

در س چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

❖ مطالبی که باید به اونها مسلط بشی

✓ دنباله حسابی

✓ دنباله هندسی

❖ دنباله حسابی

به دنباله ای گفته می شه که هر جمله آن با افزودن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست بیاد. به این مقدار ثابت قدر نسبت می گیم و با حرف d نشون میدیم

❖ جمله عمومی

فرض کن a جمله اول و d قدر نسبت و a_n جمله عمومی یک دنباله حسابی باشه بگو خب! در این صورت داری:

$$* t_n = t_1 + (n - 1) \times d$$

👉 به جز این فرمول باز هم فرمول دیگه هم تو دنباله حسابی پیدا میشه؟ آیا؟

👉 بله تعداد زیادی فرمول میشه پیدا کرد که من اونها را برات تو یه جدول

میارم ولی سعی کن فرمول ها را بفهمی. بگو خب

1. قدر نسبت	• d
2. جمله اول	• a
3. جمله عمومی	• $a_n = a + (n - 1)d$
4. رابطه تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه	• $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$
5. تعداد جمله های دنباله حسابی با داشتن دو جمله	• $n = \frac{a_n - a}{d} + 1$
6. رابطه بین سه جمله متوالی a, b, c	• $2b = a + c$
7. درج n واسطه حسابی بین دو عدد a, b	• $n = \frac{b - a}{n + 1}$
8. جملات متساوی الفاصله $(m + n = p + q)$	• $a_m + a_n = a_p + a_q$
9. جملات متساوی الفاصله $(m + n = 2p)$	• $a_m + a_n = 2a_p$

👉 منظور از a دیگه چیه اینجا؟

چرا عصبانی میشی! توی بعضی کتاب ها جمله اول را با a نشون میدن. منظور همون t_1 یا a_1 میباشد.

۱. در یک دنباله حسابی قدر نسبت $\frac{-3}{4}$ و جمله بیست و پنجم برابر ۱۲ است. جمله اول را بیابید.

تمرین

۲. در یک دنباله حسابی جمله اول ۲- و قدر نسبت ۱۴ است. نخستین جمله ای که از ۵۰۰ بزرگ تر است را مشخص کنید.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۳. مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۲۱ است. این دنباله را مشخص کنید.

۴. در یک مثلث قائم الزاویه اندازه های ضلع ها دنباله حسابی اند اگر مساحت مثلث ۴۸ واحد سطح باشد اندازه هر یک از اضلاع را بیابید.

۵. در یک دنباله حسابی جمله هشتم پانزده برابر جمله اول است. نسبت بین جمله اول و قدر نسبت را به دست آورید.

۶. سه عدد تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر مجموع آنها برابر ۱۵ و حاصل ضرب آنها برابر ۱۰۵ باشد این سه عدد را بیابید.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۷. در دنباله حسابی و 200 و 204 و 208 جمله چندم برابر صفر است؟

۸. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول برابر ۲۷ و مجموع مربعات آنها برابر ۲۹۳ است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۹. بین دو عدد ۴ و ۳۶ سه واسطه حسابی درج کنید. (به عبارت دیگر بین این دو عدد سه عدد طوری قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.)

۱۰. در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است. مجموع سه جمله اول برابر $6\sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر برابر $60\sqrt{2}$ است. اگر داشته باشیم $a_{15} = \frac{3}{2}a_{10}$ این دنباله چند جمله دارد؟

۱۱. در یک دنباله حسابی داریم: $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 120$ و $a_{13} + a_{18} = 18$ است. جمله ۳۰ام دنباله را بیابید.

۱۲. فرض کنید r^2 و q^2 و p^2 سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد $\frac{1}{p+q}$ و $\frac{1}{r+p}$ و $\frac{1}{q+r}$ نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

۱۳. در دنباله حسابی و -152 و -161 و -170 چند جمله منفی وجود دارد؟

۱۴. مجموعه A شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدر نسبت ۴ است و مجموعه B شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله ۵ و قدر نسبت ۶ است. مطلوب است با $n(A \cup B)$.

۱۵. در یک دنباله حسابی $2a_1 + a_2 - 3a_4 = 10$ قدر نسبت این دنباله چقدر است؟ (آزاد ۹۰ تجربی)

$$\text{➤ } \left(1\right) \frac{5}{4} \quad \left(2\right) \frac{-5}{4} \quad \left(3\right) 2 \quad \left(4\right) -2$$

✍

۱۶. دنباله حسابی $100, 96, 92, \dots, -20$ چند جمله دارد؟

- a) ۲۹
- b) ۳۰
- c) ۳۱
- d) ۳۲

❖ بیشتر بدانیم

★ مجموع جملات دنباله حسابی

• $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	1. مجموع n جمله اول با داشتن جمله اول و آخر
• $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$	2. مجموع n جمله اول با داشتن جمله اول و قدر نسبت
• $S_n = na_k$	3. اگر a_k جمله وسط در n جمله اول باشد
• $S_n = An^2 + Bn$	4. صورت کلی مجموع n جمله اول

☞ به چند مجموع مهم توجه کنید .

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- c) $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$

۱۷. اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد. جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۱)

➤ ۴۱۵(۱) ۴۱۹(۲) ۴۲۱(۳) ۴۲۳(۴)

✍

۱۸. اعداد طبیعی فرد را به گونه ای دسته بندی می کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره آن دسته باشد. مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی ام کدام است؟ (تجربی ۹۴)

- a) ۱۷۰۰
- b) ۱۷۵۰
- c) ۱۸۰۰

شما می توانید با عضویت در کانال ، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

d) ۱۸۵۰

۱۹. مجموع n جمله اول یک دنباله عددی از رابطه $S_n = n^2 + 2n$ به دست می آید. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چقدر است

- a) ۷۲
- b) ۵۱
- c) ۳۶
- d) ۷۶

۲۰. در یک دنباله عددی جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

➤ ۹۰(۱) ۱۰۵(۲) ۱۲۰(۳) ۱۳۵(۴)

✍

۲۱. در یک دنباله عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد. جمله دهم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

➤ ۳۲(۱) ۳۴(۲) ۳۶(۳) ۳۸(۴)

۲۲. مجموع n جمله اول از یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۰)

➤ ۹(۱) $\frac{29}{3}$ (۲) $\frac{49}{3}$ (۳) ۱۸(۴)

✍

❖ دنباله هندسی

به دنباله ای می‌گیم که هر جمله آن با ضرب مقداری ثابت در جمله قبلی به دست بیاد. به این مقدار ثابت قدر نسبت می‌گیم و با حرف r نشون میدیم.

👉 توجه کن: در بعضی کتاب‌ها قدر نسبت را با حرف q نشون میدیم.

👉 آیا میتونیم بگیم اگه جمله اول و قدر نسبت را داشته باشیم دنباله مشخص میشه؟

👉 افرین. بله درسته.. با داشتن جمله اول و قدر نسبت همیشه همه جمله‌ها را به دست میاد. به عبارت دیگه اگه بهت گفتن که دنباله را مشخص کن یعنی جمله اول و قدر نسبت را مشخص کن. بگو خب!

1. قدر نسبت	• q
2. جمله اول	• a
3. جمله عمومی	• $a_n = a \times q^{n-1}$
4. رابطه تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه	• $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$
5. رابطه بین سه جمله متوالی a, b, c	• $b^2 = a \times c$
6. درج n واسطه هندسی بین دو عدد a, b	• $q^{n+1} = \frac{b}{a}$
7. قانون اندیس‌ها $(m + n = p + q)$	• $a_m \times a_n = a_p \times a_q$

تمرین

۱. در دنباله هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ جمله دهم دنباله را بنویسید.

۲. جمله دوم یک دنباله هندسی ۶- و جمله پنجم آن ۴۸ است جمله هفتم دنباله را بیابید .

۳. در یک دنباله هندسی جمله هفتم ۸ برابر جمله چهارم است . اگر جمله سوم ۱۲ باشد این دنباله را مشخص کنید .

۴. جمله عمومی یک دنباله هندسی $\frac{1}{2^{n-3}}$ است ، این دنباله را مشخص کنید .

۵. در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم ۲۰ و نسبت جمله پنجم به جمله دوم ۲۷ است . دنباله را مشخص کنید .

شما می توانید با عضویت در کانال ، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۶. در دنباله ... و $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ جمله چندم برابر $\frac{1}{128}$ است؟

۷. در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۰ و قدر نسبت ۱۵ است نخستین جمله ای که از ۱۰۰۰۰ بزرگ تر است را بیابید.

