } \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$$

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n(n-1)$$

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$ج) \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۳۳۶$$

$$ح) \frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$$

$$خ) \frac{n!}{(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!} = n(n-۱)(n-۲)$$

$$د) \frac{n!}{(n-۴)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$$

$$ذ) \frac{n!}{(n-۵)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)!}{(n-۵)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$$

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$ر) \frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times (n-(k+1))(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times (n-(k+1))$$

کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

حاصل ضرب های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\text{الف) } 9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$$

$$\text{ب) } 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!}$$

$$\text{پ) } 11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!}$$

$$\text{ت) } 8 = \frac{8!}{7!}$$

$$\text{ث) } n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\text{ج) } n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 0! - \cancel{3!} + \cancel{3!} \times 2! = 1 - 6 + \cancel{6} \times 2 = 7$$

$$\text{ب) } \frac{12!}{9!3!} = \frac{\cancel{12} \times \cancel{11} \times 10 \times \cancel{9!}}{9! \times 3 \times 2 \times 1} = 220$$

$$\text{پ) } \frac{5!}{4! - (3!)^2} = \frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1)^2} = \frac{120}{24 - 6^2} = \frac{120}{24 - 36} = -10$$

فعالیت ۱ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می توان نوشت؛ یعنی

تعداد جایگشت های هفت شیء متمایز برابر است با $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

فعالیت ۲ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

حال با توجه به اصل ضرب می خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا

می توان نوشت، به دست آوریم. $7 \times 6 \times 5 = 210$

در واقع آنچه به دست آمد، تعداد راه های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت های سه تایی از هفت شیء متمایز است.

فعالیت ۳ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

تعداد جایگشت های چهارتایی از نه شیء متمایز را به دست آورید. $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

فعالیت ۴ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

$$\frac{9!}{5!} = \frac{9!}{(9-4)!}$$

فعالیت ۵ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

تعداد جایگشت های سه تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

$$n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

فعالیت ۶ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

جایگشت های k تایی از بین n شیء متمایز

تعداد جایگشت های k تایی از بین n شیء متمایز، (که در آنها جابجایی یا ترتیب قرار گرفتن k شیء مهم باشد) را معمولاً با نماد $P(n, k)$ نشان می دهند و برابر است با

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad n \geq k \quad \text{همواره}$$

به عنوان مثال :

تعداد جایگشت های ۳ حرفی از حروف کلمه شیراز برابر با $60 = \frac{5!}{(5-3)!} = P(5, 3)$ است.

در واقع باید سه حرف را از بین ۵ حرف کلمه شیراز انتخاب کنیم طوری که جابه جایی آنها پس از انتخاب، کلمه جدیدی می سازد و اهمیت دارد.

تمرین تکمیلی

سوال ۲: به چند طریق می توان از بین ۶ دانش آموز ۳ نفر را به عنوان نفرات اول تا سوم انتخاب کرد؟

جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

$$\text{جایگشت ۳ شی از ۶ شی متمایز} \rightarrow P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

تمرین تکمیلی

سوال ۳: از بین ۷ نفر که برای استخدام آمده اند به چند طریق می توان سه نفر را برای پست های مدیریت، معاونت و کارشناس استخدام کرد اگر شانس انتخاب هر ۷ نفر مساوی بوده و هر نفر حداکثر در یک پست بتواند انتخاب شوند؟

جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

$$\text{جایگشت ۳ شی از ۷ شی متمایز} \longrightarrow P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

مثال صفحه ۳۰ کتاب درسی

با حروف کلمه « جهانگردی » بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به « ی » ختم می شود؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف « ی » و « د » کنار هم قرار داشته باشند؟

← جایگشت ۸ شی متمایز →

الف)

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا
------	------	------	------	------	------	------	------

 = ۸!

فقط « ی » ← جایگشت ۷ شی باقیمانده →

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۱ تا
------	------	------	------	------	------	------	------

 = ۷!

ب) حروف « ی » و « د » را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۶ حرف دیگر، ۷ شی متمایز را به وجود

می آورند، پس جایگشت آنها برابر ۷! خواهد بود.

حروف « ی » و « د » نیز به ۲! می توان در کنار هم چاپه چاپ شوند.

پس داریم: $۲! \times ۷! = ۲ \times ۵۰۴۰ = ۱۰۰۸۰$

مثال صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

با حروف کلمه « جهانگردی » بدون تکرار حروف:

(پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به « گردی » ختم می شوند؟

(ت) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « جهان » چهار حرف اول باشند؟

(پ)

تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵	تا ۴	تا ۳
------	------	------	------	------	------

$$= 20160 \quad \text{روشی دیگر} \quad P(8, 6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = 20160$$

تا ۱	تا ۱	تا ۱	تا ۱	تا ۴	تا ۳
------	------	------	------	------	------

فقط ی فقط د فقط ر فقط گ «ج» یا «ه» یا «ا» یا «ن»
 به غیر از یکی از آنها
 «ج» یا «ه» یا «ا» یا «ن»

$$= 12$$

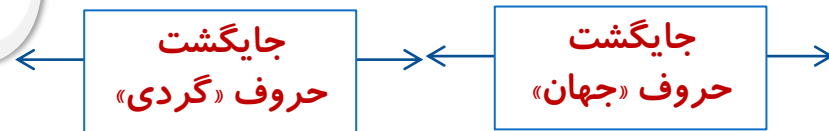
روشی دیگر

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

(ت)

تا ۴	تا ۳	تا ۲	تا ۱	تا ۴	تا ۳	تا ۲	تا ۱
------	------	------	------	------	------	------	------

$$= 4! \times 4!$$



مثال صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

با حروف کلمه « جهانگردی » بدون تکرار حروف:

ث) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « جهان » کنار هم بیایند؟

ج) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حروف کلمه جهان را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۴ حرف دیگر، ۵ شی متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر! ۵ خواهد بود.

حروف کلمه جهان نیز به ۴ می توان در کنار هم چاپه چاپ شوند.

$$\text{پس داریم: } ۲۸۸۰ = ۲۴ \times ۱۲۰ = ۴! \times ۵!$$

یکی از حروف

«ج» یا «ن» یا «ی»

← جایگشت ۷ شی باقیمانده →

۳ تا	۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا
------	------	------	------	------	------	------	------

$$= ۷! \times ۳ = ۱۵۱۲۰$$

دقت شود حرف «ی» در ابتدای کلمه؛ نقطه دار است.

کار در کلاس ۱ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

$$\text{چاپگشت ۴ شی از ۶ شی متمایز} \rightarrow P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$$

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

$$\text{چاپگشت ۳ شی از ۴ شی متمایز} \rightarrow P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

تمرین تکمیلی

سوال ۴: به چند طریق می توان ۵ مرد و ۳ زن را در یک صف قرار داد به طوری که

(الف) هر ۵ مرد در کنار هم قرار بگیرد؟

(ب) هر ۳ زن در صف پشت سر هم قرار بگیرد؟

(الف) ۵ مرد را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۳ زن، ۶ شی متمايز را به وجود می آورند،

پس جایگشت آنها برابر $۶!$ خواهد بود.

۵ مرد نیز به ۵ می توان در کنار هم چاپه جا شوند.

$$\text{پس داریم: } ۲۸۸۰ = ۲۴ \times ۱۲۰ = ۴! \times ۵!$$

(ب) ۳ زن را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۵ مرد، ۶ شی متمايز را به وجود می آورند،

پس جایگشت آنها برابر $۶!$ خواهد بود.

۳ زن نیز به ۳ می توان در کنار هم چاپه جا شوند.

$$\text{پس داریم: } ۴۳۲۰ = ۶ \times ۷۲۰ = ۳! \times ۶!$$

تمرین تکمیلی

سوال ۵: نشان دهید تعداد جایگشت های ۵ حرفی از حروف کلمه « کامپیوتر » که با یک حرف بی نقطه شروع شود برابر با ${}^5P(7,4)$ خواهد بود.

یکی از حروف «ک»،

«ا»، «م»، «و»، «ر»

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline ۷\text{تا} & ۶\text{تا} & ۵\text{تا} & ۴\text{تا} & ۵\text{تا} \\ \hline \end{array} = ۵ \times (۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴) = ۵ \times \frac{۷!}{۳!} = {}^5P(7,4)$$

← جایگشت ۴ از ۷ →

سوال ۶: با حروف کلمه «تیزهوشان» بدون تکرار حرف چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که

الف) کلمه «تیز» در ابتدای کلمه باشد؟

ب) حروف کلمه «تیز» سه حرف ابتدایی آن باشند؟

پ) کلمه «تیز» در آن باشد؟

ت) حروف کلمه «تیز» در کنار هم بیایند؟

تمرین تکمیلی

الف)

۱تا	۲تا	۳تا	۴تا	۵تا	۱تا	۱تا	۱تا
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$= 5! = 120$

← جایگشت ۵ حرف باقی مانده →

↑ فقط «ت» ↑ فقط «ی» ↑ فقط «ز»

ب)

۱تا	۲تا	۳تا	۴تا	۵تا	۳تا	۲تا	۱تا
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$= 5! \times 3! = 720$

← جایگشت ۵ حرف باقی مانده →

→ جایگشت حروف «ت» یا «ی» یا «ز» ←

پ) جایگشت ۵ حرف (ه-و-ش-ا-ن) و کلمه «تیز» یعنی ۶ شی متمايز $= 6! = 720$

ت) جایگشت ۵ حرف (ه-و-ش-ا-ن) و کلمه «تیز» یعنی ۶ شی متمايز ضربدر جایگشت حروف «ت» یا «ی» یا «ز» $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

تمرین تکمیلی

سوال ۷: با حروف کلمه «صبحانه» چند کلمه ۴ حرفی بدون تکرار حرف می توان نوشت که در آنها

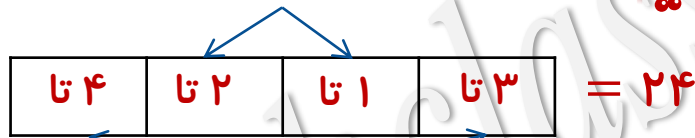
دو حرف «ص» و «ح» کنار هم باشند؟

جایگشت دو حرف
از چهار حرف دیگر

جایگشت «ص» یا «ح»



جایگشت «ص» یا «ح»



جایگشت دو حرف از
چهار حرف دیگر



جایگشت «ص» یا «ح»

جایگشت دو حرف از
چهار حرف دیگر

$\rightarrow 24 + 24 + 24 = 72$

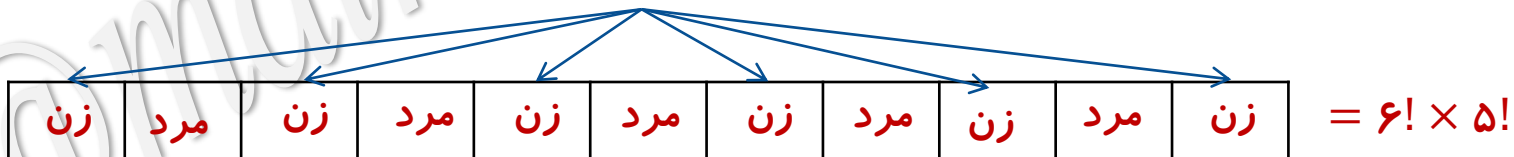
جایگشت یک در میان

اگر بخواهیم اعضای دو مجموعه با تعداد اعضای برابر را یکی در میان در کنار هم قرار دهیم، به اندازه دو برابر حاصل ضرب جایگشت اعضای هر کدام از آنها می توانیم این کار را انجام دهیم. و اگر تعداد اعضای دو مجموعه یک واحد اختلاف داشته باشند، به این منظور کافی است جایگشت اعضای هر کدام از مجموعه ها را در هم ضرب کنیم.

تمرین تکمیلی

سوال ۸: به چند طریق می توان ۶ زن و ۵ مرد را یکی در میان در یک صف کنار هم قرار داد؟

جایگشت ۶ زن



جایگشت ۵ مرد

تمرین تکمیلی

سوال ۹: ۴ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز فیزیک در اختیار داریم به چند طریق می توان این کتابها را در یک قفسه در کنار هم چید به طوری که هیچ دو کتاب متوالی متعلق به یک درس نباشد؟

ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	$= 4! \times 4!$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------------------

یا

فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	$= 4! \times 4!$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------------------

$$\rightarrow 2 \times 4! \times 4! = 1152$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰: ۴ دانش آموز و ۳ معلم را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد طوری که حداقل دو دانش آموز کنار هم باشند؟

ابتدا تعداد چایگشت هایی که در آنها هیچ دو دانش آموزی در کنار هم نیستند را به دست می آوریم.
(یک در میان دانش آموز و معلم)

$$۴! \times ۳! = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

پاسخ به دست آمده را از چایگشت های هر ۷ نفر کم می کنیم.

$$۷! - ۱۴۴ = ۵۰۴۰ - ۱۴۴ = ۴۸۹۶$$

تمرین ۱ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

$$P(18, 3) = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896$$

تمرین ۲ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

$$P(n, 3) = \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$$

$$\rightarrow n(n-1)(n-2) = 210$$

حاصل ضرب سه عدد متوالی برابر ۲۱۰ است، بزرگترین آنها همان n است. در نتیجه $n = 7$

تمرین ۳ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$۳! + ۳! = ۶! \quad \text{نادرست}$$

$$۶ \times ۵! = ۶! \quad \text{درست}$$

$$۴! \times ۲! = ۸! \quad \text{نادرست}$$

$$۲ \times ۳! = ۶! \quad \text{نادرست}$$

$$(۳!)^۲ = ۹! \quad \text{نادرست}$$

$$۴! = \frac{۸!}{۲!} \quad \text{نادرست}$$

تمرین ۴ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$P(20, 3) = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840.$$

$$2 \times P(20, 3) = 2 \times 6840 = 13680 \text{ ثانیه}$$

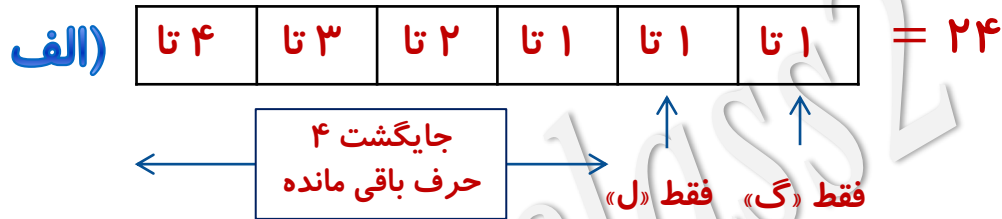
تمرین ۵ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

با حروف کلمه « گل پیرا » بدون تکرار حروف

(الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ **۶!** چند تا از آنها با « گل » شروع می شود؟

(ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

(پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف « ر » و « پ » در کنار هم آمده باشند؟



(ب) $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

(پ) دو حرف « ر » و « پ » را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۴ حرف دیگر، ۵ شیء متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر ۵! خواهد بود.

دو حرف « ر » و « پ » نیز به ۲! می توان در کنار هم چاپه شوند.

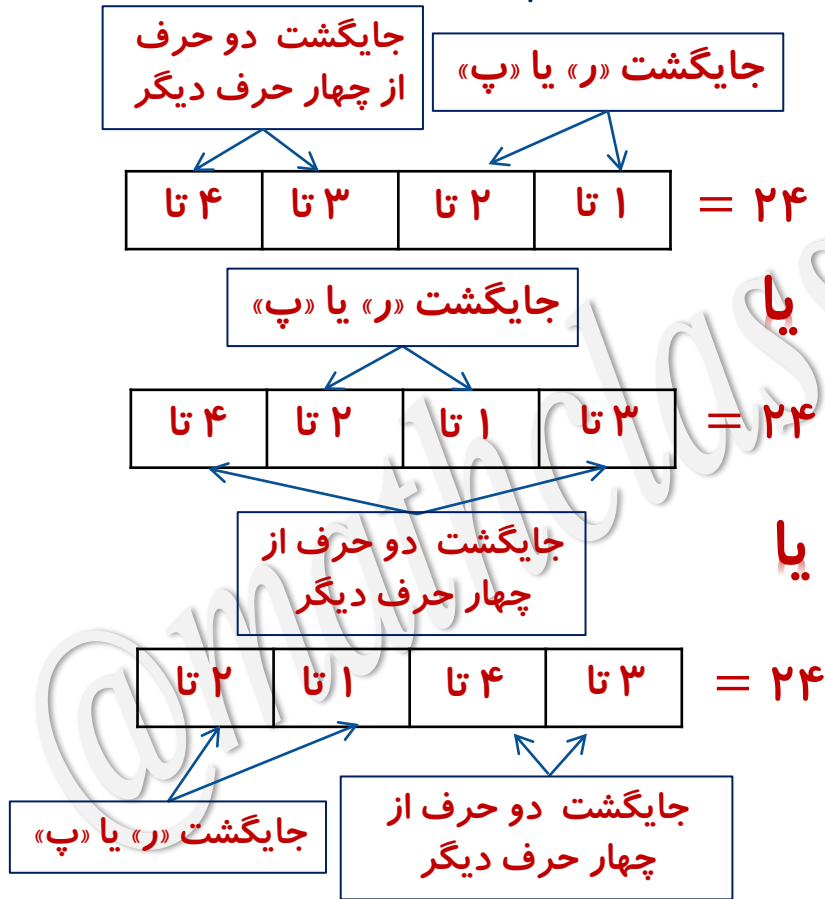
پس داریم: $5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$

تمرین ۵ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

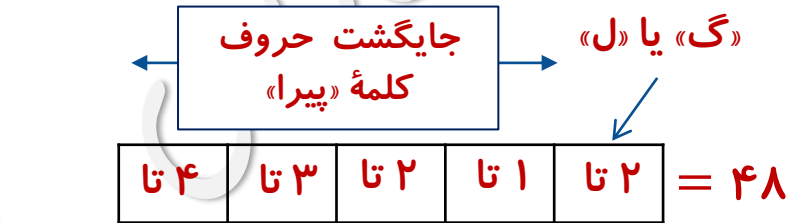
با حروف کلمه « گل پیرا » بدون تکرار حروف

(ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف « ر » و « پ » در کنار هم آمده باشند؟

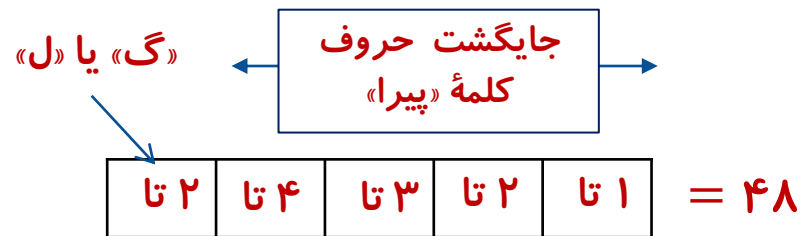
(ث) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « پیرا » کنار هم آمده باشند؟



(ت) $24 + 24 + 24 = 72$



یا



(ث) $48 + 48 = 96$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱: با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ بدون تکرار رقم

الف) چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

پ) چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت که ابتدا و انتهای آن ارقام زوج قرار داشته باشند؟

ت) چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت که عدد ۶۵۴ در آن باشد؟

← جایگشت ۷ شی متمایز →

الف)

۷ تا	۶ تا	۵ تا	۴ تا	۳ تا	۲ تا	۱ تا	= ۷!
------	------	------	------	------	------	------	------

← جایگشت ۴ شی از ۷ شی متمایز →

۷ تا	۶ تا	۵ تا	۴ تا
------	------	------	------

ب)

به بیانی دیگر → $P(7,4) = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

پ)

۲ تا	۵ تا	۴ تا	۳ تا	۲ تا	۱ تا	۳ تا	= ۵! × ۶ = ۷۲۰
------	------	------	------	------	------	------	----------------

۴ یا ۶ یا ۸ به جز یکی از آنها

۴ یا ۶ یا ۸

← جایگشت ۵ شی متمایز →

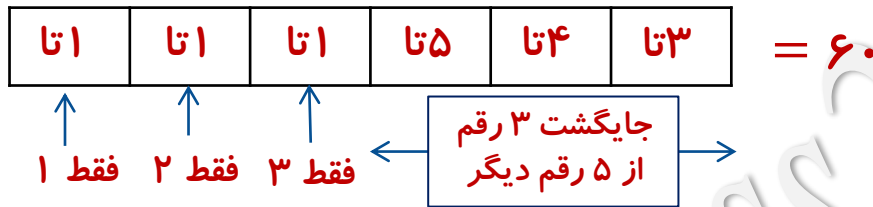
ت) ۶۵۴ را یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۴ رقم دیگر، ۵ شی متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر ۵! خواهد بود.

دقت کنید: ارقام ۶۵۴ در کنار هم چاپ نمی شوند.

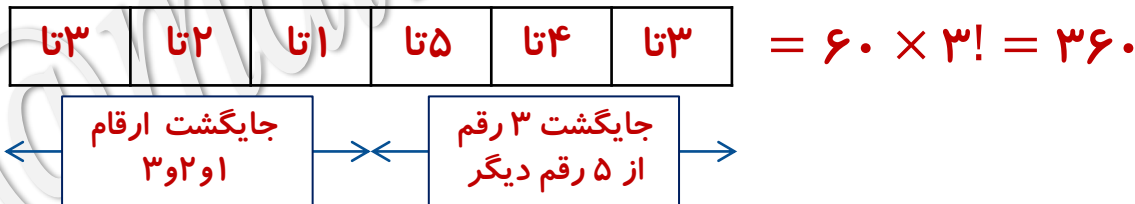
تمرین تکمیلی

سوال ۱۲: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ بدون تکرار رقم چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که

الف) عدد ۱۲۳ در ابتدای عدد باشد؟



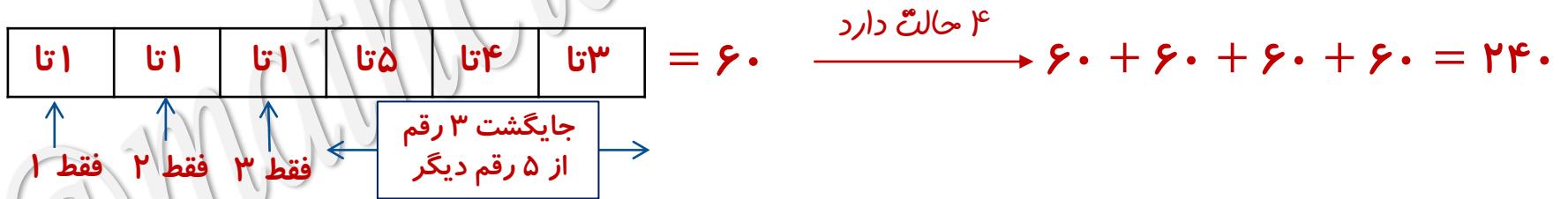
ب) ارقام ۱ و ۲ و ۳ سه رقم ابتدایی آن باشند؟



تمرین تکمیلی

سوال ۱۲: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ بدون تکرار رقم چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که (پ) عدد ۱۲۳ در آن باشد؟

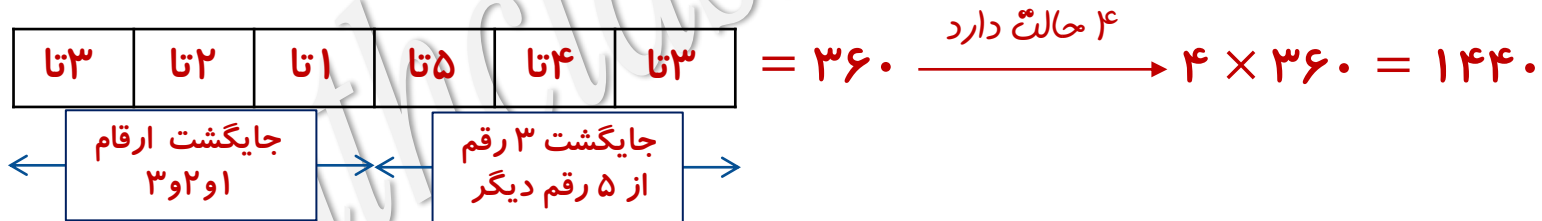
ابتدا برای عدد ۱۲۳ جایگاهی در نظر گرفته (مانند قسمت الف) و پاسخ را محاسبه می کنیم. سپس تعیین می کنیم که ۱۲۳ در چه قسمتهایی از عدد ۶ رقمی مورد نظر می تواند قرار بگیرد.



تمرین تکمیلی

سوال ۱۲: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ بدون تکرار رقم چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که (ت) ارقام ۱ و ۲ و ۳ در کنار هم بیایند؟

ابتدا برای عدد ۱۲۳ جایگاهی در نظر گرفته (مانند قسمت ب) و پاسخ را محاسبه می کنیم. سپس تعیین می کنیم که ارقام ۱۲۳ در چه قسمت‌هایی از عدد ۶ رقمی مورد نظر می تواند در کنار هم قرار بگیرد.



تمرین تکمیلی

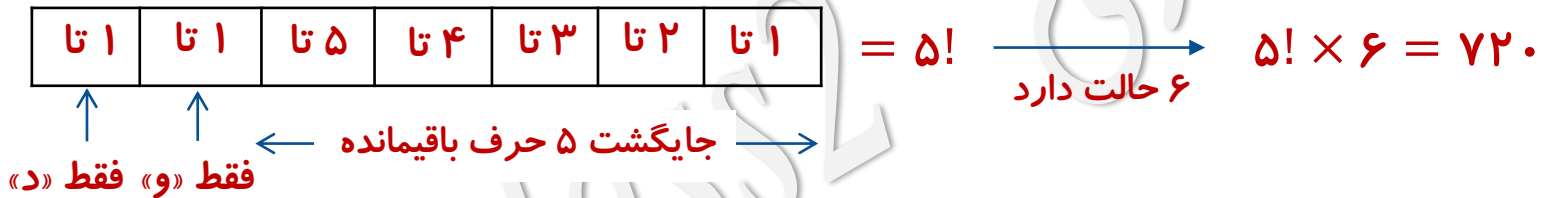
سوال ۱۳: در چند جایگشت ۷ حرفی از حروف کلمه ساندویچ (الف) حرف «د» بلافاصله بعد از حرف «و» می آید؟
 (ب) حرف «د» بعد از حرف «و» می آید؟

روش اول

الف

۷۲ = ۶! = جایگشت دسته (ود) و ۵ حرف باقیمانده یعنی ۶ شی متمايز

روش دوم



ب	یا	با ۵ حرف فاصله	یا	با ۴ حرف فاصله	یا	با ۳ حرف فاصله	یا	با ۲ حرف فاصله	یا	با ۱ حرف فاصله	یا	«د» بلافاصله بعد از «و»
		$(5! \times 1)$	+	$(5! \times 2)$	+	$(5! \times 3)$	+	$(5! \times 4)$	+	$(5! \times 5)$	+	$(5! \times 6)$
		۱۲۰		۲۴۰		۳۶۰		۴۸۰		۶۰۰		۷۲۰

برای درک بهتر اسلاید بعدی را ببینید.

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۲</td><td style="padding: 5px;">۳</td><td style="padding: 5px;">۴</td><td style="padding: 5px;">۵</td><td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۱	= ۵!	→	۶ حالت دارد	→	$۵! \times ۶ = ۷۲۰$
۱	۲	۳	۴	۵	۱	۱						
<p>↑ ↑ ← جایگشت ۵ حرف دیگر →</p> <p>فقط (و) فقط (د)</p>												
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۲</td><td style="padding: 5px;">۳</td><td style="padding: 5px;">۴</td><td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۵</td><td style="padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۱	۵	۱	= ۵!	→	۵ حالت دارد	→	$۵! \times ۵ = ۶۰۰$
۱	۲	۳	۴	۱	۵	۱						
<p>↑ ↑</p> <p>فقط (و) فقط (د)</p>												
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۲</td><td style="padding: 5px;">۳</td><td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۴</td><td style="padding: 5px;">۵</td><td style="padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۱	۲	۳	۱	۴	۵	۱	= ۵!	→	۴ حالت دارد	→	$۵! \times ۴ = ۴۸۰$
۱	۲	۳	۱	۴	۵	۱						
<p>↑ ↑</p> <p>فقط (و) فقط (د)</p>												
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۲</td><td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۳</td><td style="padding: 5px;">۴</td><td style="padding: 5px;">۵</td><td style="padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۱	۲	۱	۳	۴	۵	۱	= ۵!	→	۳ حالت دارد	→	$۵! \times ۳ = ۳۶۰$
۱	۲	۱	۳	۴	۵	۱						
<p>↑ ↑</p> <p>فقط (و) فقط (د)</p>												
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۲</td><td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۳</td><td style="padding: 5px;">۴</td><td style="padding: 5px;">۵</td><td style="padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۱	۲	۱	۳	۴	۵	۱	= ۵!	→	۲ حالت دارد	→	$۵! \times ۲ = ۲۴۰$
۱	۲	۱	۳	۴	۵	۱						
<p>↑ ↑</p> <p>فقط (و) فقط (د)</p>												
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۲</td><td style="padding: 5px;">۱</td><td style="padding: 5px;">۳</td><td style="padding: 5px;">۴</td><td style="padding: 5px;">۵</td><td style="padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۱	۲	۱	۳	۴	۵	۱	= ۵!	→	۱ حالت دارد	→	$۵! \times ۱ = ۱۲۰$
۱	۲	۱	۳	۴	۵	۱						
<p>↑ ↑</p> <p>فقط (و) فقط (د)</p>												

بیشتر بدانیم

سوال ۱۴: سه زن و ۵ مرد به چند طریق می توانند در کنار هم دور یک میز گرد بنشینند؟

جایگشت دوری

به روش قرار گرفتن n شی متمایز دور یک دایره جایگشت دوری می گویند.

تعداد جایگشت های دوری n شی متمایز برابر است با $(n - 1)!$.

$$n = ۸ \xrightarrow{(n - 1)!} ۷!$$

بیشتر بدانیم

اگر در میان n شی تعداد a تای آنها شبیه هم باشند (متمايز نباشند)، b تای ديگر نیز تکراری باشند و ... ،

$$\frac{n!}{a! \times b! \times \dots}$$

تعداد جایگشت اشیا برابر خواهد بود با

سوال ۱۵ : تعداد جایگشت های ارقام عدد ۲۵۳۰۰۰ را بیابید.

تعداد کل ارقام \rightarrow

تعداد صفرهای تکراری \rightarrow

$$\frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

سوال ۱۶ : تعداد جایگشت های حروف کلمه پرسپولیس را بدست آورید.

تعداد کل حروف \rightarrow

تعداد «پ» تکراری \rightarrow

تعداد «س» تکراری \rightarrow

$$\frac{8!}{2! \times 2!} = \frac{40320}{4} = 10080$$

سوال ۱۷: با حروف کلمه آپادانا چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که حروف «آ» یک در میان قرار بگیرند؟

تعداد حروف «ا» برابر ۴ و تعداد سایر حروف برابر ۳ است.

اگر حروف «ا» را به عنوان یک دسته و سایر حروف را دسته ای دیگر فرض کنیم. پس حاصل ضرب جایگشت هر دو دسته جواب سوال ماست.

$$\left(\frac{4!}{4!}\right) \times 3! = 1 \times 3! = 6$$

جایگشت ۴ حرف «ا»

جایگشت حروف «پ»، «د»، «ن»

سوال ۱۸: با ارقام عدد ۳۲۳۲۲۵ چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که ارقام «۲» یک در میان باشند؟

تعداد ارقام «۲» برابر ۳ و تعداد سایر ارقام نیز برابر ۳ است.

اگر ارقام «۲» را به عنوان یک دسته و سایر ارقام را دسته ای دیگر فرض کنیم. پس دو برابر حاصل ضرب جایگشت هر دو دسته جواب سوال ماست.

$$2 \times \left(\frac{3!}{3!}\right) \times \left(\frac{3!}{2!}\right) = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

جایگشت سه رقم ۲

جایگشت ارقام «۵»، «۳»، «۳»

پایان درس دوم

