درس ۲ برآورد

فعالیت

یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی را که در یک بسته قرار می‌دهد مشخص کند. تعداد لیوان‌ها در هر بسته به میانگین تعداد اعضای خانوارهای کشور بستگی دارد که بُعد خانوار نام دارد. مثلاً در ۷ سال پیش بُعد خانوار (میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها) ۴ بوده است. لذا بسته‌بندی لیوان‌ها از ۶ به ۴ کاهش داده شد. از آنجا که فروش شرکت کم شده، به نظر کارشناسان، دلیل آن تغییر بُعد خانوار در کشور است. بُعد خانوار هر کشور از اطلاعات سرشماری قابل دسترسی است که ۷ سال پیش انجام شده است. سرشماری یکی از مهم‌ترین طرح‌های آمارگیری در هر کشوری است، که در ایران هر ۱۰ سال یک بار انجام می‌شود، لذا داده‌های جدید آن تا ۳ سال آینده در دسترس نیست. از آنجا که سرشماری روش مقرون به‌صرفه‌ای برای گردآوری داده‌ها به‌منظور پاسخگویی به این سؤال نیست، شرکت تصمیم می‌گیرد که بُعد خانوار خریدارهای محصول این شرکت را به‌وسیلهٔ نمونه‌گیری انجام دهد.

در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، بُعد خانوار ۹ خریدار محصول به‌صورت زیر باشد. میانگین بُعد این نمونه چقدر است؟

آماره
$\bar{x} = ۳/۳۳$

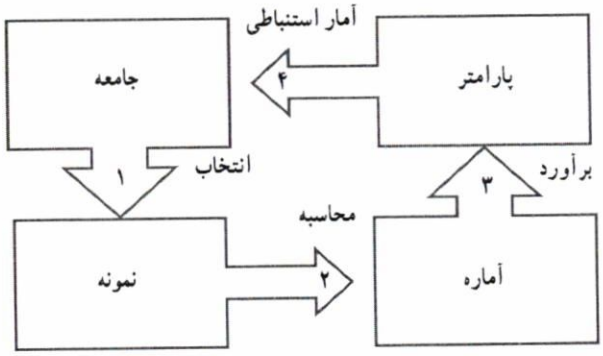
۳	۲	۷	۲	۵	۳	۳	۱	۴

$\mu = ۴$
پارامتر

برآورد نقطه‌ای[1] پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونه تصادفی در آمارهٔ نظیر آن پارامتر. به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

در این فعالیت میانگین تعداد اعضای خانوار پارامتر است. آماره، ...۳/۳۳... از نمونه؛ و برآورد نقطه‌ای پارامتر ...۴... جامعه است.

[1]_ Point Estimation



کار در کلاس

فرض کنید، جامعه از ۶ نفر تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر :

۲	۵	۳	۰	۱	۴

می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۱، **میانگین** این جامعهٔ ۶ عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر، یکی را به‌تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمدش ۵ باشد، این عدد برآورد میانگین درآمد همهٔ افراد است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آن‌گاه صفر به‌عنوان نمونهٔ انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد این افراد برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

- در این مثال، پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟ میانگین جامعه «۲/۵» براساس مثال فوق
- آیا بر اساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟ ممکن است نزدیک باشد و ممکن است خیر
- چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟ اندازه نمونه را بیشتر کنیم.

درست حدس زده‌اید! اگر اندازهٔ نمونه را بیشتر کنیم امکان نزدیک شدن برآورد به پارامتر بیشتر می‌شود. اندازهٔ نمونه را به ۲ افزایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، اگر نمونه‌گیری تصادفی انجام شده شامل درآمدهای ۰ و ۴ باشد، آن‌گاه برآورد میانگین جامعه عدد ۲ است؛ یعنی پارامتر جامعه که مقدار آن ۲/۵ بوده است را ۲ برآورد کرده‌ایم.

- آیا نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۲ وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً ۲/۵ برآورد کند؟ بله {۲،۳} یا {۱،۴} یا {۵،۰}
- آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟ خیر
- بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونهٔ دوتایی داریم؟ $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2}=15$

در جدول زیر، احتمال مشاهده هریک از مقادیر برآورد میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است.

نمونه	{۰،۱}	{۰،۲}	{۰،۳}{۱،۲}	{۰،۴}{۱،۳}	{۰،۵}{۱،۴}{۲،۳}	{۱،۵}{۲،۴}	{۲،۵}{۳،۴}	{۳،۵}	{۴،۵}
$\bar{x}$	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵
احتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

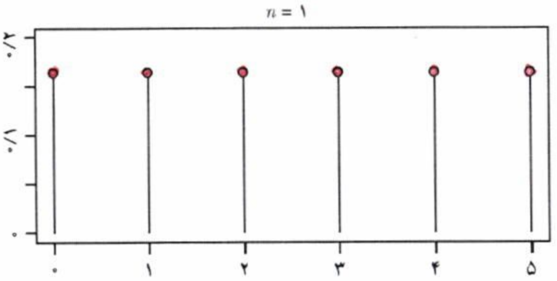
اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازهٔ $n = ۳$ از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم، همانند جدول قبل مقادیر $\overline{x}$ و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید.

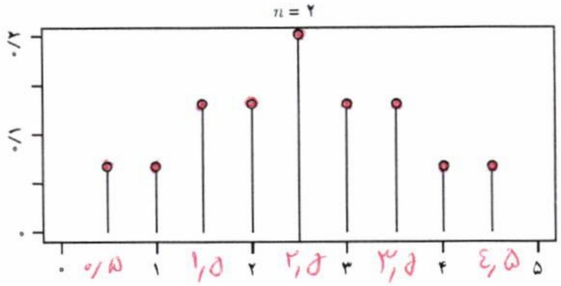
$\binom{۶}{۳} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳!} = ۲۰$ نمونه

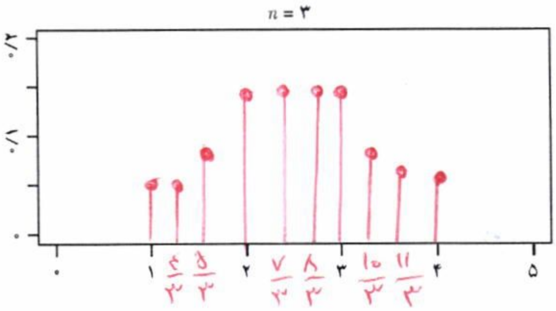
نمونه	{۰,۱,۲}	{۰,۱,۳}	{۰,۱,۴} {۰,۲,۳}	{۰,۱,۵} {۰,۲,۴} {۱,۲,۳}	{۰,۲,۵} {۰,۳,۴} {۱,۲,۴}	{۴,۱,۳} {۱,۵,۲} {۰,۵,۳}	{۲,۳,۴} {۱,۵,۳} {۰,۴,۵}	{۳,۵,۲} {۴,۱,۵}	{۵,۴,۲}	{۳,۴,۵}
$\overline{x}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۹}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱۲}{۳}$
احتمال	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۱}{۲۰}$

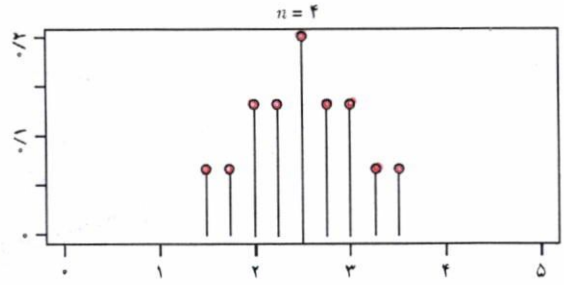
فعالیت

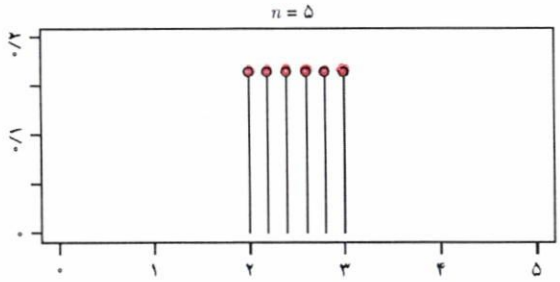
جدول به‌دست آمده از کار در کلاس قبل را برای $n = ۳$ رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد میانگین جامعه، یعنی $\overline{x}$ را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هریک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازهٔ نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به‌اندازه نمونهٔ به‌خصوص، $n = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$ است.

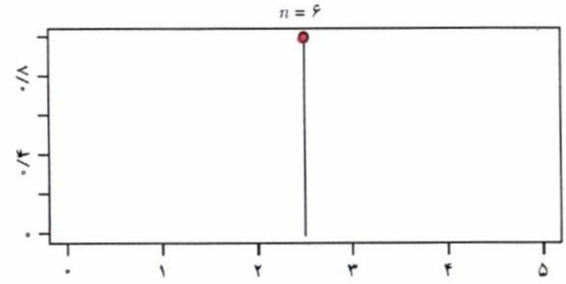












اگر برآورد را بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۳ محاسبه کنیم، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد، نسبت به $n=۱,۲$ بیشتر است. آیا اگر اندازهٔ نمونه از ۳بیشتر شود، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود، باز هم بیشتر می‌شود؟ زمانی که اندازهٔ نمونه به ۶ می‌رسد، برآورد برابر پارامتر می‌شود.

بله بیشتر می‌شود.

همان‌طور که در نمودارها دیده‌اید با افزایش اندازهٔ نمونه برآوردها به میانگین جامعه، که پارامتر است، نزدیک‌تر می‌شوند. به بیان دیگر در هر نمودار با زیاد شدن اندازهٔ نمونهٔ انحراف معیار برآوردهای پارامتر کمتر می‌شود. پس هرقدر انحراف معیار برآورد کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

سؤال اساسی آن است که انحراف معیارِ برآورد میانگین جامعه چقدر است؟ خوشبختانه آمارشناسان پاسخ این سؤال را با رابطهٔ زیر داده‌اند. البته برای سادگی محاسبات، فرض شده که جامعه نامتناهی است.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازهٔ نمونه = انحراف معیار میانگین

هرچند که انحراف معیار جامعه معمولاً معلوم نیست، ولی این رابطه حدس ما را اثبات کرده است. با افزایش اندازهٔ نمونهٔ انحراف معیار برآورد کاهش می‌یابد. به عبارتی دیگر برآورد دقیق‌تر یا خطای کمتری برای برآورد میانگین جامعه داریم.

کار در کلاس

به فعالیت ابتدای درس باز می‌گردیم. اگر از مطالعات سال‌های گذشته بدانیم که انحراف معیار درآمد هر فرد در کشور ۲ میلیون تومان است انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه را برای اندازهٔ نمونه‌های ذکر شده محاسبه کنید.

n	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰
$\sigma_{\bar{x}}$	$\frac{۲}{\sqrt{۲۵}}$	$\frac{۲}{\sqrt{۱۰۰}}$	$\frac{۲}{\sqrt{۱۰۰۰۰}}$
	$=\frac{۲}{۵}$	$=\frac{۲}{۱۰}$	$=\frac{۲}{۱۰۰}$

■ انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه با نمونهٔ ۱۰۰ نفری چند برابر انحراف معیار با نمونهٔ ۱۰۰۰۰ نفری است؟

$\frac{۲}{۱۰} \div \frac{۲}{۱۰۰} = ۱۰$

■ اگر اندازهٔ نمونه ۱۰ برابر شود، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟

$$\sigma'_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{۱۰n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{۱۰}\sqrt{n}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{۱۰}\,\sigma'_{\bar{x}}$$

برآورد بازه‌ای

اگر بعد از یک آزمون ساده از شما سؤال شود نمرهٔ شما چند می‌شود، حتماً بدون تردید نمره‌ای که انتظار آن را دارید می‌گویید. این یک برآورد ذهنی است (که مرتبط به درس فعلی ما نمی‌شود، ولی برای درک ادامهٔ درس مفید است). حال فرض کنید آزمون ساده نبوده و به صحیح بودن برخی پاسخ‌های خود شک دارید. بازهم به‌صورت ذهنی پاسخ می‌دهید، ولی پاسخ شما با شک و تردید همراه است. معمولاً ترجیح می‌دهید به‌جای ذکر یک نمره، بازه‌ای که برای نمرهٔ خود به‌صورت ذهنی ترسیم کرده‌اید بیان کنید. به خاطر اینکه اطمینان خود را نیز از بازه ذکر شده بیان کنید، به ذکر یک درصد اطمینان اکتفا می‌کنید. مثلاً می‌گویید نمرهٔ من بین ۱۶ تا ۱۹ است، با اطمینان ۹۰ درصد. هرچه فاصلهٔ دو عدد بازه کمتر باشد و درصد اطمینان ذکر شده بیشتر، برآورد دقیق‌تر است.

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان[1] پارامتر جامعه عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به **ضریب اطمینان[2]** شهرت دارد.

فعالیت

در فعالیت قبل میانگین داده‌ها ۲/۵ محاسبه می‌شود؛ یعنی برآورد میانگین جامعه ۲/۵ به دست آمده است. چقدر به این برآورد اطمینان داریم؟ برای یافتن پاسخ سؤال به یاد آورید که دقت برآورد میانگین جامعه به اندازه نمونه و انحراف معیار جامعه بستگی داشت. اگر اندازه نمونه زیاد می‌شد، یا انحراف معیار جامعه کم بود، دقت برآورد میانگین بیشتر می‌گردید. بر اساس این دو کمیت پاسخ این سؤال را با رابطهٔ زیر داده‌اند.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه : اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم :

$$\overline{x} - ۲\sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + ۲\sigma / \sqrt{n}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

اگر یک نمونه به اندازهٔ چهار داشته باشیم یک فاصله اطمینان برای میانگین جامعه محاسبه کنید.

مشاهدات ۰,۵,۲,۱

میانگین نمونه $\overline{x} =$ ۲

انحراف معیار ~~نمونه~~ جامعه $\sigma = ۱/۸۷$

$۰/۱۳ < \mu < ۳/۸۷$

$$۲ - \frac{۲(۱/۸۷)}{\sqrt{۴}} = ۲ - ۱/۸۷$$

$$۲ + \frac{۲(۱/۸۷)}{\sqrt{۴}} = ۲ + ۱/۸۷$$

کار در کلاس

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر موردنیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه. بر اساس داده‌های فعالیت اوّل خط فقر را برآورد کنید. انحراف معیار جامعه را برآورد کنید. اگر فرض کنیم که انحراف معیار به دست آمده انحراف معیار جامعه است، یک برآورد فاصله‌ای برای خط فقر محاسبه کنید.

موضوع فعالیت اوّل خط فقر نیست. در این فصل فعالیتی پیرامون خط فقر وجود ندارد.

فعالیت

توضیح

از جمله ساده‌ترین مسائل در آمار استنباطی، برآورد کردن یک نسبت در جامعه است :

- چند درصد از مردم تصمیم دارند در تعطیلات نوروز سال آینده به مسافرت بروند؟
- چند درصد از کشاورزان در سال گذشته از آبیاری قطره‌ای در مزارع خود استفاده کردند؟
- چند درصد از درختان یک باغ آلوده به شته شده‌اند؟
- چند درصد مشتریان یک فروشگاه از برخورد کارمندان راضی هستند؟

۱ــ Confidence Interval

۲ــ Cofidence Coefficient

~~کار در کلاس~~ مثال

یک مؤسسه نظرسنجی معتبر، یک روز قبل از برگزاری انتخابات ریاست‌جمهوری، از یک نمونهٔ ۱۰۰۰ نفری از واجدان شرایط، که به‌طور تصادفی از کلّ کشور انتخاب شده‌اند، پرسیده است که «آیا در انتخابات شرکت خواهید کرد؟»
اگر جواب ۷۰۰ نفر مثبت بوده باشد، یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای درصد شرکت‌کنندگان در انتخابات به دست آورید.

حل : در این مسئله $n=۱۰۰۰$ و $p=\frac{۷۰۰}{۱۰۰۰}=۰/۷$. باید عبارت زیر را نیز محاسبه کنیم :

$$۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}=۲\sqrt{\frac{۰/۷(۱-۰/۷)}{۱۰۰۰}}=۰/۰۲۹$$

$۰/۷-۰/۰۲۹<p<۰/۷+۰/۰۲۹$

$۰/۶۷<p<۰/۷۳$

پس با اطمینان ۹۵ درصد مشارکت در انتخابات بین %۶۷ درصد و %۷۳ درصد خواهد بود.

مثال : همان‌طور که می‌دانید در انتخابات ریاست‌جمهوری اگر نامزدی موفق به کسب بیش از نیمی از آرای رأی‌دهندگان شود، رئیس‌جمهور خواهد شد، ولی اگر هیچ نامزدی این میزان رأی نیاورد دو نامزدی که بیشترین تعداد رأی را دارند به دور دوم خواهند رفت. در برخی سال‌ها رقابت بین نامزدها به شکلی شدید است که از پیش به‌سختی می‌توان حدس زد که نامزد پیشرو آیا در دور اوّل انتخاب خواهد شد یا خیر. در این صورت، نظرسنجی‌ها باید بسیار دقیق‌تر باشد. فرض کنید از پیش بدانیم که آرای یکی از نامزدها نزدیک به ۵۰ درصد است. اگر بخواهیم طول بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی، کمتر از یک درصد باشد نمونهٔ ما باید شامل چند نفر باشد؟

$$\left(-۲\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ ۲\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

حل : طول بازهٔ اطمینان برابر است با :

$$\text{طول بازه}=۲\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}-\left(-۲\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=۲\times۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}$$

و با توجه به اینکه می‌دانیم $p\cong ۰/۵$ پس طول بازهٔ اطمینان تقریباً برابر است با :

$$۲\times۲\sqrt{\frac{۰/۵(۱-۰/۵)}{n}}=\frac{۲}{\sqrt{n}}$$

پس اگر بخواهیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی، برابر یک درصد باشد باید n را آن‌قدر بزرگ بگیریم که $\frac{۲}{\sqrt{n}}$ از ۰/۰۱ کمتر شود؛ یعنی $\frac{۲}{\sqrt{n}}\cong ۰/۰۱$ و این یعنی $n=۲۰۰^۲=۴۰۰۰۰$.

در حالت کلی، قبل از آمارگیری برآوردی از نسبت مورد مطالعه نداریم. پس اگر بخواهیم به‌دقت خاصی برسیم، چگونه باید از پیش بفهمیم که به چند نمونه احتیاج داریم؟ برای پاسخ به این سؤال به این نکته توجه کنید که عبارت $p(۱-p)$ یک چندجمله‌ای درجه دو است و بیشترین مقدار خود را در $p=۰/۵$ می‌گیرد؛ یعنی $p(۱-p)\leq ۰/۵\ (۱-۰/۵)=۰/۵^۲$
لذا به این نتیجه می‌رسیم :

در برآورد بازه‌ای نسبت، بازهٔ زیر شامل بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی است :

$$\left(p-\frac{۱}{\sqrt{n}}\ ,\ p+\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)$$

که در آن $p=\frac{m}{n}$. به بیان دیگر «با اطمینان بیشتر از ۹۵ درصد»، نسبت مورد نظر در این بازه است.

فرض کنید برای به‌دست آوردن نسبتی از اعضای جامعه که ویژگی خاصی را دارند، نمونه‌ای n تایی را به تصادف از جامعه انتخاب می‌کنیم. اگر m تا از نمونه‌ها ویژگی مورد مطالعه را داشته باشند، آن‌گاه می‌توانیم بگوییم:

«تقریباً به نسبت $\frac{m}{n}$ از افراد جامعه آن ویژگی را دارند.»

ولی این گزاره چه معنایی می‌دهد؟

در این تقریب، مقدار خطا چقدر است؟ آمارشناسان در پاسخ به سؤال فرمول زیر را ارائه کرده‌اند:

برآورد بازه‌ای نسبت، با اطمینان ۹۵ درصد:

اگر از جامعه‌ای نسبتاً بزرگ، n نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب کنیم و m تا از آنها ویژگی مورد مطالعه ما را داشته باشند، آن‌گاه نسبت واقعی افرادی از جامعه که آن ویژگی را دارند، با اطمینان ۹۵ درصد، در بازهٔ زیر است:

$$\left(p-۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}\ ,\ p+۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}\right)$$

که در آن $p=\frac{m}{n}$ برآورد پارامتر نسبت ویژگی در جامعه است.

توجه داشته باشید که اندازهٔ بازه اطمینان وابسته به تعداد نمونه، یعنی عدد n، است، ولی ارتباطی با تعداد اعضای جامعه ندارد. اگر بخواهیم بدون تغییر تعداد نمونه با اطمینانی بیش از ۹۵ درصد نسبت را برآورد کنیم، لازم است که به‌جای عدد ۲ ضریبی بزرگ‌تر گذاشته شود.

مثال: فرض کنید از ۴۸ دانش‌آموز مدرسه پرسیده‌ایم که «آیا برای آمدن به مدرسه از وسایل نقلیهٔ عمومی استفاده می‌کنید؟» ۳۶ نفر به سؤال ما جواب مثبت داده‌اند. در این صورت، چند درصد از دانش‌آموزان مدرسه جوابشان به این سؤال مثبت خواهد بود؟ پاسخی با اطمینان ۹۵ درصد مدّ نظر است.

حل. طبق فرض‌های مسئله تعداد نمونه ۴۸ است و ۳۶ نفر ویژگی مورد نظر را داشته‌اند. پس قرار می‌دهیم:

$n=۴۸\ ,\ m=۳۶$

پس $p=\frac{۳۶}{۴۸}=۰/۷۵$. طبق فرمول اخیر باید عبارت زیر را هم محاسبه کنیم:

$$۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}=۲\sqrt{\frac{۰/۷۵(۱-۰/۷۵)}{۴۸}}=۲\sqrt{\frac{۱}{۴۸}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}}=۲\times\frac{۱}{۱۶}=۰/۱۲۵$$

$۰/۷۵-۰/۱۲۵<p<۰/۷۵+۰/۱۲۵$

$\rightarrow ۰/۶۳<p<۰/۸۸$

پس با اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت، نسبت مورد نظر بین ۶۳ درصد و ۸۸ درصد است. طول این بازه ۲۵ درصد است. اگر بخواهیم به‌دقت بهتری برسیم باید تعداد داده‌ها را زیاد کنیم.

با توجه به اینکه در فرمول بازه اطمینان جمله $\sqrt{n}$ در مخرج آمده است، به حقیقت زیر می‌رسیم:

اگر در محاسبهٔ بازه اطمینان نسبت تعداد نمونه‌ها را k برابر کنیم، طول بازهٔ اطمینان تقسیم بر $\sqrt{k}$ می‌شود. پس اگر تعداد نمونه‌ها را ۴ برابر کنیم طول بازهٔ اطمینان نصف می‌شود و اگر تعداد نمونه‌ها را صد برابر کنیم، دقت محاسبه نسبت، یک رقم اعشار بهتر خواهد شد.

تمرین

۱ در اوّلین کار در کلاس، جداول را برای نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازهٔ ۴ و ۵ تشکیل داده و مقادیر $\bar{x}$ را در مقابل احتمال مشاهدهٔ هر مقدار، محاسبه و در جدولی بنویسید.

۲ از اعداد ۰ تا N، ۱۰ عدد به‌تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به‌صورت زیر باشند با دو روش مختلف N را برآورد کنید.

۹	۲	۵	۷	۳	۱۲	۱۱	۹	۸	۵

۳ رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سنّ دانشجویانی که در سال جاری ثبت نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونهٔ تصادفی از سنّ ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سنّ آنها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار طول قد دانشجویان این دانشگاه برابر ۱/۹ سال باشد، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سنّ جامعه را محاسبه کنید.

۴ طول فاصلهٔ اطمینان، برابر تفاضل حدّ بالا و پایین بازهٔ اطمینان است.

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازهٔ نمونه افزایش یابد، طول فاصلهٔ اطمینان .... می‌یابد. چرا؟

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان .... می‌یابد. چرا؟

۵ داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵ ۷۴ ۷۳ ۷۱ ۷۱ ۷۰ ۶۷ ۷۵

۷۹ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۷ ۷۵ ۸۰

۸۷ ۸۶ ۸۶ ۸۳ ۸۲ ۸۲ ۸۱ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل [۶۷,۷۱] و [۷۱,۷۵] و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید).

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام‌یک از نمودارهای صفحهٔ بعد شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب : یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است)

حل تمرین های صفحه‌ی ۱۲۵(آمار و احتمال)

۱ : حل برای نمونه‌ی به اندازه‌ی $n=۴$ از مجموعه‌ی $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

نمونه	{۰,۱,۲,۳}	{۰,۱,۲,۴}	{۰,۱,۲,۵} {۰,۱,۳,۴}	{۰,۲,۳,۴} {۰,۱,۳,۵}	{۰,۲,۳,۵} {۰,۱,۴,۵} {۱,۲,۳,۴}	{۱,۲,۳,۵} {۰,۲,۴,۵}	{۱,۲,۴,۵} {۰,۳,۴,۵}	{۱,۳,۴,۵}	{۲,۳,۴,۵}
جمع	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
$\overline{x}$	۱/۵	۱/۷۵	۲	۲/۲۵	۲/۵	۲/۷۵	۳	۳/۲۵	۳/۵
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$

۱۲۵,۱

حل برای نمونه‌ی به اندازه‌ی $n = ۵$ از مجموعه‌ی $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

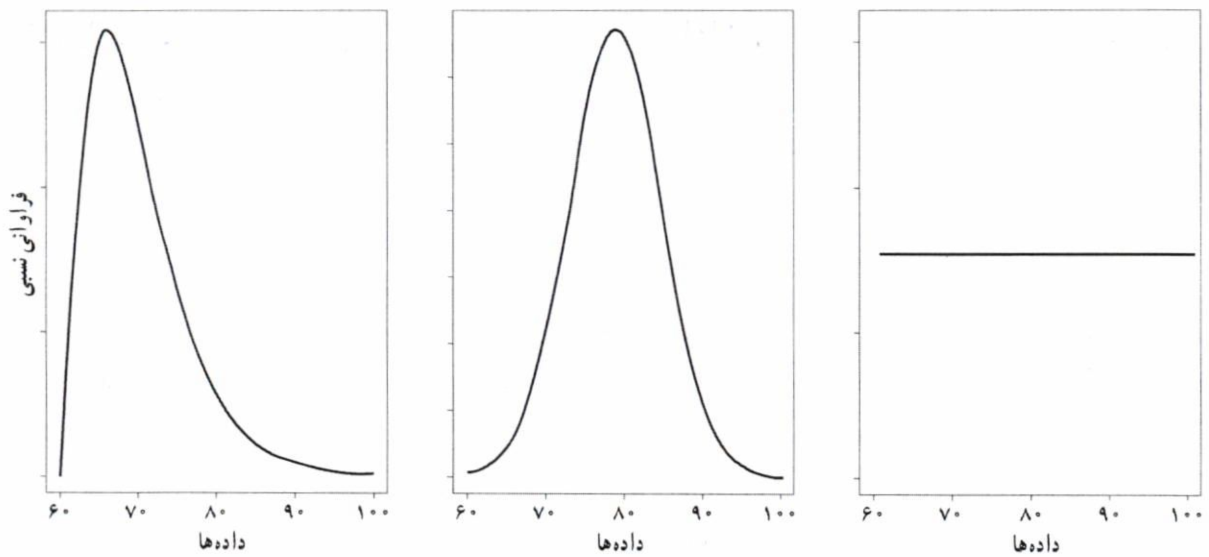
$$\binom{۶}{۵} = ۶$$

نمونه	$\{۰,۱,۲,۳,۴\}$	$\{۰,۱,۲,۳,۵\}$	$\{۰,۱,۲,۴,۵\}$	$\{۰,۱,۳,۴,۵\}$	$\{۰,۲,۳,۴,۵\}$	$\{۱,۲,۳,۴,۵\}$
جمع	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$\bar{x}$	$\frac{۱۰}{۵} = ۲$	$\frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$	$\frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$	$\frac{۱۳}{۵} = ۲/۶$	$\frac{۱۴}{۵} = ۲/۸$	$\frac{۱۵}{۵} = ۳$
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

۳ :

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۱۲۵٫۲



۶ اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۲۴ بگیریم و چند بر فراوانی بافت نگاشت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل μ نشان دهندهٔ میانگین جامعه است، که در اینجا میانگین نمرات همهٔ دانش‌آموزان است، که مجهول است. حال فرض کنید برای ۱۰۰ نمونهٔ ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کرده‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آنها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان‌دهندهٔ میانگین نمونه و پاره‌خط‌های افقی آبی معرف فاصلهٔ اطمینان مربوطه‌اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

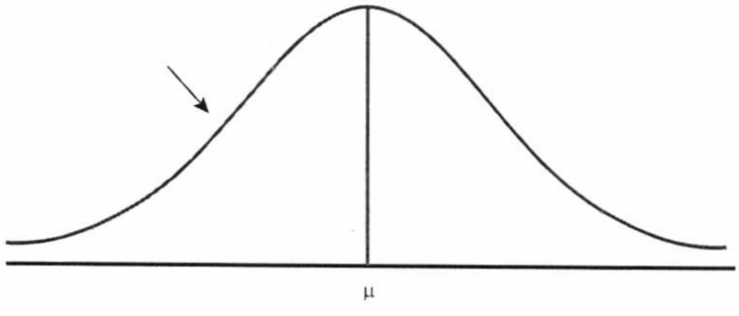
الف) اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟

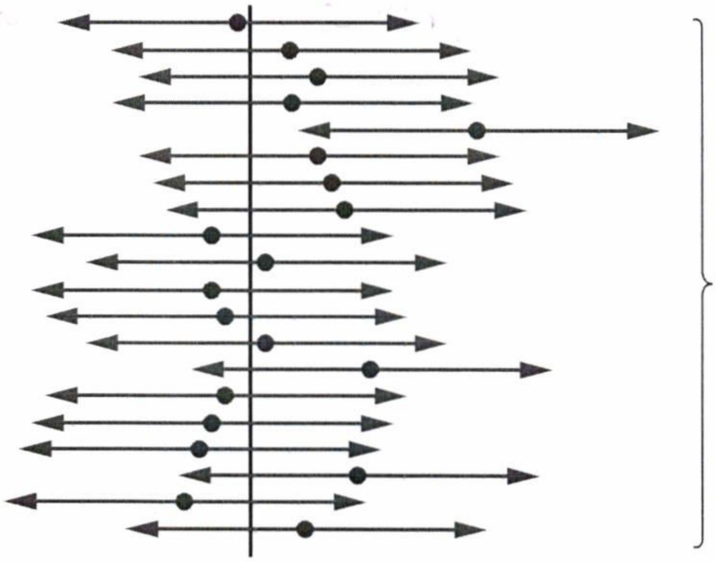
ب) چند درصد از ۲۰ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند؟

پ) اگر ۱۰۰ پاره‌خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آنها خط سیاه را قطع نکنند؟

ت) نتیجه این تمرین تعبیر یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم و ۱۰۰ بازهٔ اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم .... از آنها پارامتر میانگین جامعه را در بر گیرند.

چند بر بافت نگاشت فراوانی میانگین‌ها





۷ شاخص پوسیدگی دندان ($DMFT$) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی به‌طور متوسط هر ایرانی دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پرشده است. براساس نمونه‌ای به اندازهٔ ۴۰۰، این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است ($\overline{x} = ۲$) . اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پرشده به ترتیب برابر ۱ ، ۲ و ۱/۶ باشد، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پرشده محاسبه کنید.

۸ پارامتر میانگین جامعه را با چه آماره‌هایی می‌توان برآورد کرد؟ (۵ آماره نام ببرید)

۹ پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آمارهایی می‌توان برآورد کرد؟

۱۰ در فصل قبل با چه آماره‌هایی آشنا شده‌اید؟ آنها چه پارامترهایی را برآورد می‌کردند؟

۱۱ مدیر تولید یک روزنامه می‌خواهد درصد روزنامه‌های معیوب را بررسی کند. برای این منظور، ۱۰۰ روزنامه به تصادفی انتخاب می‌شود که ۱۶تا از آنها معیوب است. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای درصد روزنامه‌های معیوب محاسبه کنید. اگر بخواهیم طول بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی، برابر یک درصد باشد باید n را چقدر انتخاب کنیم؟

۱۲ مثال‌های این درس را با اندازهٔ نمونه‌های مختلف حل کنید. چه نتیجه‌هایی می‌توان گرفت؟ (مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.)

حل تمرین های مهم صفحه‌ی ۱۲۵(آمار و احتمال)

۳:

$\bar{x} = ۲۲$ و $\sigma = ۱/۹$ و $n = ۲۵$

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \to ۲۲ - \frac{۲(۱/۹)}{\sqrt{۲۵}} < \mu < ۲۲ + \frac{۲(۱/۹)}{\sqrt{۲۵}} \to ۲۱/۲۴ < \mu < ۲۲/۷۶$$

۴:

$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$ فاصله‌ی اطمینان

طول بازه‌ی اطمینان $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} = (\bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}) - (\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}) \leftarrow$

الف : کاهش ، زیرا بین طول بازه‌ی اطمیان با جذر اندازه‌ی نمونه رابطه‌ی معکوس وجود دارد.

ب : افزایش ، زیرا بین طول بازه‌ی اطمیان با انحراف معیار جامعه رابطه‌ی مستقیم وجود دارد.

۷:

دندان های کشیده شده

$\bar{x} = ۲$ و $\sigma = ۱$ و $n = ۴۰۰$

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \to ۲ - \frac{۲(۱)}{\sqrt{۴۰۰}} < \mu < ۲ + \frac{۲(۱)}{\sqrt{۴۰۰}} \to ۱/۹ < \mu < ۲/۱$$

دندان های پوسیده

$\bar{x} = ۲$ و $\sigma = ۲$ و $n = ۴۰۰$

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \to ۲ - \frac{۲(۲)}{\sqrt{۴۰۰}} < \mu < ۲ + \frac{۲(۲)}{\sqrt{۴۰۰}} \to ۱/۸ < \mu < ۲/۲$$

دندان های پرشده

$\bar{x} = ۲$ و $\sigma = ۱/۶$ و $n = ۴۰۰$

$$\bar{x} - \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \to ۲ - \frac{۲(۱/۶)}{\sqrt{۴۰۰}} < \mu < ۲ + \frac{۲(۱/۶)}{\sqrt{۴۰۰}} \to ۱/۸۴ < \mu < ۲/۱۶$$

۱۱:

بازه‌ی اطمینان $\left(p-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

بازه‌ی اطمینان $\left(0/16-2\sqrt{\frac{0/16\times 0/84}{100}}, 0/16+2\sqrt{\frac{0/16\times 0/84}{100}}\right)=(0/086, 0/23)\approx(0/09, 0/23)$

طول بازه‌ی اطمینان $=0/23-0/09=0/14$

اندازه‌ی n $\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{1}{100}\rightarrow n=200^2=40000$

***

با همت :

گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

سال تحصیلی ۹۷– ۹۶

۱۲۷٫۲