۸. در یک دنباله هندسی جمله یازدهم ۲۷ برابر جمله هشتم است. اگر جمله پنجم ۵۶۷- باشد قدر نسبت و جمله اول را حساب کنید.

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۹. مقدار p را چنان بیابید که $p - 2$ و $p + 4$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

۱۰. مقدار k را چنان بیابید که $k-2, k+1, k+2$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

۱۱. سه عدد $5 + a$ و $4a + 2$ و $10a - 4$ تشکیل دنباله هندسی می دهند. مقدار a را بیابید.

۱۲. سه عدد $81^{\frac{15}{4}}$ و 3^{b^2} و 3^b تشکیل دنباله هندسی می دهند. مقدار b را بیابید.

۱۳. پنج واسطه هندسی بین اعداد ۱ و ۶۴ درج کنید .

۱۴. جمعیت روستایی ۱۰۰۰ نفر است . اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه $\frac{1}{10}$ جمعیت سال قبل شود پس از ۴ سال چند نفر در این روستا زندگی می کنند ؟

۱۵. چه عددی به اعداد ۱ و ۷ و ۲۲ می توان اضافه کرد تا عدد های حاصل دنباله هندسی تشکیل دهند .

۱۶. توپی را از ارتفاع ۸ متری رها می کنیم اگر این توپ پس از هر بار زمین خوردن $\frac{1}{2}$ بار قبلی به بالا بیاید .

الف) دنباله حاصل از پایین آمدن این توپ را بنویسید .

شما می توانید با عضویت در کانال ، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

ب) این توپ در مرحله دهم چقدر پایین می آید .

۱۷. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم . یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی صعودی اند . قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (سراسری ریاضی خازج کشور ۹۰)

$$\frac{3}{2}(۴) \quad ۲(۳) \quad \frac{5}{4}(۲) \quad \frac{6}{5}(۱) \quad \triangleright$$



۱۸. در یک دنباله عددی جملات سوم و هفتم و نهم می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند چندین جمله این دنباله

صفر است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

$$۱۲(۴) \quad ۱۱(۳) \quad ۱۰(۲) \quad ۱۹۹ \quad \triangleright$$



۱۹. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ است . تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

$$۷(۴) \quad ۶(۳) \quad ۵(۲) \quad ۴(۱) \quad \triangleright$$



شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۲۰. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\left\{ \frac{5}{3}(1) \quad \frac{7}{4}(2) \quad \frac{9}{4}(3) \quad \frac{7}{3}(4) \right\} \triangleright$$

بیشتر بدانیم

★ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

$$\diamond S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

☞ اگر $|q| < 1$ آنگاه حد مجموع جملات از رابطه $S = \frac{a}{1-q}$ به دست می آید.

$$\diamond \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

۲۱. در یک دنباله هندسی نزولی مجموع مجذورات تمام جملات برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (تجربی ۹۵ خارج)

- a) 0/2
- b) 0/25
- c) 0/3
- d) 0/4

۲۲. در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله آن نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدر نسبت آن کدام است؟ (تجربی ۹۵ داخل)

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) $\frac{3}{4}$

۲۳. به ازای یک مقدار x اعداد $x^2 - 2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

$$\frac{127}{8}(۴) \quad \frac{63}{4}(۳) \quad \frac{125}{16}(۲) \quad \frac{117}{16}(۱) \quad \triangleright$$

۲۴. در دنباله هندسی ... و ۴ و ۲ و ۱ مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

$$۱۲۹(۴) \quad ۱۲۷(۳) \quad ۶۳(۲) \quad ۶۵(۱) \quad \triangleright$$

۲۵. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

$$۱۶(۴) \quad ۹(۳) \quad ۸(۲) \quad \frac{81}{16}(۱) \quad \triangleright$$

۲۶. در یک دنباله هندسی به صورت ... $4, a, 9, b, \dots$ مجموع شش جمله اول کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۹)

$$83\frac{1}{8}(۴) \quad 82\frac{3}{8}(۳) \quad 81\frac{7}{8}(۲) \quad 81\frac{3}{8}(۱) \quad \triangleright$$



شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد