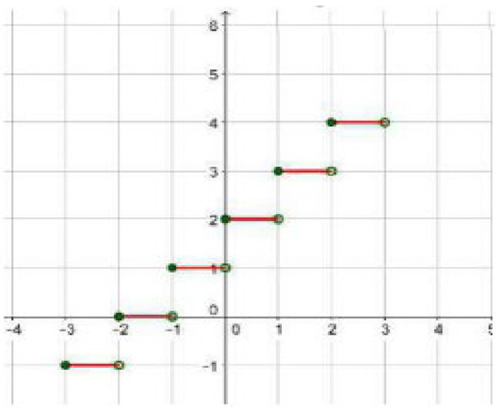
۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + ۲$ و دامنه‌ی $D_f = [-۳ , ۳)$ را رسم کنید.

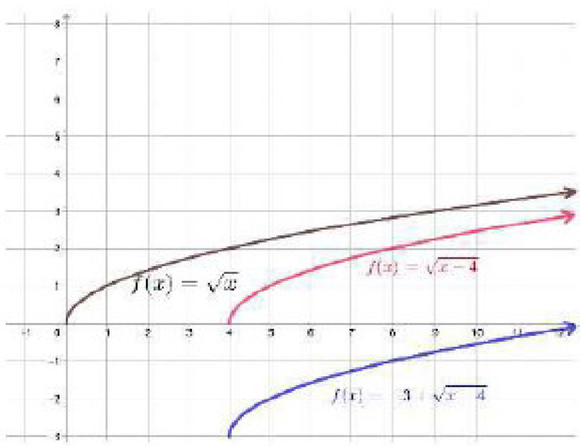
« **پاسخ** »



$$
\begin{array}{ll}
f(x) = -۳ + ۲ = -۱ & -۳ \le x < -۲ \\
f(x) = -۲ + ۲ = ۰ & -۲ \le x < -۱ \\
f(x) = -۱ + ۲ = ۱ & -۱ \le x < ۰ \\
f(x) = ۰ + ۲ = ۲ & ۰ \le x < ۱ \\
f(x) = ۱ + ۲ = ۳ & ۱ \le x < ۲ \\
f(x) = ۲ + ۲ = ۴ & ۲ \le x < ۳
\end{array}
$$

۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x) = -۳ + \sqrt{x - ۴}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »



۳- در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$

ب) $g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x+۲}$, $f(x)=x-۲$

« **پاسخ** »

الف) دامنه‌ی این دو تابع با هم برابر است. $D_f=D_g=R-\{۰\}$

پس از ساده کردن تابع g مشاهده می‌کنیم که ضابطه‌ی این دو تابع نیز با هم برابر است:

$$\left.\begin{array}{l} x>۰\Rightarrow g(x)=\dfrac{x}{x}=۱\\ x<۰\Rightarrow g(x)=\dfrac{-x}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$$

ب) می‌دانیم دامنه‌ی این دو تابع عبارت است از: $D_g=R-\{-۲\}$, $D_f=R$

با وجود این‌که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه‌ی آن با ضابطه‌ی $f(x)$ برابر می‌شود اما چون دامنه‌ها برابر نیستند نمی‌توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x+۲)}=x-۲$$

۴- آیا دو تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-x}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

« **پاسخ** »

$$D_f: x\geq ۰\cap x\geq ۱\Rightarrow D_f=[۱,+\infty)$$

$$D_g=x^۲-x\geq ۰\Rightarrow D_g=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$$

$$D_f\neq D_g$$

۵- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^{۳}-۲۵x}$

ب) $g(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۱}+\dfrac{۴x-۱}{x^{۲}-۳x}$

« **پاسخ** »

الف) $D_f : x^{۳}-۲۵x \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۵ \\ x=-۵ \end{cases}$

$p=x^{۳}-۲۵x$

x	$-\infty$	-۵	۰	۵	$+\infty$
x	-	-	+	+	
$x^{۲}-۲۵$	+	-	-	+	
p	-	+	-	+	
$p \geq ۰$		ج		ج	
	ج	ج	ج		

$D_f=[-۵\,,\,۰]\cup[۵\,,\,+\infty)$

ب) $D_g : \begin{cases} x^{۲}-۱\neq ۰ \Rightarrow x\neq \pm ۱ \\ x^{۲}-۳x\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۰\,,\,۳ \end{cases} \Rightarrow D_g=R-\{۰\,,\,۳\,,\,\pm ۱\}$

۶- اگر $f(x)=\dfrac{x-۷}{x^{۲}+ax+b-۱}$ دامنه‌اش $R-\{۲\}$ باشد، $a\,,\,b$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

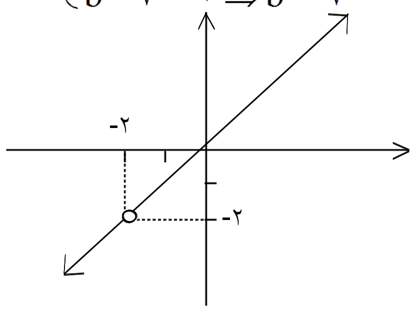
$x=۲\Rightarrow x-۲=۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^{۲}-۴x+۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \\ b-۱=۴\Rightarrow b=۵ \end{cases}$

۷- اگر $f(x) = \dfrac{x^۲ + ax + b - ۷}{x + ۲}$ تابع همانی باشد، مقدار a و b را مشخص کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$f(x) = x(x \neq -۲) \Rightarrow \frac{x^۲ + ax + b - ۷}{x + ۲} = x \Rightarrow \cancel{x^۲} + ax + b - ۷ = \cancel{x^۲} + ۲x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b - ۷ = ۰ \Rightarrow b = ۷ \end{cases}$$



$$D = R - \{-۲\}$$

۸- دامنه‌ی تابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲} + \dfrac{۱}{\sqrt{-x}}$ ب) $g(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{۳ - |x|}}$

« **پاسخ** »

الف) $\begin{cases} ۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \\ -x > ۰ \Rightarrow x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-۲ , ۰)$

ب) $\begin{cases} -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \\ ۳ - |x| > ۰ \Rightarrow |x| < ۳ \Rightarrow -۳ < x < ۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_g = (-۳ , ۰]$

۹- اگر $f(x) = \dfrac{۲x + ۱}{۴x - ۱}$، دامنه $f(۲x - ۴)$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$f(۲x - ۴) = \frac{۲(۲x - ۴) + ۱}{۴(۲x - ۴) - ۱} = \frac{۴x - ۷}{۸x - ۱۷} \Rightarrow ۸x - ۱۷ \neq ۰ \Rightarrow x \neq \frac{۱۷}{۸}$$

$$D_{f(۲x - ۴)} = R - \left\{\frac{۱۷}{۸}\right\}$$

۱۰- اگر $f(x) = x^{۲} - ۱$ و $g(x) = x + ۱$ باشد، نمودار تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را رسم کنید.

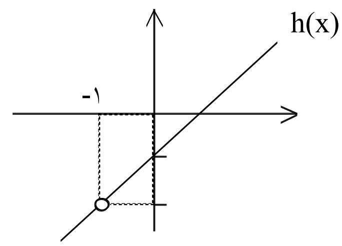
« **پاسخ** »

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{۲} - ۱}{x + ۱} = \frac{(x - ۱)(x + ۱)}{x + ۱} = x - ۱$$

$$D_h = R - \{-۱\}$$

$$h(x) = x - ۱ \xrightarrow{x \neq -۱} y \neq -۲$$

x	۰	۱
y	-۱	۰



۱۱- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^{۲} + |x| - ۹۰}$

ب) $g(x) = \frac{x + ۹}{x^{۲} - ۷|x| + ۱۰}$

« **پاسخ** »

الف) $x^{۲} + |x| - ۹۰ \geq ۰ \xrightarrow{x^{۲} = |x|^{۲}} |x|^{۲} + |x| - ۹۰ \geq ۰ \Rightarrow (|x| - ۹)\underbrace{(|x| + ۱۰)}_{\text{همواره مثبت}} \geq ۰$

$\Rightarrow |x| - ۹ \geq ۰ \Rightarrow |x| \geq ۹ \Rightarrow x \geq ۹$ یا $x \leq -۹$

$D_f = (-\infty , -۹] \cup [۹ , +\infty)$

ب) $x^{۲} - ۷|x| + ۱۰ = ۰ \xrightarrow{x^{۲} = |x|^{۲}} |x|^{۲} - ۷|x| + ۱۰ = ۰$

$\Rightarrow (|x| - ۲)(|x| - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} |x| = ۲ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ |x| = ۵ \Rightarrow x = \pm ۵ \end{cases}$

$D_g = R - \{\pm ۲ , \pm ۵\}$

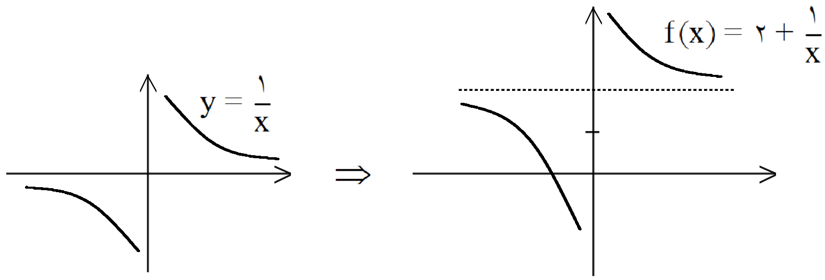
۱۲- نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید و سپس دامنه و برد آن‌را حساب کنید.

الف) $f(x) = ۲ + \frac{۱}{x}$

ب) $g(x) = \frac{۱}{۲ + x}$

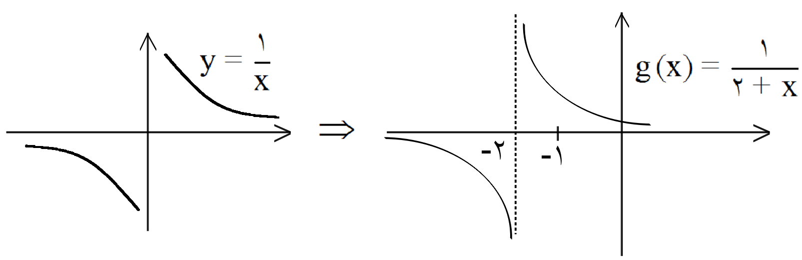
« **پاسخ** »

الف)



$$\begin{cases} D_f = R - \{۰\} \\ R_f = R - \{۲\} \end{cases}$$

ب)



$$\begin{cases} D_g = R - \{-۲\} \\ R_g = R - \{۰\} \end{cases}$$

۱۳- اگر دامنه $f(x) = \frac{۱}{x^۲ + ۴x + a}$ برابر $R - \{b\}$ باشد، a , b را حساب کنید.

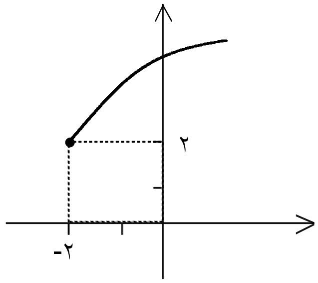
« **پاسخ** »

مخرج فقط یک ریشه‌ی مضاعف دارد بنابراین $\Delta = ۰$ است.

$\Delta = ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۴$

$x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow b = -۲$

۱۴- نمودار $f(x)=\sqrt{x-a}+b-1$ به صورت زیر است.



الف) a , b را حساب کنید.

ب) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ را بنویسید.

« **پاسخ** »

الف) نمودار تابع ۲ واحد به طرف x های منفی رفته بنابراین درون رادیکال $x+2$ است و سپس دو واحد بالا رفته بنابراین باید کل تابع را با عدد ۲ جمع کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x+2}+2 \Rightarrow \begin{cases} -a=2 \Rightarrow a=-2 \\ b-1=2 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

ب) مقدار تابع در $x=\frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}+2}+2=\sqrt{\frac{9}{4}}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

۱۵- دامنه و برد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=2-\sqrt{2-x}$

ب) $g(x)=2\sqrt{5-x}+7$

« **پاسخ** »

الف)

$$D_f: 2-x \ge 0 \Rightarrow -x \ge -2 \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow D_f=(-\infty\,,\,2]$$

$$R_f: \sqrt{2-x} \ge 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{2-x} \le 0 \xrightarrow{+2} 2-\sqrt{2-x} \le 2 \Rightarrow y \le 2 \Rightarrow R_f=(-\infty\,,\,2]$$

ب)

$$D_g: 5-x \ge 0 \Rightarrow -x \ge -5 \Rightarrow x \le 5 \Rightarrow D_g=(-\infty\,,\,5]$$

$$R_g: \sqrt{5-x} \ge 0 \xrightarrow{\times 2} 2\sqrt{5-x} \ge 0 \xrightarrow{+7} 2\sqrt{5-x}+7 \ge 7 \Rightarrow y \ge 7 \Rightarrow R_f=[7\,,\,+\infty)$$

۱۶- ضابطه‌ی وارون هریک از توابع با ضابطه‌های زیررا بیابید.

الف) $f(x) = ۵x - ۲$

ب) $f(x) = \frac{۳}{۵}x + ۴$

پ) $f(x) = \frac{-۷x + ۳}{۵}$

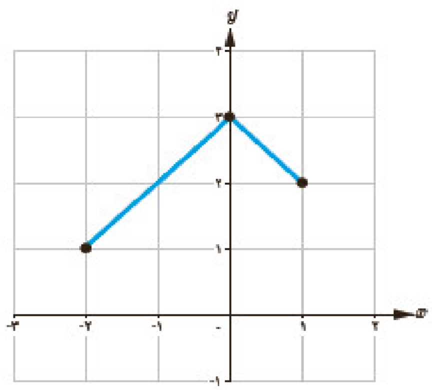
« **پاسخ** »

الف) $y = ۵x - ۲ \Rightarrow ۵x - ۲ = y \Rightarrow ۵x = y + ۲ \Rightarrow x = \frac{y+۲}{۵} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۲}{۵}$

ب) $y = \frac{۳}{۵}x + ۴ \Rightarrow ۵y = ۳x + ۲۰ \Rightarrow ۳x + ۲۰ = ۵y \Rightarrow ۳x = ۵y - ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۵y - ۲۰}{۳}$

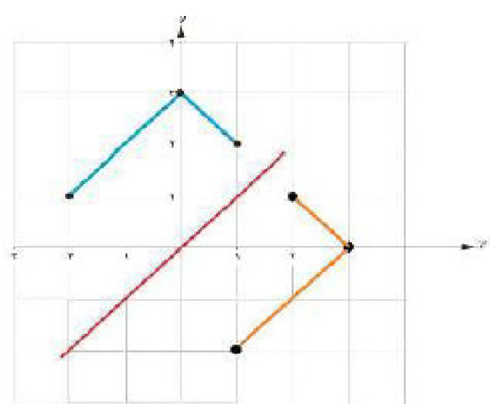
$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۵x - ۲۰}{۳}$

ج) $y = \frac{-۷x + ۳}{۵} \Rightarrow ۵y = -۷x + ۳ \Rightarrow ۷x = -۵y + ۳ \Rightarrow x = \frac{-۵y + ۳}{۷} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{-۵x + ۳}{۷}$



۱۷- نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

« **پاسخ** »



۱۸- وارون تابع $f=\{(۲\,,\,۳),(-۲\,,\,۱),(-۱\,,\,۲)\}$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f^{-۱}=\{(۳\,,\,۲),(۱\,,\,-۲),(۲\,,\,-۱)\}$$

۱۹- تابع $f=\{(m^۴+۲\,,\,۵),(n^۳+۱\,,\,۴)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f ، $\{-۷\,,\,۱۸\}$ باشد.

« **پاسخ** »

$$f=\{(m^۴+۲\,,\,۵),(n^۳+۱\,,\,۴)\}$$
$$f^{-۱}=f=\{(۵\,,\,m^۴+۲),(۴\,,\,n^۳+۱)\}\Rightarrow R_{f^{-۱}}=\{m^۴+۲\,,\,n^۳+۱\}$$

اگر $\{m^۴+۲\,,\,n^۳+۱\}=\{-۷\,,\,۱۸\}$، از آن‌که $m^۴+۲$ همواره مثبت است باید برابر با ۱۸ و $n^۳+۱$ برابر با (-۷) باشد، پس:

$$\begin{cases} m^۴+۲=۱۸\Rightarrow m^۴=۱۶\Rightarrow m=\pm۲ \\ n^۳+۱=-۷\Rightarrow n^۳=-۸\Rightarrow n^۳=(-۲)^۳\Rightarrow n=-۲ \end{cases}$$

۲۰- اگر $f(x)=۲x-۶$ و $g(x)=۵+۲x$ باشد، دامنه $h(x)=\sqrt{f^{-۱}(x)}+\dfrac{۳x-۱}{g^{-۱}(x)}$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$f(x)=۲x-۶\Rightarrow y=۲x-۶\Rightarrow y+۶=۲x\Rightarrow x=\frac{y+۶}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x+۶}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۶}{۲}$$
$$g(x)=۵+۲x\Rightarrow y=۵+۲x\Rightarrow y-۵=۲x\Rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$
$$h(x)=\sqrt{f^{-۱}(x)}+\frac{۳x-۱}{g^{-۱}(x)}\Rightarrow h(x)=\sqrt{\frac{x+۶}{۲}}+\frac{۳x-۱}{\frac{x-۵}{۲}}$$
$$\begin{cases} \dfrac{x+۶}{۲}\geq ۰\Rightarrow x\geq -۶ \\ x-۵\neq ۰\Rightarrow x\neq ۵ \end{cases}\Rightarrow D_h=[-۶\,,\,+\infty)-\{۵\}$$

۲۱- اگر $f(x) = ۶ - ۲x$ باشد، دامنه $h(x) = \dfrac{۱}{f^{-۱}(x)}$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$f(x) = ۶ - ۲x \Rightarrow y = ۶ - ۲x \Rightarrow ۲x = ۶ - y \xrightarrow{\div ۲} x = ۳ - \frac{y}{۲} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = ۳ - \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = ۳ - \frac{x}{۲}$$

$$h(x) = \frac{۱}{f^{-۱}(x)} = \frac{۱}{\frac{۶ - x}{۲}} = \frac{۲}{۶ - x}$$

$$۶ - x \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۶ \Rightarrow D_h = R - \{۶\}$$

۲۲- در یک تابع خطی اگر $f(۱) = ۵$ و $f^{-۱}(۹) = ۳$ باشد، $f^{-۱}(۱۳)$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

تابع خطی است بنابراین ضابطه آن‌را به صورت $f(x) = ax + b$ می‌نویسیم.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(۱) = a + b = ۵$$

$$f^{-۱}(۹) = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۹ \Rightarrow ۳a + b = ۹$$

$$\begin{cases} a + b = ۵ \\ -۳a - b = -۹ \end{cases} \Rightarrow -۲a = -۴ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow b = ۳$$

$$f(x) = ۲x + ۳$$

$$f^{-۱}(۱۳) = a \Rightarrow f(a) = ۱۳ \Rightarrow ۲a + ۳ = ۱۳ \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

۲۳- اگر $f(x) + f^{-۱}(۶) = ۲x + ۱۰$ باشد، مقدار $\dfrac{۱ + f(۱)}{۲ - f^{-۱}(۰)}$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$\left(۶ , f^{-۱}(۶)\right) \in f^{-۱} \Rightarrow \left(f^{-۱}(۶) , ۶\right) \in f \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-۱}(۶) \\ f(x) = ۶ \end{cases} \Rightarrow ۶ + f^{-۱}(۶) = ۲f^{-۱}(۶) + ۱۰$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۶) = -۴$$

$$f(x) - ۴ = ۲x + ۱۰ \Rightarrow f(x) = ۲x + ۱۴$$

$$f(۱) = ۲ + ۱۴ = ۱۶$$

$$f^{-۱}(۰) = a \Rightarrow f(a) = ۰ \Rightarrow ۲a + ۱۴ = ۰ \Rightarrow a = -۷$$

$$\frac{۱ + f(۱)}{۲ - f^{-۱}(۰)} = \frac{۱ + ۱۶}{۲ + ۷} = \frac{۱۷}{۹}$$

۲۴- اگر تابع خطی f نمودار $g(x) = x^{۲} - ۲x + ۱$ را در نقاطی به طول ۱ و۳ قطع کند، ضابطه‌ی وارون f را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\left.\begin{array}{l} x = ۱ \Rightarrow g(۱) = ۰ \Rightarrow A(۱\,,\,۰) \\ x = ۳ \Rightarrow g(۳) = ۴ \Rightarrow B(۳\,,\,۴) \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{y_{۲} - y_{۱}}{x_{۲} - x_{۱}} = \frac{۴ - ۰}{۳ - ۱} = ۲$$

$$y - y_{۱} = m(x - x_{۱}) \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۱) \Rightarrow y = ۲x - ۲$$

$$y + ۲ = ۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{y + ۲}{۲} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x + ۲}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۲}{۲}$$

۲۵- اگر f یک تابع خطی باشد و $f(x + ۱) + f(x + ۲) = ۴x + ۷$، مقدار $f^{-۱}(۳)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

چون f یک تابع خطی است. بنابراین $f(x) = ax + b$ است.

$$f(x + ۱) + f(x + ۲) = ۴x + ۷ \Rightarrow a(x + ۱) + b + a(x + ۲) + b = ۴x + ۷$$
$$\Rightarrow ax + a + b + ax + ۲a + b = ۴x + ۷ \Rightarrow ۲ax + ۳a + ۲b = ۴x + ۷$$

$$\begin{cases} ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \\ ۳a + ۲b = ۷ \xrightarrow{a = ۲} ۶ + ۲b = ۷ \Rightarrow ۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$f(x) = ۲x + \frac{۱}{۲}$$

$$f^{-۱}(۳) = k \Rightarrow f(k) = ۳ \Rightarrow ۲k + \frac{۱}{۲} = ۳ \Rightarrow ۲k = ۳ - \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲k = \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow k = \frac{۵}{۴} \Rightarrow f^{-۱}(۳) = \frac{۵}{۴}$$

۲۶- اگر $f = \{(-۱\,,\,۲)\,,\,(۰\,,\,۳)\,,\,(۴\,,\,-۱)\}$ باشد، تابع $f^{-۱}$ را بیابید و دامنه و برد آن‌را مشخص کنید.

« پاسخ »

$$f = \{(-۱\,,\,۲)\,,\,(۰\,,\,۳)\,,\,(۴\,,\,-۱)\}$$
$$f^{-۱} = \{(۲\,,\,-۱)\,,\,(۳\,,\,۰)\,,\,(-۱\,,\,۴)\}$$
$$D_{f^{-۱}} = \{۲\,,\,۳\,,\,-۱\} = R_f$$
$$R_{f^{-۱}} = \{-۱\,,\,۰\,,\,۴\} = D_f$$

۲۷- در جدول زیر وارون توابع را نوشته و مشخص کنید وارون کدام تابع، تابع است؟

$f=\{(۱\,,\,۵),(۳\,,\,۷),(۴\,,\,۹)\}$	$f^{-۱}=$
$g=\{(۱\,,\,۲),(۳\,,\,۲),(۵\,,\,۱۰)\}$	$g^{-۱}=$
$h=\{(۱\,,\,۲),(۳\,,\,۴),(۵\,,\,۲)\}$	$h^{-۱}=$

« **پاسخ** »

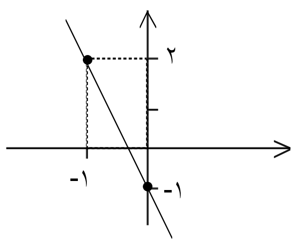
برای نوشتن وارون یک تابع باید جای مؤلفه‌ی اول و دوم را عوض کنیم.

$f^{-۱}=\{(۵\,,\,۱)\,,\,(۷\,,\,۳)\,,\,(۹\,,\,۴)\}$ تابع است $f^{-۱}$

$g^{-۱}=\{(۲\,,\,۱)\,,\,(۲\,,\,۳)\,,\,(۱۰\,,\,۵)\}$ تابع نیست $g^{-۱}$

$h^{-۱}=\{(۲\,,\,۱)\,,\,(۴\,,\,۳)\,,\,(۲\,,\,۵)\}$ تابع نیست $h^{-۱}$

۲۸- وارون تابع خطی زیر را حساب کنید.



« **پاسخ** »

f یک تابع خطی است و $f(x)=ax+b$ بنابراین:

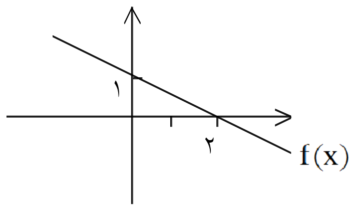
$A(۰\,,\,-۱)\Rightarrow a(۰)+b=-۱\Rightarrow b=-۱$

$B(-۱\,,\,۲)\Rightarrow a(-۱)-۱=۲\Rightarrow a=-۳$

$$f(x)=-۳x-۱\Rightarrow y=-۳x-۱\Rightarrow y+۱=-۳x\xrightarrow{\div(-۳)}\frac{y+۱}{-۳}=x\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x+۱}{۳}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{-۳}$$

۲۹- با توجه به نمودار تابع خطی $f(x)$ ضابطه‌ی معکوس آن‌را بنویسید.



« **پاسخ** »

چون $f(x)$ یک تابع خطی است بنابراین ضابطه‌ی آن به صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$A(۰ , ۱) \Rightarrow a(۰) + b = ۱ \Rightarrow b = ۱$$

$$B(۲ , ۰) \Rightarrow a(۲) + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۱ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۱ \Rightarrow y - ۱ = -\frac{۱}{۲}x \xrightarrow{\times(-۲)} -۲y + ۲ = x$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -۲x + ۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -۲x + ۲$$

۳۰- اگر تابع $f = \{(۱ , a + ۲b),(-۲ , ۳),(۲a - b , ۳),(۱ , ۴),(۲ , ۵)\}$، تابعی یک‌به‌یک باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

« **پاسخ** »

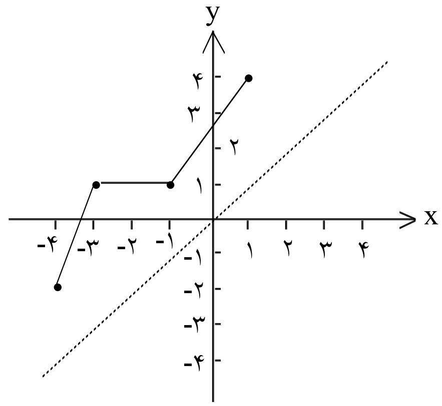
$$(۱ , a + ۲b) , (۱ , ۴) \in f \xrightarrow{\text{f تابع است}} a + ۲b = ۴ \qquad (۱)$$

$$(-۲ , ۳) , (۲a - b , ۳) \in f \xrightarrow{\text{f تابعی یک به یک است}} ۲a - b = -۲ \qquad (۲)$$

$$۱ , ۲ \Rightarrow \begin{matrix} \\ ۲\times \end{matrix}\begin{cases} a + ۲b = ۴ \\ ۲a - b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \cancel{۲b} = ۴ \\ ۴a - \cancel{۲b} = -۴ \end{cases} \Rightarrow ۵a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

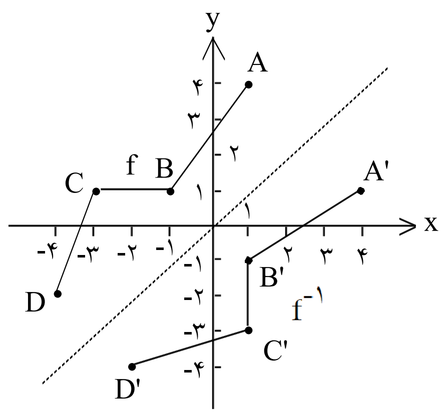
$$\xrightarrow{(۱)} ۰ + ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$$

۳۱- نمودار وارون تابع زیر را رسم کنید. آیا نموداری که رسم می‌کنید خودش تابع است؟ آیا نمودار f یک‌به‌یک است؟



« **پاسخ** »

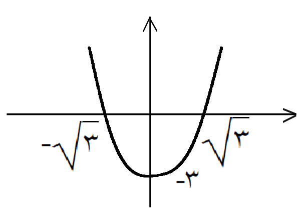
کافی است قرینه‌ی نقاط مهم شکل (A ، B ، C و D) را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و آن‌ها را با خطوط راست به هم وصل کنیم، مثلاً $A(۱ , ۴) \Rightarrow A'(۴ , ۱)$ ضمناً $f^{-۱}$ تابع نیست چون f یک‌به‌یک نیست.



۳۲- به کمک نمودار بررسی آیا تابع زیر یک‌به‌یک است؟

$f(x) = x^{۲} - ۳$

« **پاسخ** »



با توجه به شکل به عنوان مثال دو مقدار $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ ، y یکسان (صفر) می‌دهند پس f یک به یک نمی‌باشد.

۳۳- معکوس توابع زیر را بنویسید و دامنه و برد آن‌ها را با دامنه و برد f و g مقایسه کنید.

الف) $f = \{(-۱,۰), (۲,۱), (۳,-۱), (-۲,۳)\}$

ب) $g = \{(a,b), (c,d), (e,f), (g,h)\}$

« **پاسخ** »

الف) $f^{-۱} = \{(۰,-۱)(۱,۲)(-۱,۳)(۳,-۲)\}$

دامنه ی f = برد $f^{-۱}$ = $\{-۱, ۲, ۳, -۲\}$

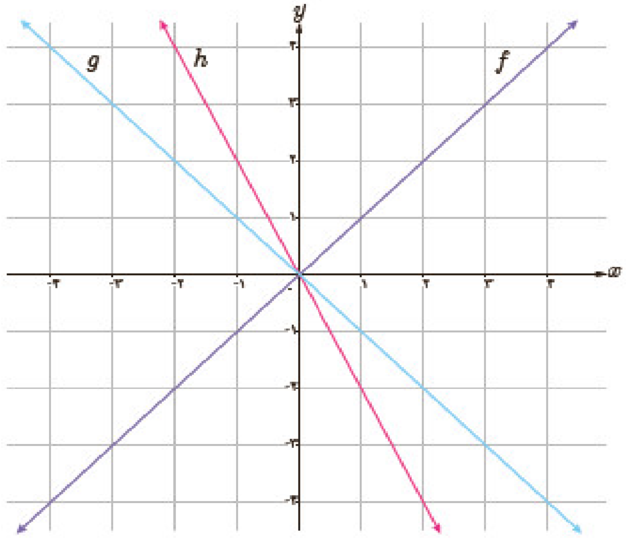
دامنه ی $f^{-۱}$ = برد f = $\{۰, ۱, -۱, ۳\}$

ب) $g^{-۱} = \{(b,a) ، (d,c) ، (f,e) ، (h,g)\}$

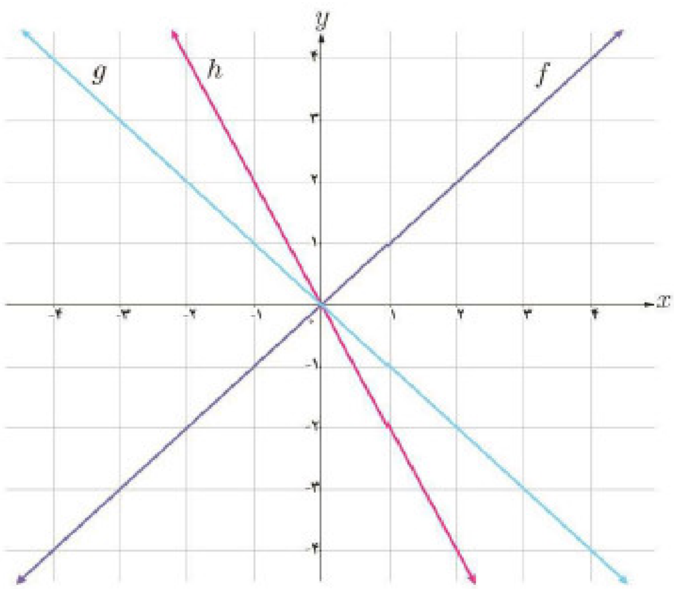
دامنه g = برد $g^{-۱}$ = $\{a, c, e, g\}$

دامنه $g^{-۱}$ = برد g = $\{b, d, f, h\}$

۳۴- با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آن‌ها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



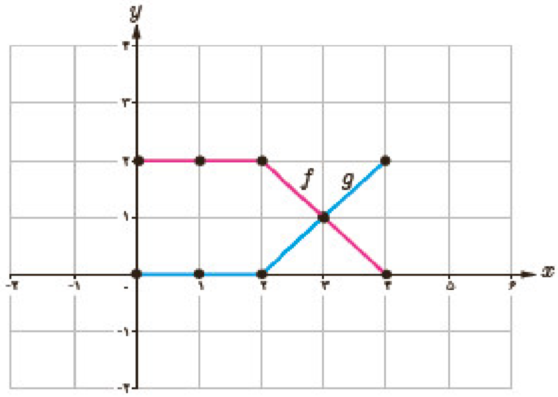
« **پاسخ** »



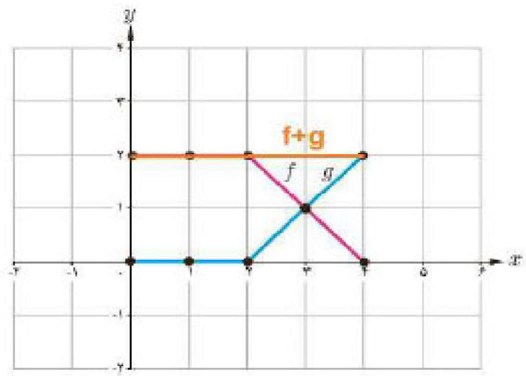
$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = ۱ \\ h(۱) = -۲ \\ g(۱) = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow f(۱) + h(۱) = g(۱)$$

$$(f + h)(x) = g(x)$$

۳۵- در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل‌جمع این دو تابع را به دست آورید.



« **پاسخ** »



۳۶- با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، هریک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$

ت) $u(x) = 1-\sqrt{x}$

ث) $v(x) = 1-\sqrt{x-3}$

« پاسخ »

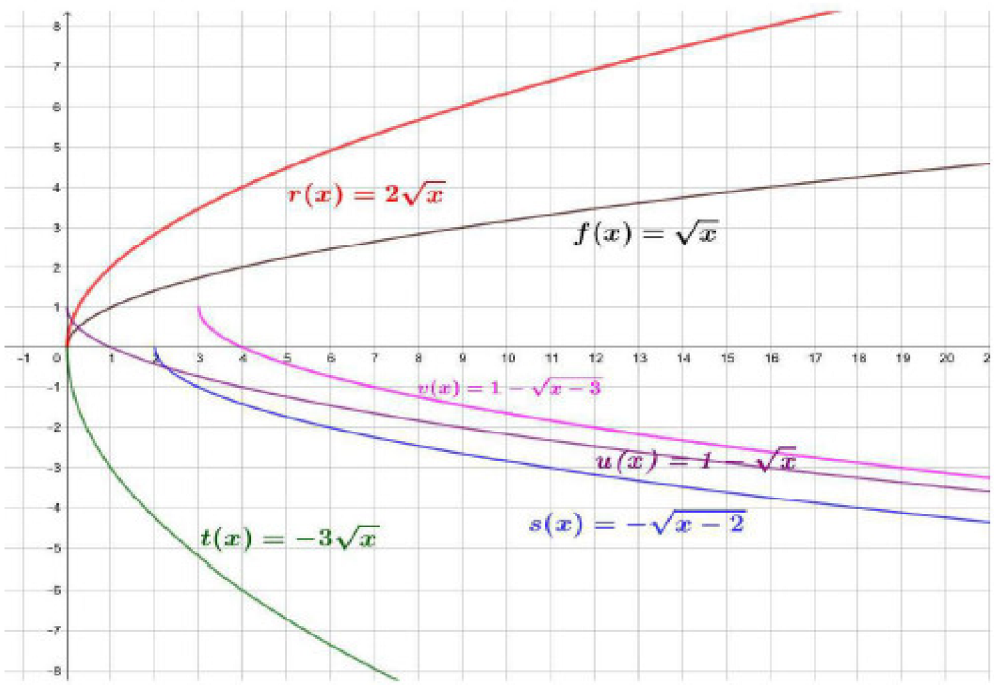
الف) با توجه به این‌که $r(x) = 2f(x)$ کافی است عرض‌های هر نقطه از نمودار f را دو برابر کنیم.

ب) با توجه به این‌که $s(x) = -f(x-2)$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی ۲ واحد روی محور طول‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم سپس آن‌را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

پ) با توجه به این‌که $t(x) = 3f(x)$ کافی است ابتدا عرض‌های هر نقطه از نمودار f را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

ت) با توجه به این‌که $u(x) = -f(x)+1$ کافی است ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه‌ی ۱ واحد روی محور عرض‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم.

ث) با توجه به این‌که $v(x) = -f(x-3)+1$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی ۳ واحد روی محور طول‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه‌ی ۱ واحد روی محور عرض‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم.



۳۷- در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل‌جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x) = \frac{۱}{x}$ $f(x) = |x|$ ب) $g(x) = x + ۲$ $f(x) = x^{۲} - ۴$

پ) $g(x) = -\sqrt{x}$ $f(x) = \sqrt{x}$ ت) $g(x) = x^{۲} + ۳x - ۱۰$ $f(x) = \frac{x - ۲}{x + ۵}$

ث) $g = \{(-۱ , ۲),(۰ , ۳), (۲ , ۴), (۳ , ۰)\}$ $f = \{(۲ , ۵),(۳ , ۴),(۰ , -۲)\}$

« **پاسخ** »

الف)

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \|x\| + x$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g = R \cap R = R$
$f-g$	$(f-g)(x) = \|x\| - x$	$D_{f-g} = D_f \cap D_f = R \cap R = R$
$f.g$	$(f.g)(x) = \|x\|x = x\|x\|$	$D_{f.g} = D_f \cap D_g = R \cap R = R$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\|x\|}{x}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \| g[x] = ۰\} = R - \{۰\}$

ب)

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	[redacted]	$D_{f+g} = R \cap R = R$
$f-g$	[redacted]	$D_{f-g} = R \cap R = R$
$f.g$	[redacted]	$D_{f.g} = R \cap R = R$
$\frac{f}{g}$	[redacted]	$D_{\frac{f}{g}} = R - \{-۲\}$

پ)

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \left(-\sqrt{x}\right) = ۰$	$D_{f+g} = [۰ , +\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right) = ۲\sqrt{x}$	$D_{f-g} = [۰ , +\infty)$
$f.g$	$(f.g)(x) = \sqrt{x}\left(-\sqrt{x}\right) = -x$	$D_{f.g} = [۰ , +\infty)$
$\frac{f}{g}$	[redacted]	$D_{\frac{f}{g}} = [۰ , +\infty) - \{۰\} = (۰ , +\infty]$

ت)

۳۸- تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-۲ , ۱]$ و برد $[-۳ , ۴]$ را درنظر بگیرید:
دامنه تابع $g(x) = -۳f(۲x + ۱)$ برابر .... و برد آن برابر .... است.

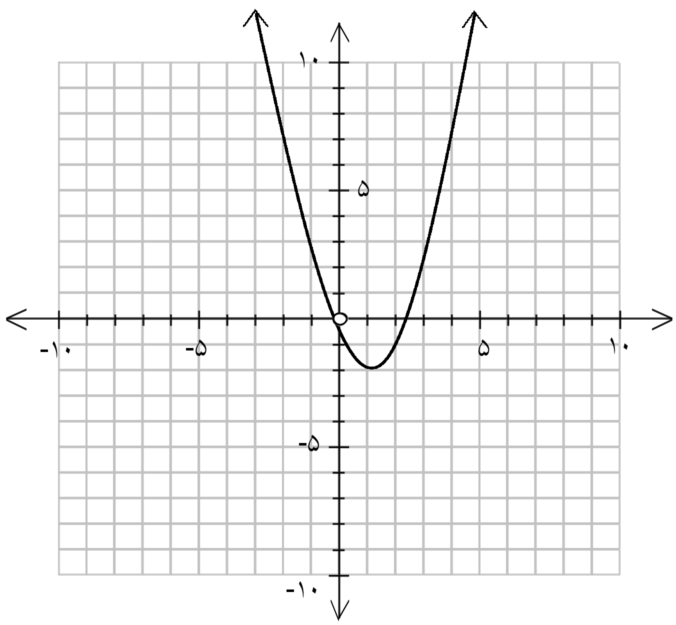
« **پاسخ** »

$$D_g : -۲ \le ۲x + ۱ \le ۱ \xrightarrow{-۱} -۳ \le ۲x \le ۰ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۳}{۲} \le x \le ۰ \Rightarrow D_g = \left[-\frac{۳}{۲} , ۰\right]$$

$$R_g : -۳ \le f(۲x + ۱) \le ۴ \xrightarrow{\times(-۳)} -۱۲ \le -۳f(۲x + ۱) \le ۹ \Rightarrow R_g = [-۱۲ , ۹]$$

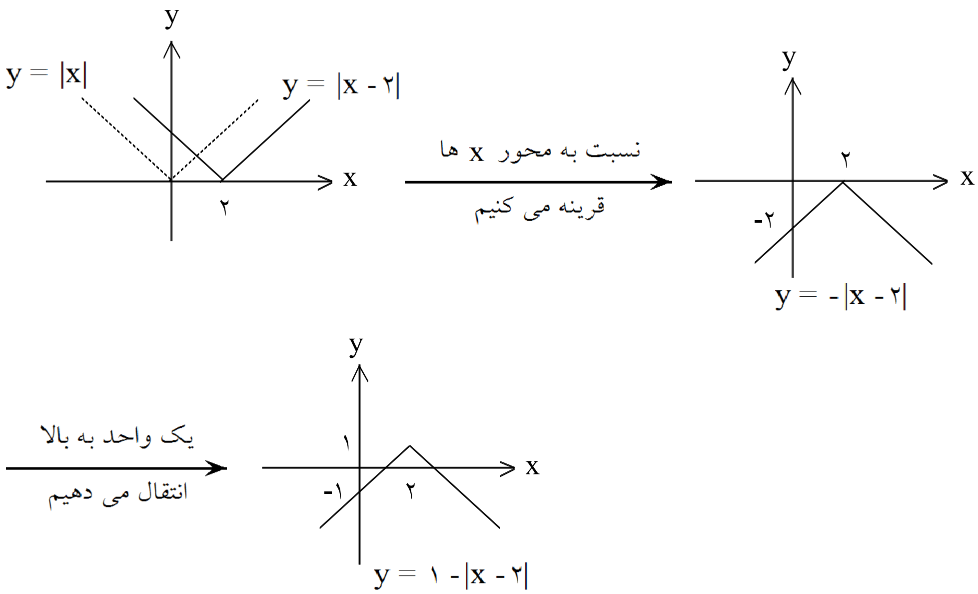
۳۹- نمودار تابع $f(x) = (x - ۱)^۲ - ۲$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »



۴۰- با استفاده از نمودار $f(x) = |x|$ نمودار تابع $y = ۱ - |x - ۲|$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »



۴۱- اگر $f(x) = \sqrt{x + ۱}$ و $g(x) = \dfrac{x + ۱}{x - ۲}$ باشند:

الف) دامنه‌ی تابع $\dfrac{f}{g}$ را به دست آورید.

ب) مقدار $(۲f - g)(۳)$ را محاسبه کنید.

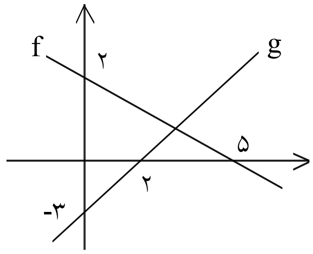
« **پاسخ** »

الف) $D_f = [-۱ \,,\, +\infty)$ $(۰/۲۵)$ $\qquad D_g = R - \{۲\}$ $(۰/۲۵)$

ب) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = \underset{(۰/۲۵)}{[-۱ \,,\, +\infty) - \{۲\} - \{-۱\}} = \underset{(۰/۲۵)}{(-۱ \,,\, ۲) \cup (۲ \,,\, +\infty)}$

$۲f(۳) - g(۳) = \underset{(۰/۲۵)}{۲(۲) - ۴} = ۰$ $(۰/۲۵)$

۴۲- نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه توابع $f+g$ و $f.g$ را به دست آورید.



« پاسخ »

$$\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix} , \begin{vmatrix}۵\\۰\end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{-۲}{۵} \Rightarrow f(x) = -\frac{۲}{۵}x + ۲$$

$$\begin{vmatrix}۰\\-۳\end{vmatrix} , \begin{vmatrix}۲\\۰\end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f + g = -\frac{۲}{۵}x + ۲ + \frac{۲}{۳}x - ۳ = \frac{۱۱}{۱۰}x - ۱$$

$$f.g = \left(-\frac{۲}{۵}x + ۲\right)\left(\frac{۲}{۳}x - ۳\right) = \frac{۳}{۵}x^۲ + \frac{۲۱}{۵}x - ۶$$

۴۳- اگر $f = \{(۱ , ۲),(۴ , ۷),(۳ , ۵),(۵ , -۱)\}$ و $g(x) = \sqrt{x + ۶}$، آن‌گاه $(۲f + g)(۳)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(۲f + g)(۳) = ۲f(۳) + g(۳) = ۲\times۵ + \sqrt{۳ + ۶} = ۱۰ + \sqrt{۹} = ۱۳$$

۴۴- اگر $(f + g)(x) = ۵x + ۴$ و $(f - g)(x) = ۲ - ۳x$ باشد، دامنه‌ی $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\left.\begin{array}{l}(f + g)(x) = f(x) + g(x) = ۵x + ۴\\(f - g)(x) = f(x) - g(x) = ۲ - ۳x\end{array}\right. \Rightarrow ۲f(x) = ۲x + ۶ \Rightarrow f(x) = x + ۳$$

$$\Rightarrow x + ۳ + g(x) = ۵x + ۴ \Rightarrow g(x) = ۴x + ۱$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = R \cap R - \left\{-\frac{۱}{۴}\right\} = R - \left\{-\frac{۱}{۴}\right\}$$

۴۵- اگر $f(x) = ax + b$ و $g(x) = ۲x + ۷$ و $f(۱) = ۴$ باشد در صورتی‌که $(f + g)(۲) = ۱۷$ باشد a , b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(۱) = ۴ \Rightarrow a + b = ۴$$

$$(f + g)(۲) = f(۲) + g(۲) = ۲a + b + ۴ + ۷ = ۱۷ \Rightarrow ۲a + b = ۶$$

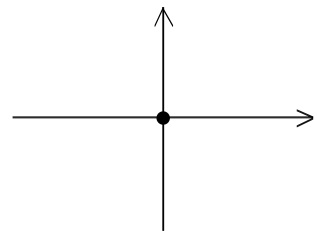
$$\begin{cases}a + b = ۴\\۲a + b = ۶\end{cases} \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow b = ۲$$

۴۶- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$، نمودار $y = (f+g)(x)$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$D_f : x \geq ۰ \Rightarrow D_f = [۰ , +\infty)$$
$$D_g : -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow D_g = (-\infty , ۰] \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [۰ , +\infty) \cap (-\infty , ۰] = \{۰\}$$

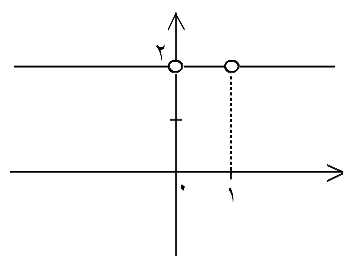
$$y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x} \xrightarrow{x = ۰} y = ۰$$
$$\{(۰ , ۰)\}$$



۴۷- اگر $f(x) = x^۲ - x$ و $g(x) = \frac{۲}{f(x)}$ باشد نمودار $y = (f \times g)(x)$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$D_f = R$$
$$D_g = R - \{۰ , ۱\} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = R - \{۰ , ۱\}$$
$$y = (f \times g)(x) = \left(x^۲ - x\right) \times \frac{۲}{x^۲ - x} = ۲$$



۴۸- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = ۱ - \sqrt{x}$ دامنه و برد تابع $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

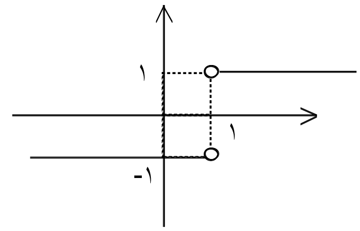
$$D_f = D_g = [۰ , +\infty)$$
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = [۰ , +\infty) - \{۱\}$$
$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - \sqrt{x}}{۱ - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{-(\sqrt{x} - ۱)} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - ۱\right)}{-\left(\sqrt{x} - ۱\right)} = -\sqrt{x}$$
$$y = -\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x} \leq ۰ \Rightarrow y \leq ۰ \\ x \neq ۱ \Rightarrow -\sqrt{x} \neq -۱ \Rightarrow y \neq -۱ \end{cases} \Rightarrow R = (-\infty , ۰] - \{-۱\}$$

۴۹- اگر $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ باشند، نمودار $y=(f\times g)(x)$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} D_f = R-\{۱\} \\ D_g = R \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f\times g} = D_f \cap D_g = R-\{۱\}$$

$$y=(f\times g)(x)=\frac{۱}{x-۱}\times\sqrt{(x-۱)^۲}=\frac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases} ۱ & x>۱ \\ -۱ & x<۱ \end{cases}$$



۵۰- اگر $f(x)=\sqrt{a-۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۳b+۱}$ و تابع $۲f+g$ به صورت $\{(۲\,,\,c-۱)\}$ باشد، آن‌گاه مقادیر $a\,,\,b\,,\,c$ را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} D_f : a-۱-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq a-۱ \\ D_g : x-۳b+۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۳b-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow D_{۲f+g} = D_f \cap D_g = \{۲\} \Rightarrow a-۱ = ۳b-۱ = ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{۲-x} \\ g(x)=\sqrt{x-۲} \end{array}\right\} \Rightarrow (۲f+g)(۲)=۲f(۲)+g(۲)=۰+۰=۰ \Rightarrow c-۱=۰ \Rightarrow c=۱$$

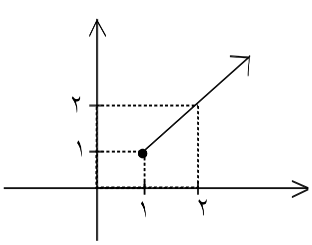
۵۱- اگر $f(x)=x-\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، نمودار $y=(f+g)(x)$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} D_f : x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_f = [۱\,,+\infty) \\ D_g : x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_g = [۱\,,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [۱\,,+\infty)$$

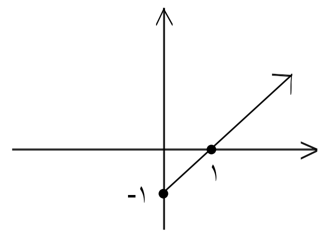
$$y=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x-\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۱}=x$$

x	۱	۲
y	۱	۲



۵۲- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x} - ۱$ باشد، نمودار $y = (f + g)(x)$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »



$D_f : x \geq ۰ \Rightarrow D_f = [۰ , +\infty)$

$D_g : x \geq ۰ \Rightarrow D_g = [۰ , +\infty)$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [۰ , +\infty) \cap [۰ , +\infty) = [۰ , +\infty)$

$y = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - ۱ = x - ۱$

x	۰	۱
y	-۱	۰

۵۳- اگر $f(x) = ۲x + n$ و $g(x) = x^۳ + ۱$ و $(f + g)(۲) = ۸$، مقدار n را حساب کنید.

« **پاسخ** »

$(f + g)(۲) = f(۲) + g(۲) = ۴ + n + ۸ + ۱ = ۸ \Rightarrow n = -۵$

۵۴- اگر $f(x) = \sqrt{۳۶ - x^۲}$، $g(x) = \sqrt{b - x}$ و $D_{f-g} = [-۶ , ۵]$ باشد مقدار b را حساب کنید.

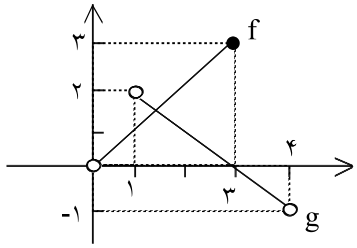
« **پاسخ** »

$D_f : ۳۶ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۶ \leq x \leq ۶ \Rightarrow D_f = [-۶ , ۶]$

$D_g : b - x \geq ۰ \Rightarrow -x \geq -b \Rightarrow x \leq b \Rightarrow D_g = (-\infty , b]$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-۶ , ۶] \cap (-\infty , b] = [-۶ , b] \Rightarrow b = ۵$

۵۵- با توجه به نمودار f و g نمودار و ضابطه f + g را بنویسید.



« **پاسخ** »

دامنه f + g :

$$\begin{matrix} D_f = (۰\ ,\ ۳] \\ D_g = (۱\ ,\ ۴) \end{matrix} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = (۱\ ,\ ۳]$$

ضابطه‌ی f + g :

$$f : \begin{cases} A(۰\ ,\ ۰) \\ B(۳\ ,\ ۳) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۳ - ۰}{۳ - ۰} = ۱ \Rightarrow y - y_۱ = m\left(x - x_۱\right) \Rightarrow y - ۰ = ۱(x - ۰)$$

$$\Rightarrow f(x) = x$$

$$g : \begin{cases} C(۱\ ,\ ۲) \\ D(۴\ ,\ -۱) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{-۱ - ۲}{۴ - ۱} = -۱ \Rightarrow y - y_۱ = m\left(x - x_۱\right) \Rightarrow y + ۱ = -۱(x - ۴)$$

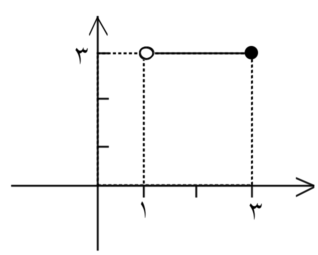
$$g(x) = -x + ۳$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - x + ۳ = ۳$$

نمودار f + g :

$(f + g)(x) = ۳$

x	۱	۳
y	۳	۳



۵۶- اگر $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \sqrt{x - ۳}$ باشد، آن‌گاه:

الف) دامنه $\frac{f}{g}$ را به دست آورده و ضابطه آن‌را تشکیل دهید.

ب) مقدار $(۳f + ۴g)(۷)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

الف)

$$D_f = R \,,\, D_g = x \geq ۳ \,,\, D_{\frac{f}{g}} : D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = x > ۳$$
$$\sqrt{x - ۳} = ۰ \,,\, x = ۳$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - ۱}{\sqrt{x - ۳}}$$

ب)

$$(۳f + ۴g)(۷) = ۳f(۷) + ۴g(۷) = ۳(۶) + ۴(۲) = ۲۶$$

۵۷- اگر $f = \{(۱ \,,\, ۲),(-۱ \,,\, ۵),(-۲ \,,\, ۳),(۰ \,,\, -۲)\}$ و $g = \left\{(-۱ \,,\, ۰),\left(۱ \,,\, \sqrt{۲}\right),\left(-۲ \,,\, \frac{۳}{۲}\right),(۴ \,,\, -۶)\right\}$

آن‌گاه حاصل $\frac{f \times f}{-۳g}$ را بیابید.

« پاسخ »

$$f \times f = \{(۱ \,,\, ۴),(-۱ \,,\, ۲۵),(-۲ \,,\, ۹),(۰ \,,\, ۴)\}$$
$$-۳g = \left\{(-۱ \,,\, ۰),\left(۱ \,,\, -۳\sqrt{۲}\right),(-۲ \,,\, -۴/۵),(۴ \,,\, ۱۸)\right\}$$
$$\frac{f \times f}{-۳g} = \left\{\left(۱, \frac{۴}{-۳\sqrt{۲}}\right), (-۲ \,,\, -۲)\right\}$$

۵۸- اگر $f(x) = x^{۲} - ۴$ و $g(x) = \frac{۱}{x - ۲}$ باشد:

الف) دامنه $f \times g$ را به دست آورید.

ب) ضابطه $f \times g$ را بنویسید.

ج) نمودار $f \times g$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

الف)

$$\left.\begin{array}{l} D_f = R \\ D_g = R - \{۲\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g = R - \{۲\}$$

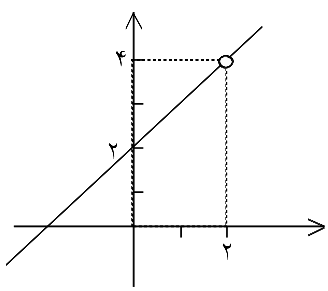
ب)

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \left(x^{۲} - ۴\right) \times \left(\frac{۱}{x - ۲}\right) = \frac{x^{۲} - ۴}{x - ۲} = \frac{(x - ۲)(x + ۲)}{x - ۲} = x + ۲$$

ج)

$(f \times g)(x) = x + ۲$

x	۰	۲
y	۲	۴



۵۹- اگر $f(x)=\dfrac{x^۲-۲x}{x}$ باشد:

الف) ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را حساب کنید.

ب) دامنه $f-f^{-۱}$ را بنویسید.

ج) نمودار $f-f^{-۱}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

الف)

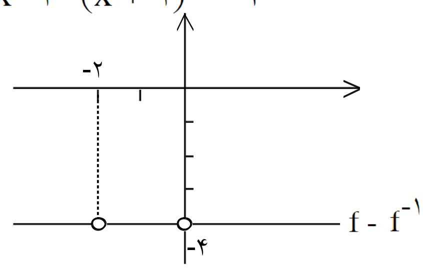
$$f(x)=\frac{x(x-۲)}{x}\Rightarrow y=x-۲\Rightarrow y+۲=x\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=x+۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=x+۲$$

ب) تابع f در (۲- , ۰) توخالی است. بنابراین $f^{-۱}$ در (۰ , ۲-) تعریف نشده است.

$$\begin{aligned}D_f&=R-\{۰\}\\ D_{f^{-۱}}&=R-\{-۲\}\end{aligned}\Rightarrow D_{f-f^{-۱}}=D_f\cap D_{f^{-۱}}=R-\{۰\,,-۲\}$$

ج)

$$\left(f-f^{-۱}\right)(x)=f(x)-f^{-۱}(x)=x-۲-(x+۲)=-۴$$



۶۰- اگر $f(x)=\sqrt{x+۵}$ و $g(x)=x+۱$ باشد، $\left[\left(\frac{f}{g}\right)(۱)\right]$ را حساب کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

« **پاسخ** »

$$\left(\frac{f}{g}\right)(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

$$۲<\sqrt{۶}<۳\xrightarrow{\div ۲}۱<\frac{\sqrt{۶}}{۲}<\frac{۳}{۲}\Rightarrow\left[\frac{\sqrt{۶}}{۲}\right]=۱$$