

## ◀ درس اول : چند ضلعی‌ها و تقارن

همانطور که در سال‌های قبل آموختیم خط‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد.



\* **تعریف چندضلعی:** به هر خط شکسته بسته، با این شرط که ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند **چندضلعی** می‌گویند.

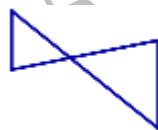
📖 مثال :



◀ **سوال ۱:** آیا شکل‌های زیر هر کدام یک چندضلعی هستند؟ چرا؟



(الف)



(ب)



(ج)

پاسخ : خیر

شکل «الف» چندضلعی نیست. زیرا خط شکسته بسته نیست.

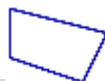
شکل «ب» چندضلعی نیست. زیرا ضلع‌ها در جایی غیر از رأس‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

شکل «ج» چندضلعی نیست. زیرا خط شکسته نیست.

➡ **چندضلعی‌ها:**

۱- چند ضلعی محدب (کوژ): چندضلعی که تمام زاویه‌هایش، هر کدام کمتر از  $180^\circ$  باشد چندضلعی محدب یا کوژ

نام دارد. 📖 مثال :



۲- چندضلعی مقعر (کاو): چندضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از  $180^\circ$  داشته باشد چندضلعی مقعر یا کاو نام

دارد.

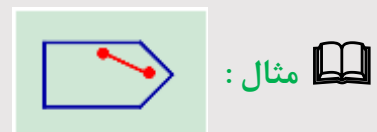


مثال :

نکته ۱: در چندضلعی‌های محدب هر دو نقطه دلخواه را بهم وصل کنیم تمام خط ایجاد شده در درون شکل



قرار می‌گیرد.



مثال :

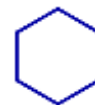
اما در چندضلعی‌های مقعر حداقل دو نقطه وجود دارد که اگر بهم وصل کنیم تمام خط و یا قسمتی از آن در درون شکل قرار نمی‌گیرد.



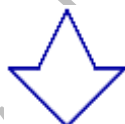
مثال :

سوال ۲: یک شش‌ضلعی محدب و یک شش‌ضلعی مقعر رسم کنید.

پاسخ:



شش‌ضلعی محدب



شش‌ضلعی مقعر

۳- چندضلعی‌های منتظم:

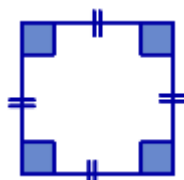
اگر در یک چندضلعی همه زاویه‌ها با هم و همه ضلعها نیز با هم مساوی باشند چندضلعی منتظم است.

مثال :



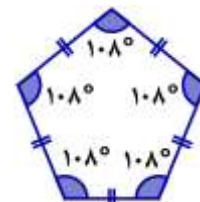
سه‌ضلعی منتظم

(مثلث متساوی‌الاضلاع)



چهارضلعی منتظم

(مربع)



پنج‌ضلعی منتظم

سوال ۳: کدام گزینه یک شکل منتظم است؟

- الف) لوزی  ب) مثلث متساوی الساقین  ج) مستطیل  د) مثلث متساوی الاضلاع

پاسخ: گزینه «د»

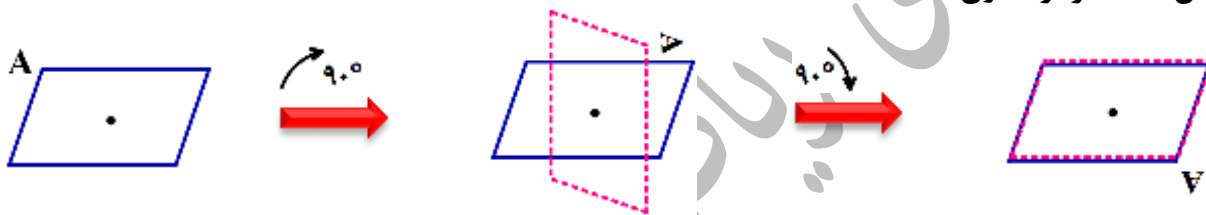
نکته ۲: در چندضلعی‌های منتظم هر چه تعداد ضلعها بیشتر شود اندازه زاویه‌ها بزرگتر می‌شود.

نکته ۳: در چندضلعی‌های منتظم هر چه تعداد ضلعها بیشتر شود شکل بیشتر به دایره شبیه می‌شود.

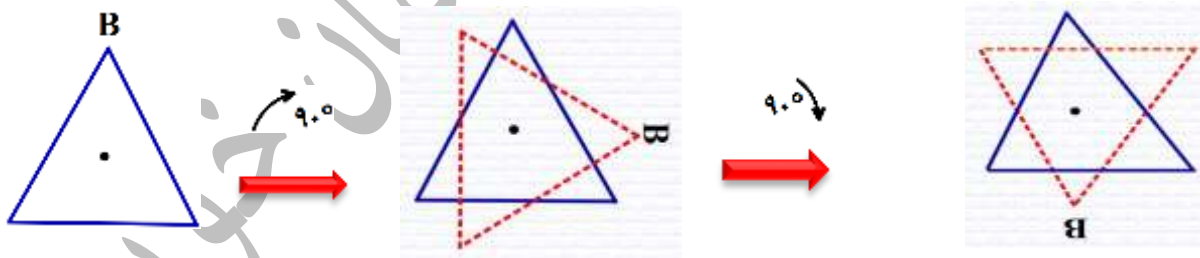
### تقارن:

**مرکز تقارن:** اگر شکلی را حول نقطه‌ای که درون خود شکل قرار دارد،  $180^\circ$  دوران دهید و نتیجه دوران روی خودش منطبق شود، آن نقطه مرکز تقارن شکل است.

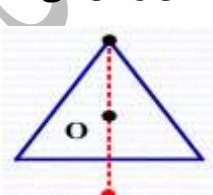
**مثال:** ملاحظه می‌کنید شکل بعد از دوران  $180^\circ$  حول نقطه مشخص شده دوباره بر خودش منطبق شده است. پس نقطه مشخص شده مرکز تقارن است.



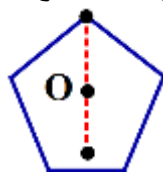
**مثال:** اما در شکل زیر ملاحظه می‌کنید شکل بعد از دوران  $180^\circ$  حول نقطه مشخص شده دوباره بر خودش منطبق نمی‌شود. پس نقطه مشخص شده مرکز تقارن نیست.



**روشی دیگر برای تعیین مرکز تقارن:** نقاطی را روی شکل تعیین کنید و قرینه آن نقاط را نسبت به مرکز مشخص شده بیابید. اگر نقطه‌ای وجود داشت که قرینه اش روی شکل قرار نگرفت، نتیجه بگیرید مرکز تقارن نیست. (یادآوری: برای بدست آوردن قرینه هر نقطه از شکل، ابتدا آنرا به نقطه مشخص شده درون شکل وصل می‌کنید و به اندازه خودش و در همان راستا امتداد می‌دهید)



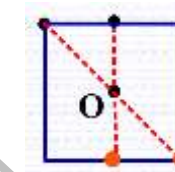
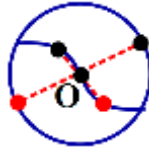
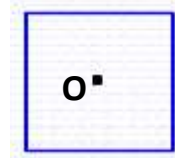
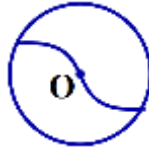
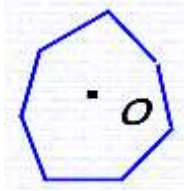
نقطه O مرکز تقارن نیست



نقطه O مرکز تقارن نیست

مثال:

سوال ۴: با استفاده از همین روش تعیین کنید در کدامیک از شکل‌های زیر نقطه O مرکز تقارن است.



پاسخ:

نقطه O مرکز تقارن نیست

نقطه O مرکز تقارن است

نقطه O مرکز تقارن است

نکته ۴: به طور کلی در چندضلعی‌های منتظم که تعداد ضلعها زوج باشد مرکز تقارن وجود دارد.



مثال: مربع و ده ضلعی منتظم

نکته ۵: به طور کلی در چندضلعی‌های منتظم که تعداد ضلعها فرد باشد مرکز تقارن وجود ندارد.

مثال: پنج ضلعی منتظم و هفت ضلعی منتظم

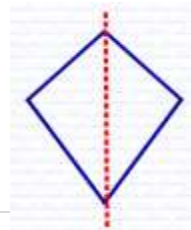
سوال ۵: کدامیک از شکل‌های زیر مرکز تقارن دارد؟

- الف) نیم‌دایره  ب) مثلث متساوی‌الاضلاع  ج) نه ضلعی منتظم  د) متوازی‌الاضلاع

پاسخ: گزینه «د»

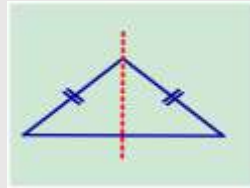
**محور تقارن:** خطی که شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند به طوری که اگر شکل را از روی آن خط تا بزنیم

دو قسمت بر هم منطبق می‌شوند، و هر قسمت همانند آینه‌ای است برای قسمت دیگر.



مثال:

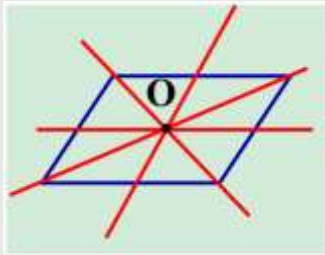
نکته ۶: ممکن است شکلی مرکز تقارن نداشته باشد ولی محور تقارن داشته باشد.



مثال: مثلث متساوی الساقین

نکته ۷: ممکن است شکلی مرکز تقارن داشته باشد ولی محور تقارن نداشته باشد.

مثال: متوازی الاضلاع



همانطور که در شکل می بینید نقطه O مرکز تقارن متوازی الاضلاع است.

اما هیچکدام از خطوط رسم شده محور تقارن نیستند. زیرا در صورت تا زدن

متوازی الاضلاع روی آن خطوط دو قسمت بر هم منطبق نمی شوند.

نکته ۸: چندضلعی های منتظم به تعداد ضلعهایشان محور تقارن دارند.

مثال: هفت ضلعی منتظم هفت محور تقارن دارد. (مرکز تقارن ندارد) و ده ضلعی منتظم ده محور تقارن دارد. (مرکز تقارن دارد)

سؤال ۶: نسبت تعداد محور تقارن یک هشت ضلعی منتظم به یک شش ضلعی منتظم برابر است با .....

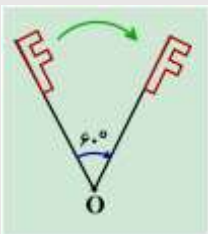
$$\frac{\text{تعداد محور تقارن هشت ضلعی}}{\text{تعداد محور تقارن شش ضلعی}} = \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

پاسخ:

**دوران:** اگر شکلی را روی صفحه حول یک نقطه ثابت (مرکز دوران) با زاویه ای مشخص بچرخانیم تصویر حاصل دوران یافته شکل می باشد.

نکته ۹: در دوران  $180^\circ$  و  $360^\circ$  نیاز به مشخص کردن جهت دوران نیست ولی اگر زاویه دوران  $180^\circ$  و  $360^\circ$

نباشد باید جهت دوران مشخص شود.



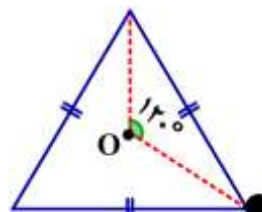
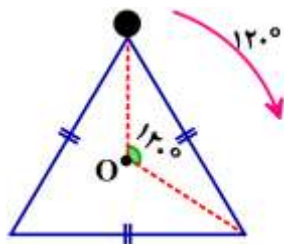
نکته ۱۰: در هر دوران تصویر بدست آمده (دوران یافته) هم اندازه و هم جهت با شکل است.

دوران  $60^\circ$  در جهت حرکت عقربه های ساعت

## تقارن چرخشی (دورانی) در چندضلعی‌های منتظم:

چندضلعی‌های منتظم را می‌توان با دورانی حداقل کمتر از  $180^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مرکز دوران بر خودش منطبق کرد.

**مثال:** اگر سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) را حول مرکز  $O$  با زاویه دوران  $120^\circ$  دوران دهیم بر خودش منطبق می‌شود.



نکته ۱۱: حداقل زاویه دوران در تقارن چرخشی چندضلعی‌های منتظم را می‌توان از دستور زیر بدست آورد.

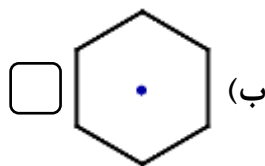
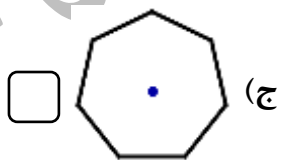
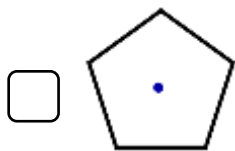
$$\hat{\alpha} = 360^\circ \div \text{تعداد ضلع} \quad (0 < \hat{\alpha} \leq 360)$$

سایر دورانها مضربهای  $\hat{\alpha}$  هستند.

**مثال:** سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) با چه دورانهایی حول نقطه  $O$  بر خودش منطبق می‌شود؟

$$\hat{\alpha} = 120^\circ \text{ و } 240^\circ \text{ و } 360^\circ \quad 360^\circ \div 3 = 120^\circ$$

**سؤال ۷:** در کدامیک از گزینه‌های زیر چندضلعی منتظم با دوران  $90^\circ$  حول نقطه مشخص شده در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بر خودش منطبق می‌شود؟

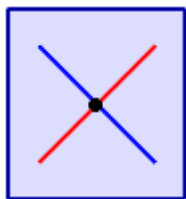


پاسخ: گزینه «الف»  $45 \times 2 = 90$  و  $360 \div 8 = 45$

هشت ضلعی منتظم با دورانهای  $360^\circ$  و  $315^\circ$  و  $270^\circ$  و  $225^\circ$  و  $180^\circ$  و  $135^\circ$  و  $90^\circ$  و  $45^\circ$  حول نقطه مشخص شده بر خودش منطبق می‌شود.

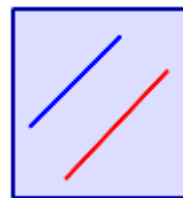
## ◀ درس دوم : توازی و تعامد

دو خط متمایز در صفحه نسبت به هم دو حالت دارند.



دو خط متقاطع اند

دو خط یک نقطهٔ مشترک دارند



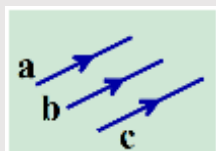
دو خط موازیند

دو خط هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند

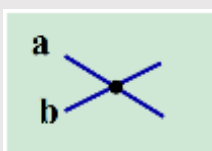
نکته ۱۲: برای اینکه خطوط موازی را نشان دهیم روی آنها علامتهای یکسان (>) یا (>>) یا (>>>) یا ...



قرار می‌دهیم و بین اسامی آنها از علامت (||) استفاده می‌کنیم.



$$a \parallel b \parallel c$$



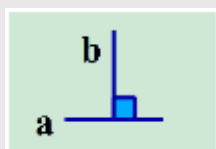
$$a \perp b$$

نکته ۱۳: اگر خطوط داده شده موازی نباشند و متقاطع باشند بین اسامی آنها از علامت (⊥) استفاده



می‌کنیم


نکته ۱۴: اگر خطوط متقاطع بر هم عمود باشند بین اسامی آنها از علامت (⊥) استفاده می‌کنیم.



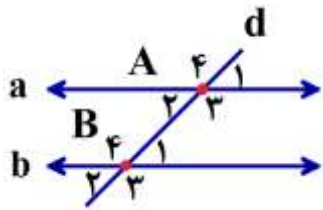
$$a \perp b$$

### \* دو خط موازی :


در دورهٔ ابتدایی آموختید که دو خط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند ممکن است این پرسش در ذهن شما بوجود بیاید که: برای تشخیص موازی بودن دو خط باید تا کجا آن دو را ادامه دهیم که مطمئن شویم موازی هستند؟ و اما در ادامه روشی را معرفی می‌کنیم که برای تشخیص موازی بودن دو خط مفید است.

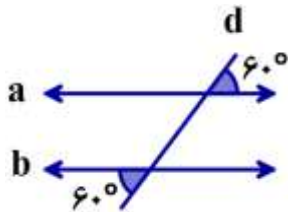
 **تعریف دیگری برای دو خط موازی:** هرگاه خطی مانند ( $d$ ) دو خط  $a$  و  $b$  را قطع کند و زاویه‌های مساوی

ایجاد کند نتیجه می‌گیریم دو خط  $a$  و  $b$  موازی هستند.



$$\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 & (\text{زاویه‌های تند مساویند}) \\ \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = \widehat{B}_3 = \widehat{B}_4 & (\text{زاویه‌های باز مساویند}) \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

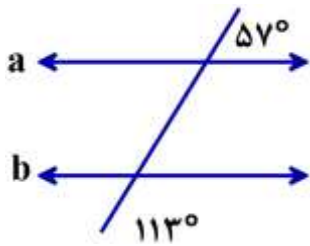
 **مثال:** در شکل مقابل خط  $d$  دو خط  $a$  و  $b$  را طوری قطع کرده که زاویه‌های



مساوی ایجاد کرده است پس دو خط  $a$  و  $b$  موازیند:

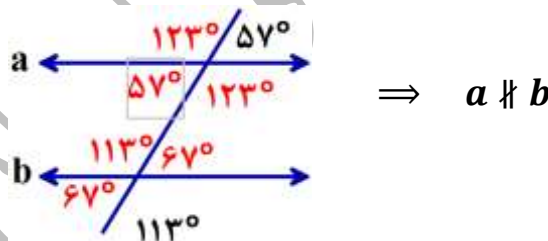
$$\begin{cases} \text{زاویه‌های تند} = 60^\circ \\ \text{زاویه‌های باز} = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

**سوال ۱:** با توجه به شکل مقابل آیا دو خط  $a$  و  $b$  موازیند؟

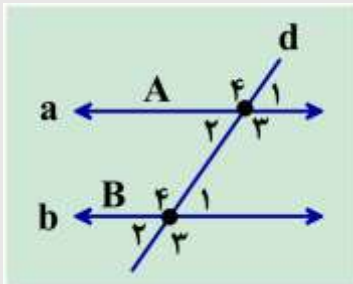


پاسخ: خیر - زیرا زاویه‌های تند با هم مساوی نیستند و زاویه‌های باز نیز با هم

مساوی نیستند.



نکته ۱۵: اگر خط مورّبی دو خط موازی را قطع کند با آنها زاویه‌های مساوی می‌سازد.

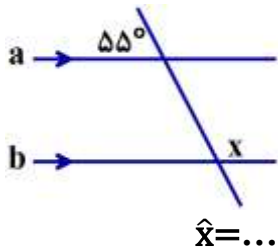


$$(a \parallel b \text{ و } d \text{ مورّب}) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 & (\text{زاویه‌های تند مساویند}) \\ \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = \widehat{B}_3 = \widehat{B}_4 & (\text{زاویه‌های باز مساویند}) \end{cases}$$

و هر زاویه باز با هر زاویه تند مکمل است.  $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_3 = 180^\circ$

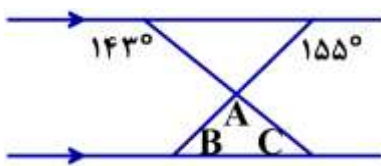


سؤال ۲: دو خط  $a$  و  $b$  در شکل مقابل موازیند. اندازه زاویه خواسته شده را بدست آورید.



پاسخ: زاویه  $\hat{x}$  زاویه‌ای باز است و مکمل  $55^\circ$  پس:  $\hat{x} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$   
 $\hat{x} = 125^\circ$   
 $\hat{x} = \dots$

سؤال ۳: با توجه به دو خط موازی اندازه زاویه‌های خواسته شده را بدست آورید.

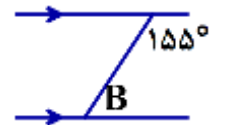


$\hat{A} = \dots$  و  $\hat{B} = \dots$  و  $\hat{C} = \dots$

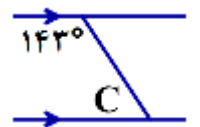
پاسخ:  $\hat{A} = 118^\circ$  و  $\hat{B} = 25^\circ$  و  $\hat{C} = 37^\circ$

اگر شکل را به دو قسمت زیر تقسیم کنیم:

در این قسمت  $\hat{B}$  مکمل زاویه  $155^\circ$  است:  $\hat{B} = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$



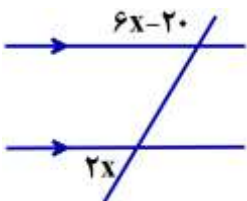
در این قسمت نیز  $\hat{C}$  مکمل زاویه  $143^\circ$  است.  $\hat{C} = 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ$



برای بدست آوردن  $\hat{A}$  با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است، داریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - (37^\circ + 25^\circ) = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

سؤال ۴: شکل مقابل با توجه به موازی بودن دو خط مقدار  $x$  را تعیین کنید.



پاسخ:  $x = 25$

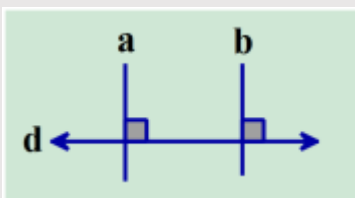
$2x$  اندازه زاویه تند و  $6x - 20$  اندازه باز است دو زاویه مکمل یکدیگر هستند یعنی:

$$6x - 20 + 2x = 180^\circ$$

سپس با کمک معادله مقدار  $x$  را تعیین می‌کنیم.

$$8x - 20 = 180^\circ \rightarrow 8x = 180 + 20 = 200 \rightarrow x = \frac{200}{8} = 25 \rightarrow x = 25$$

نکته ۱۶ (نکاتی در مورد خطوط موازی):



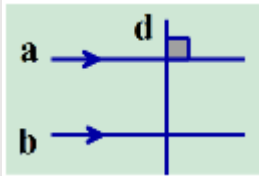
① دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند.  $\begin{cases} a \perp d \\ b \perp d \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

2 دو خط موازی با یک خط، با هم موازیند.



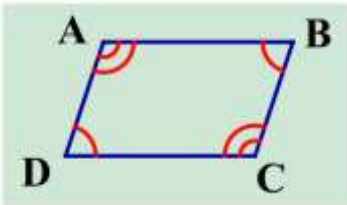
$$\begin{cases} a \parallel d \\ b \parallel d \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

3 اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود خواهد بود.



$$\begin{cases} d \perp a \\ a \parallel b \end{cases} \Rightarrow d \perp b$$

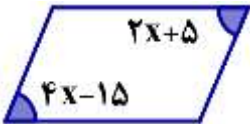
4 در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم موازیند با کمک روابط موجود بین خطوط موازی و مورب که در این درس آموختید، می‌توان نتیجه گرفت در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{C} & \hat{A} + \hat{B} &= 180^\circ & \hat{C} + \hat{D} &= 180^\circ \\ \hat{D} &= \hat{B} & \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ & \hat{D} + \hat{A} &= 180^\circ \end{aligned}$$

سوال 5: با توجه به اینکه شکل مقابل متوازی‌الاضلاع است، مقدار  $x$  را تعیین کنید.

پاسخ:  $x = 10$



در متوازی‌الاضلاع دو زاویه روبه‌رو با هم مساوی هستند.

به کمک حل معادله، مقدار  $x$  را تعیین می‌کنیم:

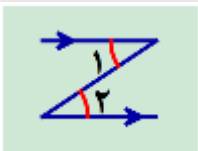
$$2x + 5 = 4x - 15 \rightarrow 2x - 4x = -15 - 5 \rightarrow -2x = -20 \rightarrow x = \frac{-20}{-2} = 10 \rightarrow x = 10$$

نکته 17: هر جا خطوط موازی را به صورت حرف «Z» و یا حرف «N» دیدیم و یا برعکس آنها، زاویه‌های

تند آنها با هم مساویند.



مثال:



$$\hat{1} = \hat{2}$$



$$\hat{3} = \hat{4}$$

سؤال ۶: اندازه زاویه  $x$  چند درجه است؟

- ۵۵° (۱)    
  ۳۰° (۲)    
  ۹۵° (۳)    
  ۸۵° (۴)

پاسخ: می توان با رسم خطی موازی دو خط شکل را به صورت مقابل تقسیم میکنیم،

جواب: گزینه ۴

$$\hat{x} = 55^\circ + 30^\circ = 85^\circ$$

درس سوم: چهارضلعی

متوازی الاضلاع:

متوازی الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌رو دو به دو موازی باشند.

با استفاده از کاغذ پوستی و دوران  $180^\circ$  حول مرکز تقارنش (نقطه O) مشاهده می‌کنید که اضلاع روبه‌رو، روی هم قرار

می‌گیرند (پس با هم برابرند) و زاویه‌های روبه‌رو نیز روی هم قرار می‌گیرند (پس با هم برابرند). با استفاده از دوران و

انطباق می‌توان ویژگی‌های متوازی الاضلاع را به صورت زیر نوشت:

۱- در هر متوازی الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با هم مساویند.  $AB = DC$  و  $AD = BC$

۲- در هر متوازی الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو با هم مساویند.  $\hat{A} = \hat{C}$  و  $\hat{B} = \hat{D}$

۳- در هر متوازی الاضلاع، زاویه‌های مجاور به یک ضلع مکملند.

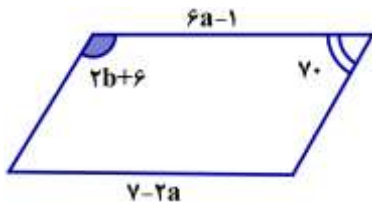
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \quad \text{و} \quad \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \text{و} \quad \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \quad \text{و} \quad \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$$

۴- در هر متوازی الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.  $AO = OC$  و  $OB = OD$

۵- در هر متوازی الاضلاع، محل برخورد قطرهای، مرکز تقارن متوازی الاضلاع است (نقطه O)

(یادآوری: متوازی الاضلاع، محور تقارن ندارد)

سؤال ۱: با توجه به متوازی الاضلاع مقابل مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



$$a = \dots$$

$$b = \dots$$

پاسخ:  $a = 1$  و  $b = 52$

می دانیم در متوازی الاضلاع، ضلع های روبه رو با هم برابرند. پس  $6a - 1 = 7 - 2a$  به کمک حل معادله مقدار

$$6a + 2a = 7 + 1 \rightarrow 8a = 8 \rightarrow a = \frac{8}{8} = 1 \rightarrow a = 1$$
 را تعیین می کنیم:

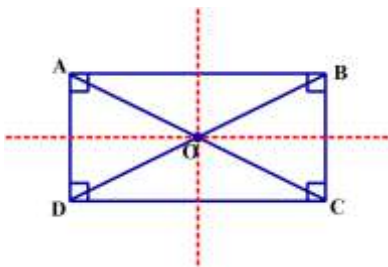
می دانیم در متوازی الاضلاع، زاویه های مجاور به یک ضلع مکملند. پس:  $2b + 6 + 70 = 180$  به کمک حل معادله مقدار  $b$  را تعیین می کنیم:

$$2b = 180 - 76 = 104 \rightarrow 2b = 104 \rightarrow b = \frac{104}{2} = 52 \rightarrow b = 52$$

مستطیل:

اگر در متوازی الاضلاع، زاویه ها قائمه ( $90^\circ$ ) باشند، مستطیل بوجود می آید. بنابراین مستطیل، متوازی الاضلاعی است

که زاویه های قائمه دارد.



اگر مستطیلی را روی یکی از خط های تقارنش و سپس روی خط تقارن دیگری تا کنید می توان ویژگی های مستطیل را به صورت زیر نوشت:

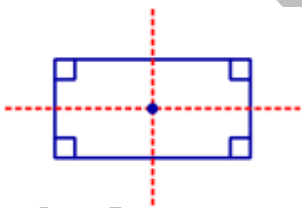
۱- در هر مستطیل، همه زاویه ها با هم برابرند.  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

۲- در هر مستطیل، ضلع های روبه رو با هم برابرند.  $AB = DC$  و  $AD = BC$

۳- در هر مستطیل، قطر ها با هم برابرند.  $AC = BD$

۴- در هر مستطیل، قطر ها یکدیگر را نصف می کنند.  $OA = OC = OB = OD$

(یادآوری: هر مستطیل دو محور تقارن دارد:

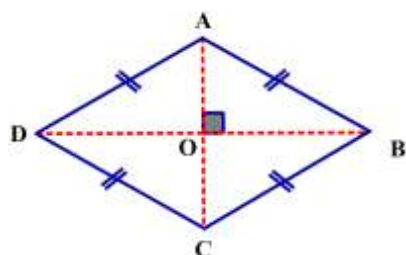


۱- خطی که از وسط طول ها می گذرد. ۲- خطی که از وسط عرض ها می گذرد)

\* تذکر: قطر ها در مستطیل محور تقارن نیستند.

\* تذکر: در مستطیل قطر ها بر هم عمود نیستند.

## ◀ لوزی:



اگر در متوازی‌الاضلاع، همه ضلع‌ها برابر باشند. لوزی به وجود می‌آید.

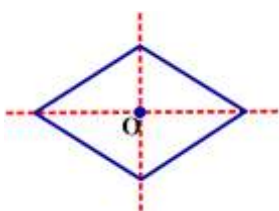
بنابراین لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که ضلع‌های برابر دارد.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

با توجه به اینکه لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است، علاوه بر همه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی دیگری نیز دارد.

«در هر لوزی قطر‌ها بر هم عمودند  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ »

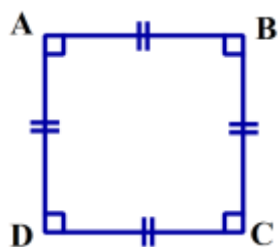
(یادآوری: در هر لوزی قطر‌ها محور تقارن هستند و محل برخورد قطر‌ها، مرکز تقارن (نقطه O) لوزی است.



## ◀ مربع:

اگر در متوازی‌الاضلاع، همه ضلع‌ها هم‌اندازه و هم‌زاویه‌ها قائمه باشند، مربع به وجود می‌آید. بنابراین مربع،

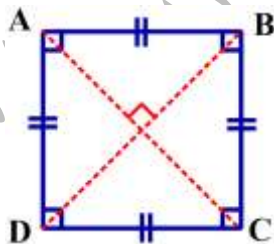
متوازی‌الاضلاعی است که هم ضلع‌های مساوی و هم زاویه‌های قائمه دارد.



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

در مربع تمام ویژگی‌های یک متوازی‌الاضلاع وجود دارد علاوه بر همه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، ویژگی‌های زیر را هم دارد:



۱- در هر مربع قطر‌ها با هم برابرند.  $AC = BD$

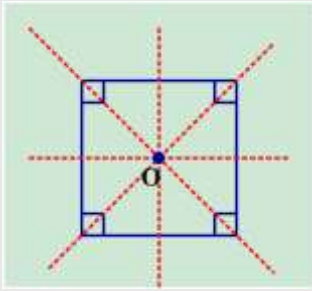
۲- در هر مربع قطر‌ها بر هم عمودند.  $AC \perp BD$

نکته ۱: هر مربع چهار محور تقارن دارد:

۱- دو قطر

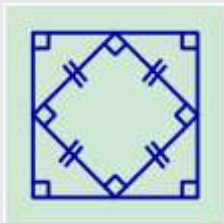
۲- خطوطی که از وسط هر دو ضلع روبه‌رو می‌گذرند.

محل برخورد خط‌های تقارن، مرکز تقارن (نقطه O) مربع است.

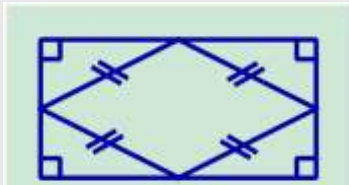


نکته ۲: هر مربع هم نوعی متوازی‌الاضلاع، هم نوعی لوزی و هم نوعی مستطیل است. زیرا ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، لوزی و مستطیل را دارد.

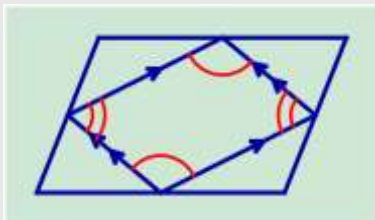
نکته ۳: اگر وسط‌های اضلاع یک مربع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده باز هم مربع خواهد بود. (با استفاده از خط‌های تقارن در مربع و تا زدن مربع روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)



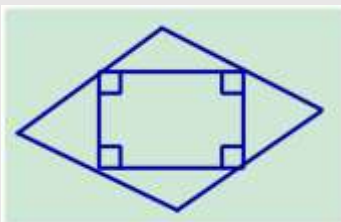
نکته ۴: اگر وسط‌های اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده یک لوزی خواهد بود. (با استفاده از خط‌های تقارن در مستطیل و تا زدن مستطیل روی این خطوط می‌توان به درستی این مطلب پی برد)



نکته ۵: اگر وسط‌های اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک متوازی‌الاضلاع خواهد بود.



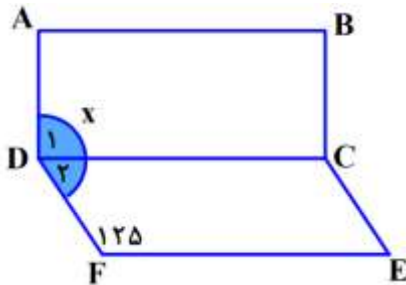
نکته ۶: اگر وسط‌های اضلاع یک لوزی را متوالیاً به هم وصل کنیم شکل بوجود آمده، یک مستطیل خواهد بود.



سؤال ۲: در شکل مقابل، ABCD مستطیل و DCEF متوازی الاضلاع است. مقدار زاویه  $\hat{x}$  چند درجه است؟

الف)  $155^\circ$

ب)  $145^\circ$



پاسخ: (ب)  $145^\circ$

$$\hat{x} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

$$\hat{D}_1 = 90^\circ \text{ و } \hat{D}_2 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

سؤال ۳: جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- الف) اگر وسطهای اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل ..... خواهد بود.  
 ب) در متوازی الاضلاع، محل برخورد قطرها، ..... شکل است.  
 ج) لوزی که دو قطر مساوی دارد، ..... نام دارد.  
 د) متوازی الاضلاعی که یک زاویه قائمه دارد ..... نام دارد.

پاسخ:

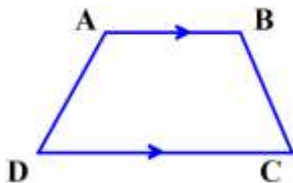
(د) مستطیل

(ج) مربع

(ب) مرکز تقارن

الف) لوزی

سؤال ۴: دوزنقه:



چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد، دوزنقه نام دارد. ( $AB \parallel DC$ )

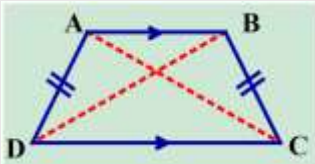
به دو ضلع موازی قاعده و به دو ضلع دیگر که با هم موازی نیستند ساق می گویند.

\* تذکر: در دوزنقه زاویه های روبه رو با هم مساوی نیستند و قطرها یکدیگر را نصف نمی کنند.

نکته ۷: در هر دوزنقه دو زاویه مجاور به هر ساق مکملند.  $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$  و  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

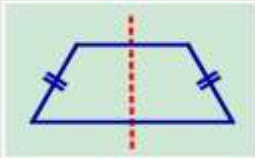
نکته ۸: اگر در دوزنقه دو ساق مساوی باشند، دوزنقه متساوی الساقین خواهد بود.

پس دو زاویه مجاور به هر قاعده با هم برابرند



$$\overline{AD} = \overline{BC} \text{ و } \hat{A} = \hat{B} \text{ و } \hat{D} = \hat{C}$$

و دو قطر نیز با هم برابرند.  $AC = BD$



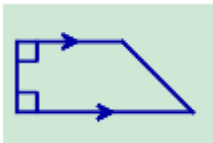
نکته ۴: دوزنقه متساوی الساقین یک خط تقارن دارد



نکته ۵: اگر در دوزنقه یکی از ساقها بر دو قاعده عمود باشد دوزنقه قائم‌الزاویه خواهد بود.

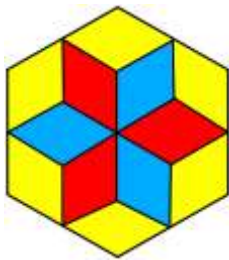


ساق قائم

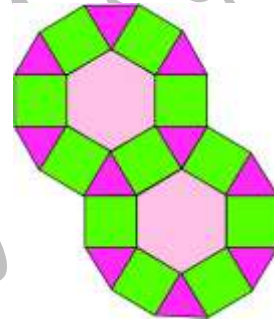


### درس چهارم: زاویه‌های داخلی

کاشی کاری: گاهی برای پوشاندن یک سطح از یک یا چند نوع کاشی استفاده می‌کنند به صورتی که کاشی‌ها روی هم قرار نگیرند و نیز بین آنها فضای خالی نباشد. مانند شکل‌های زیر:



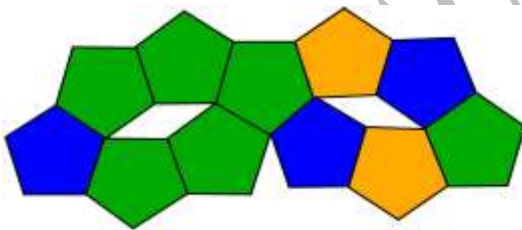
کاشی کاری با استفاده از یک نوع



کاشی کاری با استفاده از سه نوع کاشی

سؤال ۱: به شکل زیر توجه کنید. چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نمی‌شود؟

پاسخ:

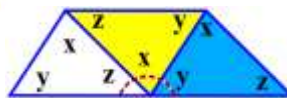
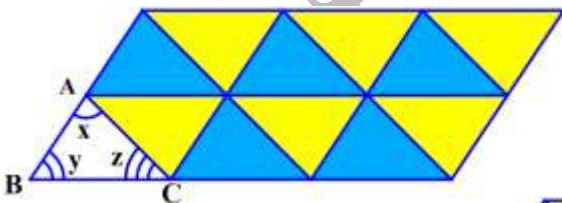


زیرا بین کاشی‌ها فضای خالی وجود دارد.

سطح زیر با مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.

مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است.

مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.



اگر سه مثلث هم‌نهشت را دوباره رسم کنیم،

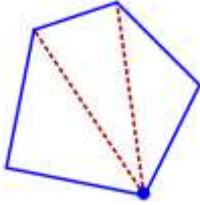
ملاحظه می‌کنید که سه زاویه «x, y, z» که زاویه‌های یک مثلث هستند در کنار هم تشکیل زاویه نیم صفحه را

می‌دهند پس: «مجموع زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰° است»  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$



## ◀ مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی:

منظور از زاویه‌های داخلی یک چندضلعی، زاویه‌هایی است که درون چندضلعی قرار دارد و ضلع‌های زاویه، ضلع‌های چندضلعی است. برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی با رسم تعدادی از قطرهای چندضلعی درون آن تعدادی مثلث ایجاد می‌کنیم و با توجه به اینکه: «مجموع زاویه‌های هر مثلث  $180^\circ$  است. مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی را به دست می‌آوریم.



$$3 \times 180 = 540$$

\* تذکر: دقت کنید قطرهایی رسم کنید که یکدیگر را قطع نکنند. (بجز در رأس) برای رسم قطرهای یک رأس را در نظر می‌گیریم و به رأسهای مقابل وصل می‌کنیم.

با دقت در مثال بالا متوجه می‌شوید که تعداد مثلث‌های ایجاد شده در هر چندضلعی ۲ تا از تعداد ضلع‌ها کمتر است.

$$\text{مثلاً مجموع زاویه‌های داخلی یک شش ضلعی برابر است با: } (6-2) \times 180^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

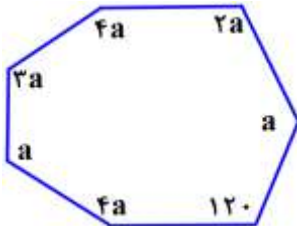
نکته ۱: برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:



$$180 \times (\text{تعداد ضلع‌ها} - 2) = 180 \times \text{تعداد مثلثها} = \text{مجموع زاویه‌های داخلی هر چندضلعی}$$

◀ سؤال ۲: در شکل مقابل مقدار  $a$  را بدست آورید.

$$\text{پاسخ: } a = 52$$



$$900 = 5 \times 180 = \text{مجموع زاویه‌های داخلی هفت ضلعی}$$

$$4a + a + 120 + 4a + a + 3a + 4a = 900$$

به کمک حل معادله مقدار  $a$  را بدست می‌آوریم.

$$15a + 120 = 900$$

$$15a = 900 - 120 = 780 \rightarrow a = \frac{780}{15} = 52 \rightarrow a = 52$$

◀ محاسبه اندازه هر زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم:

ابتدا مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی منتظم را بدست می‌آوریم و چون در شکل‌های منتظم زاویه‌ها با هم برابرند، مجموع زاویه‌های داخلی را بر تعداد زاویه‌ها تقسیم می‌کنیم تا اندازه هر زاویه بدست آید.

سؤال ۳: اندازه هر زاویه داخلی هشت ضلعی منتظم را بدست آورید.

پاسخ: ۱۳۵، مجموع زاویه‌های داخلی  $1080 = (8 - 2) \times 180$  ← اندازه هر زاویه  $1080 \div 8 = 135$

$$\frac{(n-2) \times 180}{n}$$

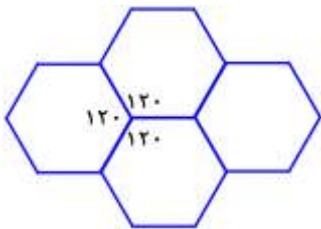
نکته ۲: اندازه هر زاویه داخلی  $n$  ضلعی منتظم برابر است با:



سؤال ۴: آیا با کاشی‌هایی به شکل شش ضلعی منتظم می‌توان به تنهایی کاشی‌کاری کرد؟ پاسخ: بله

در کاشی‌کاری با شش ضلعی منتظم به تنهایی، هیچ فضای خالی ایجاد نمی‌شود.

ابتدا اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم را محاسبه می‌کنیم. شش ضلعی‌های منتظم وقتی کنار هم قرار می‌گیرند در هر گوشه



$$\frac{(6-2) \times 180}{6} = \frac{4 \times 180}{6} = 120$$

سه تا زاویه  $120^\circ$  داریم که می‌شود  $3 \times 120^\circ = 360^\circ$

نکته ۳: اگر بخواهیم فقط با استفاده از یک نوع شکل منتظم کاشی‌کاری کنیم، اندازه هر زاویه داخلی آن باید

شمارنده  $360$  باشد. (به عبارتی  $360^\circ$  باید بر اندازه هر زاویه داخلی شکل منتظم بخش پذیر باشد)



سؤال ۵: آیا با کاشی‌هایی به شکل پنج ضلعی منتظم، می‌توان به تنهایی کاشی‌کاری کرد؟

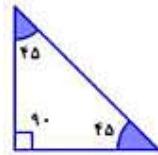
پاسخ: خیر

اندازه هر زاویه داخلی  $108 = \frac{3 \times 180}{5} = \frac{(5-2) \times 180}{5}$  (به عبارتی  $108$  بر  $360$  بخش پذیر نیست).

سؤال ۶: شکل روبه‌رو با یک نوع مثلث و یک نوع لوزی کاشی کاری شده است.



اندازه زاویه‌های مثلث و لوزی را محاسبه کنید.



و در مثلث



در لوزی:

پاسخ:

اگر به مرکز طرح کاشی کاری دقت کنید، ۸ تا زاویه تند لوزی‌ها که با هم مساویند

در کنار هم تشکیل زاویه ۳۶۰ درجه را می‌دهند.

اندازه زاویه تند در هر لوزی  $360 \div 8 = 45$

اندازه زاویه باز در هر لوزی  $135 = 180 - 45$  می‌باشد. سپس به گوشه‌ای دقت کنید که از دو زاویه باز لوزی و

$$2 \times 135 = 270$$

یک زاویه مثلث تشکیل شده است.

$$360 - 270 = 90$$

اندازه یکی از زاویه‌های مثلث

در مثلث قائم الزویه ایی که دو ساق برابر دارد اندازه هر زاویه تند برابرست با:  $90 \div 2 = 45$   $180 - 90 = 90$

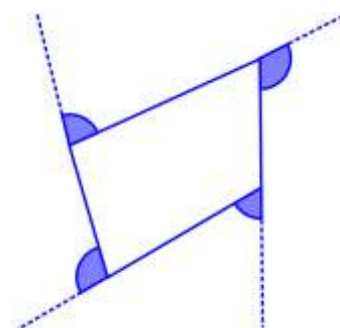
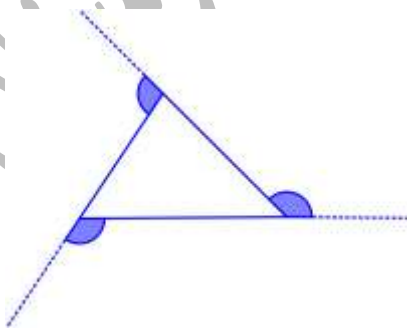
نکته ۴: برای محاسبه مجموع زاویه‌های داخلی در  $n$  ضلعی‌های مقعر (کاو) نیز از رابطه  $180^\circ \times (n - 2)$



استفاده می‌کنیم.

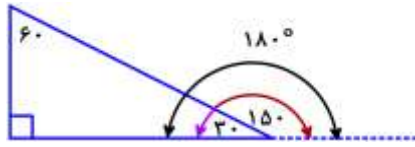
درس پنجم: زاویه‌های خارجی

در چندضلعی‌های محدب، زاویه‌ای که در هر رأس بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، زاویه خارجی آن رأس نامیده می‌شود.

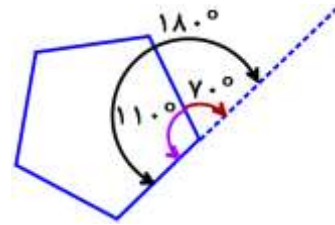


مثال:

نکته ۱: در چندضلعی‌های محدب مجموع هر زاویه داخلی با زاویه خارجی متناظرش برابر است با  $180^\circ$ .



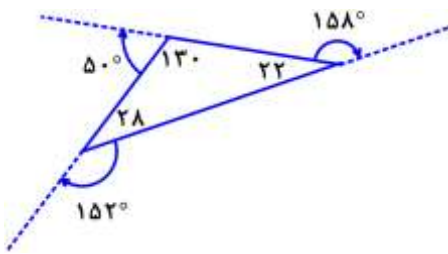
$$30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$$



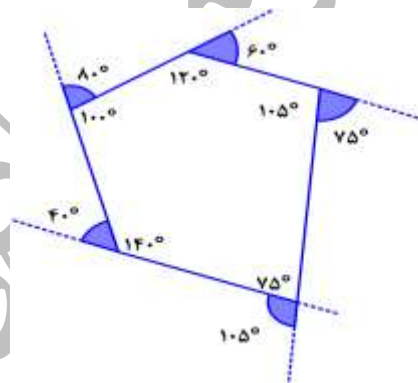
$$110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$$

مثال:

نکته ۲: در چندضلعی‌های محدب، مجموع زاویه‌های خارجی  $360^\circ$  است.



$$152^\circ + 158^\circ + 50^\circ = 360^\circ$$

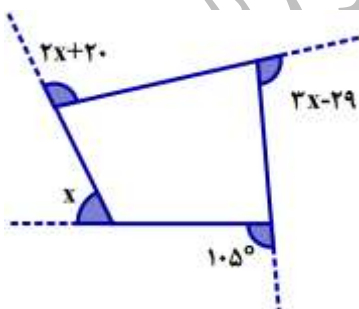


$$105^\circ + 40^\circ + 80^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 360^\circ$$

مثال:

سؤال ۱: در شکل مقابل، اندازه  $x$  چند درجه است؟

پاسخ:  $x = 44^\circ$



مجموع زاویه‌های خارجی در چندضلعی‌های محدب برابر است با  $360^\circ$  درجه

$$(2x + 20) + (3x - 29) + 105 + x = 360$$

با حل معادله مقدار  $x$  را بدست می‌آوریم.

$$6x + 96 = 360 \rightarrow 6x = 360 - 96 = 264 \rightarrow x = \frac{264}{6} = 44 \rightarrow x = 44$$

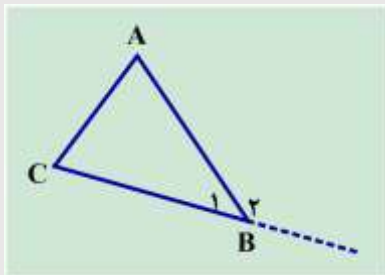
نکته ۳: در چندضلعی‌های منتظم زاویه‌های خارجی برابرند، بنابراین برای بدست آوردن اندازه یک زاویه خارجی می‌توان  $360^\circ$  را بر تعداد زاویه‌های خارجی تقسیم کرد.

$$\text{اندازه هر زاویه خارجی در } n \text{ ضلعی منتظم} = 360 \div n$$

مثال: اندازه هر زاویه خارجی در ده ضلعی منتظم برابر است با:  $360 \div 10 = 36$

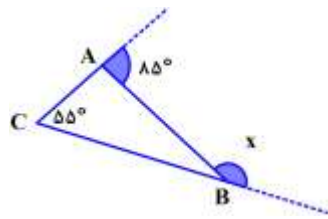
سؤال ۲: اگر اندازه یک زاویه داخلی  $n$  ضلعی منتظمی  $156$  درجه باشد، تعداد اضلاع چندضلعی را بیابید.  
 پاسخ:  $15$  ضلعی منتظم، می‌دانیم مجموع هر زاویه خارجی با زاویه داخلی متناظرش برابر است با  $180^\circ$ .  
 پس: اندازه هر زاویه خارجی  $n$  ضلعی منتظم  $24 = 180 - 156$ . با توجه به اینکه می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی باید  $360^\circ$  شود. بنابراین  $n$  ضلعی مورد نظر سؤال  $15$  ضلعی منتظم است  $360 \div 24 = 15$ .

نکته ۴: در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش (دو زاویه داخلی که کنارش قرار ندارند) برابر است.



$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \end{cases} \rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{A} + \widehat{C}$$

سؤال ۳: در شکل مقابل زاویه  $x$  چند درجه است؟



پاسخ:  $150^\circ = \widehat{x}$ ، ابتدا زاویه داخلی  $A$  را بدست می‌آوریم:  $180 - 85 = 95$

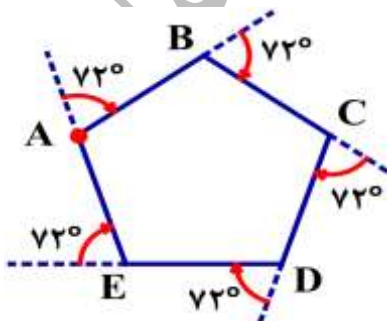
حال با استفاده از نکته قبل زاویه  $x$  را تعیین می‌کنیم  $\widehat{x} = 95 + 55 = 150^\circ$

نکته ۵: هرگاه روی محیط یک چندضلعی محدب حرکت کنیم به اندازه زاویه‌های خارجی شکل می‌چرخیم، یعنی  $(360^\circ)$ .

مثال: لاک پشتی برای پیمودن محیط ۵ ضلعی منتظم از نقطه  $A$  شروع می‌کند وقتی می‌خواهد از روی ضلع

$AB$  روی ضلع  $BC$  قرار بگیرد به اندازه زاویه خارجی  $\widehat{B}$  می‌چرخد و بعد به اندازه زاویه خارجی  $\widehat{C}$  و ... پس تا وقتی

دوباره به نقطه  $A$  برگردد روی هم  $360^\circ$  می‌چرخد.



$$5 \times 72 = 360^\circ$$

گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان