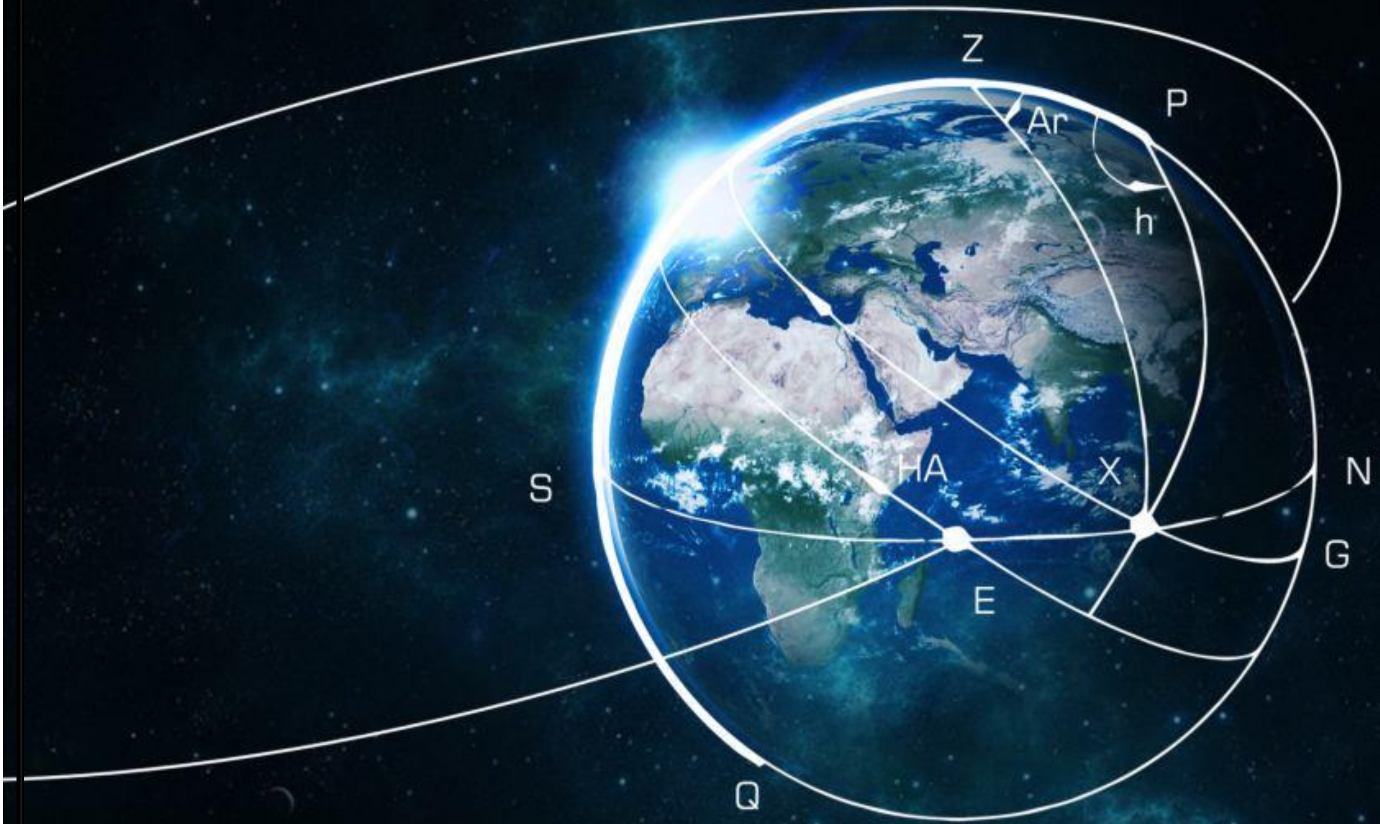
هندسه تحلیلی و جبر خطی



تالیف:

مهندس خانعلی پور

لنگـــــــرود ، خیابان شریعتی

روبروی مسجد جامع، کوچه خواجه نصیر

مجتمع نیکدوست، آموزشـــگاه هاتف

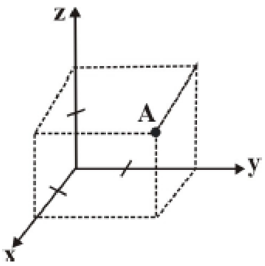
شماره تمـــــاس: ۰۹۱۱۸۴۱۱۵۹۱

بسمه تعالی

معرفی دستگاه مختصات سه بعدی:

فضای سه بعدی R^3، مجموعه‌ای از سه تایی‌های مرتب است به طوری که: $R^3 = R\times R\times R = \{(x,y,z) \mid x\in R, y\in R, z\in R\}$.

فضای R^3 از سه محور x و y و z که دو به دو بر هم عمود هستند تشکیل شده است. این سه محور در نقطه‌ی $O(0,0,0)$ یا همان مبدأ این دستگاه (مبدأ مختصات) متقاطعند.



توسط این سه محور، سه صفحه xoz, yoz, xoy تولید می‌شود.

هر کدام از این محورها و یا صفحه ها را یک زیرفضا می‌نامند.

هر نقطه مانند $A(x,y,z)$ در این دستگاه دارای یک طول (x) و یک عرض (y) و یک ارتفاع (z) می‌باشد.

نکته: مشخص است اگر نقطه‌ای روی یکی از محورهای مختصات مثلاً محور xها باشد، در مختصات مربوط به آن، مولفه‌های y و z برابر با صفر هستند یعنی خواهیم داشت: $(x,0,0)$ و نیز اگر نقطه‌ای رو یکی از صفحات مثلاً صفحه‌ی xoy باشد آنگاه در مختصات آن مولفه‌ی z برابر صفر است و داریم $(x,y,0)$ پس به طور کلی:

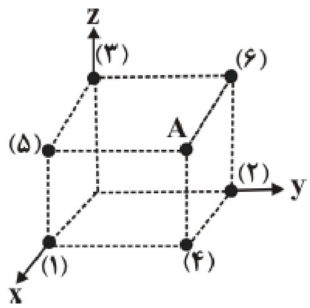
$(x,y,0)$: نقطه روی صفحه xoy	$(x,0,0)$: نقطه روی محور xها
$(0,y,z)$: نقطه روی صفحه‌ی yoz	$(0,y,0)$: نقطه روی محور yها
$(x,0,z)$: نقطه روی صفحه‌ی xoz	$(0,0,z)$: نقطه روی محور zها

به عبارت دیگر هر نقطه که روی یک زیرفضا قرار دارد باید مؤلفه های غیر مرتبط با آن زیر فضا صفر باشد.

تصویر، قرینه و فاصله یک نقطه تا یک زیرفضا:

نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ در فضا مفروض است:

تصویر ها:



۱) تصویر این نقطه بر محور xها برابر است با: $A'(x_0,0,0)$

۲) تصویر این نقطه بر محور yها برابر است با: $A'(0,y_0,0)$

۳) تصویر این نقطه بر محور zها برابر است با: $A'(0,0,z_0)$

۴) تصویر این نقطه بر صفحه‌ی xoy برابر است با: $A'(x_0,y_0,0)$

۵) تصویر این نقطه بر صفحه‌ی xoz برابر است با: $A'(x_0,0,z_0)$

۶) تصویر این نقطه بر صفحه‌ی yoz برابر است با: $A'(0,y_0,z_0)$

قرینه ها:

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به محور xها برابر است با: $A''(x_0,-y_0,-z_0)$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به محور yها برابر است با: $A''(-x_0,y_0,-z_0)$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به محور zها برابر است با: $A''(-x_0,-y_0,z_0)$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به صفحه xoy برابر است با: $A''(x_0,y_0,-z_0)$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به صفحه yoz برابر است با: $A''(-x_0,y_0,z_0)$

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به صفحه xoz برابر است با: $A''(x_0,-y_0,z_0)$

فاصله ها:

فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از محور xها برابر است با: $\sqrt{y_0^{۲}+z_0^{۲}}$

فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از محور yها برابر است با: $\sqrt{x_0^{۲}+z_0^{۲}}$

فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از محور zها برابر است با: $\sqrt{x_0^{۲}+y_0^{۲}}$

فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ ازصفحه xoy برابر است با: $|z_0|$

فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه yoz برابر است با: $|x_0|$

فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه xoz برابر است با: $|y_0|$

☑**نتیجه گیری: برای یافتن:**

✓*تصویر یک نقطه روی یک زیر فضا (منظور از زیر فضا یکی از محور ها یا صفحات مختصات است) کافی است مولفه های ذکر شده را ثابت نگه داریم و بقیه را صفر کنیم.*

✓*قرینه یک نقطه نسبت به یک زیرفضا کافی است مولفه های ذکر شده را ثابت نگه داریم و بقیه را قرینه کنیم.*

✓*فاصله یک نقطه تا یک زیر فضا کافی است در رابطه $\sqrt{x_0^{۲}+y_0^{۲}+z_0^{۲}}$ مولفه های ذکر شده را صفر کنیم.*

📖**نکته:** اگر $B(x_{۲},y_{۲},z_{۲}),A(x_{۱},y_{۱},z_{۱})$ دو نقطه در فضا باشند آنگاه:

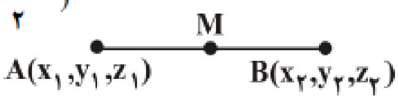
الف: فاصله‌ی بین B,A را از دستور زیر محاسبه می شود: $|AB|=\sqrt{(x_{۲}-x_{۱})^{۲}+(y_{۲}-y_{۱})^{۲}+(z_{۲}-z_{۱})^{۲}}$

در حالت خاص فاصله نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $|OA|=\sqrt{x_0^{۲}+y_0^{۲}+z_0^{۲}}$

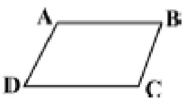
ب: مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB از دستور زیر به دست می‌آید:

$$M=\frac{A+B}{۲}\Rightarrow M=(\frac{x_{۱}+x_{۲}}{۲},\frac{y_{۱}+y_{۲}}{۲},\frac{z_{۱}+z_{۲}}{۲})$$

از قسمت فوق نتیجه می شود:



درهر متوازی‌الاضلاع رابطه‌ی زیر بین مختصات رأس‌های آن برقرار است:



$$\boxed{A+C=B+D}$$

زیرا:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \\ z_A+z_C=z_B+z_D \end{cases}$$

ج: نتیجه: مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به نقطه‌ی $M(\alpha,\beta,\gamma)$ برابر است با:

$$A'=۲M-A=(۲\alpha-x,۲\beta-y,۲\gamma-z)$$

زیرا در این حالت نقطه M وسط دو نقطه A',A قرار می‌گیرد پس:

$$\frac{A'+A}{۲}=M\Rightarrow A'=۲M-A$$

☹تست ۱ : به ازای کدام مقدار m فاصله‌ی نقطه‌ی $A(m+1,3,m-2)$ از محور y ها، کم‌ترین مقدار است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۱-

جاگذاری کنید فاصله را بیابید ...

☺تست۳ : اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $\underline{A}$ از صفحات مختصات برابر ۱۲ و ۰ و ۵ باشد فاصله‌ی نقطه‌ی $\underline{A}$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

☺تست ۴ : اگر نقاط $A(3,2,-1)$ و $B(5,-2,4)$ و $C(1,3,-2)$ سه رأس از متوازی الاضلاع $\underline{ABCD}$ باشند، مختصات رأس $\underline{D}$ کدام است؟

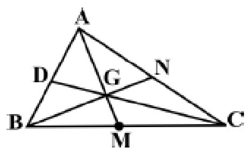
۱) $(7,-3,5)$ ۲) $(-1,7,-7)$ ۳) $(3,-3,5)$ ۴) $(-3,3,-5)$

پاسخ:

$$A+C=B+D \Rightarrow (4,5,-3)=(5,-2,4)+D \Rightarrow D=(-1,7,-7)$$

مختصات مرکز ثقل (محل تلاقی میانه‌ها) مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$G=\frac{A+B+C}{3} \rightarrow G\left|\begin{array}{l} \frac{x_A+x_B+x_C}{3}=x_G \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}=y_G \\ \frac{z_A+z_B+z_C}{3}=z_G \end{array}\right.$$



☺تست ۵ : مختصات مرکز ثقل (محل تلاقی میانه‌ها) مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ که در آن $A(2,-1,3)$ و $B(1,0,2)$ و $C(0,1,1)$ باشد، کدام است؟

۱) $(1,0,2)$ ۲) $(3,0,6)$ ۳) $(\frac{1}{2},0,1)$ ۴) $(\frac{3}{2},0,3)$

پاسخ:

$$G=\frac{A+B+C}{3} \Rightarrow G=(1,0,2)$$

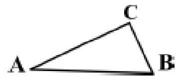
ویژگی های طول:

- اگر $|AB|=۰$ باشد آنگاه A وB بر هم منطبقند.
- همواره $|AB|=|BA|$
- اگر A وB دو نقطه‌ی مشخص از فضا آنگاه به ازاء هر نقطه‌ی دلخواه از فضا مانند C همواره داریم:

(نامساوی مثلث) $\boxed{|AC|+|CB|\geq|AB|}$

اگر نقطه‌ی C روی پاره خط باشد آنگاه: $|AC|+|CB|=|AB|$

و اگر نقطه‌ی C خارج پاره خط باشد آنگاه: $|AC|+|CB|>|AB|$



تست ۶ : اگر $A(۵,۰,۴)$ و $B(۳,۸,۶)$ و نقطه‌ی M نقطه‌ای مفروض در فضا باشد، کم‌ترین مقدار $|MA|+|MB|$ کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) $۶\sqrt{۶}$

پاسخ:

کم‌ترین مقدار $|MA|+|MB|$ زمانی است که M روی خط واصل A و B قرار داشته باشد. یعنی:

یا

$(|MA|+|MB|)_{min}=|AB|$

$\Rightarrow |AB|=\sqrt{۴+۶۴+۴}=۶\sqrt{۲}$

تست ۷ : اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از محورهای ox, oy و oz بترتیب برابر با $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵}$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پیکان:

پاره خط جهت داری است که دو نقطه دلخواه A و B را به هم وصل می کند پیکان $\overline{AB}$ نامیده می شود و مختصات آن از رابطه زیر به دست می آید. $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$

و توجه داشته باشید که : $\overline{AB}=-\overline{BA}$

بردار:

پیکانی است که ابتدای آن مبدا مختصات می باشد. : اگر $A(x_A, y_A, z_A)$ یک نقطه از فضا آنگاه مختصات بردار $\overline{oA}$ برابر است با:

$\overline{oA}=(x_A, y_A, z_A)$

بنابراین مختصات هر بردار، مختصات نقطه‌ی انتهای آن بردار نیز می‌باشد.

تذکر: از این به بعد به جای واژه پیکان از بردار استفاده می کنیم.

دو بردار(پیکان هم ارز یا مساوی): دو بردار که دارای طول و جهت یکسان باشد باشند را دو بردار هم ارز می نامند.در چنین بردار هایی مهم نیست که نقطه شروع کجاست.مهم اینست که این دو بردار به یک اندازه و در یک جهت در جهت محور ها حرکت کنند. **در این بردار ها مولفه های نظیر به نظیر برابرند.**

☺**تست ۸**: نقاط $A\begin{vmatrix}۲\\۲\\-۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۱\\۰\end{vmatrix}$ مفروضند. پیکان $\overline{AC}$ و $\overline{OB}$ هم‌ارزند. مختصات C کدام است؟

۱) $(-۵,۳,۲)$ ۲) $(۵,-۳,۳)$ ۳) $(۵,۳,۲)$ ۴) $(۵,۳,-۲)$

۶ ویژگی در بردار ها:

➢ طول یک بردار

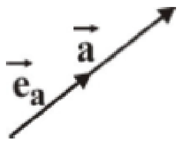
اگر $\bar{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ یک بردار از فضا آنگاه: $|\bar{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$

➢ تصویر و قرینه یک بردار نسبت به یک زیر فضا:

برای این کار دقیقا مانند نقطه عمل می کنیم.یعنی مولفه های ذکر شده را ثابت.برای تصویر بقیه را صفر می کنیم و برای قرینه بقیه را منفی می کنیم. **دقت کنید که برای بردارها فاصله تا زیر فضا بی معنی است.**

➢ بردار یکه (بردار جهت) نظیر یک بردار:

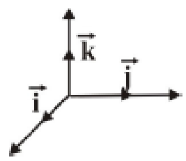
برداری که اندازه‌اش برابر با یک (واحد) باشد بردار یکه نامیده می شود و بردار یکه‌ی متناظر با یک بردار $\bar{a}$ که با نماد $e_{\bar{a}}$ نمایش می‌دهیم برداری است که از حیث دو ویژگی یعنی امتداد و جهت با بردار $\bar{a}$ یکسان باشد اما اندازه‌اش برابر واحد و از اندازه‌ی بردار a مستقل است. هنگامی که بخواهیم بردار یکه‌ی بردار $\bar{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ را به دست آوریم کافی است عکس اندازه‌ی بردار $\bar{a}$ $\left(\frac{۱}{|\bar{a}|}\right)$ را در بردار $\bar{a}$ ضرب کنیم.



یعنی داریم: $\left(\frac{۱}{|\bar{a}|}\right)\bar{a}=e_{\bar{a}}$. (یعنی بردار رو بر اندازش تقسیم می کنیم) (**دقت:** $a=|a|e_a$)

مثال: اگر $a=(۱,۲,۲)$ آنگاه $e_a=\frac{(۱,۲,۲)}{۳}=(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$

➢ بردار یکه محور های مختصات:



بر روی هر یک از محور های z,y,x بردار یکه‌ای وجود دارد که آنها را به ترتیب $\bar{k}=(۰,۰,۱),\bar{j}=(۰,۱,۰),\bar{i}=(۱,۰,۰)$ گوییم.
و می‌توان نوشت: $\bar{a}(a_۱,a_۲,a_۳)=a_۱i+a_۲j+a_۳k$

➢ ضرب یک عدد در یک بردار:

فرض کنیم $\bar{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ یک بردار $r\in R$ یک عدد حقیقی باشد. حاصل ضرب عدد حقیقی r در بردار a یک بردار است که به صورت ra نوشته می‌شود و اینگونه تعریف می‌گردد. $ra=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)$.
اندازه‌ی بردار ra، |r| برابر اندازه‌ی بردار a است: $|ra|=|r|\times|a|$
تعین کنید که در صورت ضرب شدن عدد در بردار چه تغییری در شکل هندسی آن ایجاد می شود؟

شرایط موازی بودن دو بردار:

اگر دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ با هم موازی باشند حتماً یکی ازآن‌ها مضربی از دیگری است و بالعکس.

$$a \parallel b \Leftrightarrow \forall r\in R, \vec{a}=r\vec{b} \Rightarrow (a_1,a_2,a_3)=(rb_1,rb_2,rb_3) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=r$$

اما اگر مولفه یا مولفه هایی صفر شوند رابطه فوق با کمی تغییر به صورت زیر قابل استفاده است:

شرط موازی بودن دو بردار $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ به صورت زیر می باشد:

الف: اگر هیچ مولفه ای صفر نباشد همان رابطه فوق صحیح است یعنی: $\Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

ب: اگر یکی از مولفه ها صفر شود باید مولفه نظیر آن را در بردار دیگر نیز برابر صفر قرار دهیم و برابری نسبت ها را برای بقیه مولفه ها می نویسیم.مثلا اگر $a_1=0$ شود آن گاه شرط توازی به صورت زیر است: $b_1=0, \frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

ج: اگر دو مولفه از یک بردار برابر صفر شوند آنگاه مولفه های نظیر آن ها در بدار دیگر نیز باید برابر صفر شوند **و با مولفه دیگر کاری نداریم**. مثلا اگر $a_1=0,a_2=0$ باشندشرط توازی به صورت روبروست: $b_1=0, b_2=0$

تذکر: اگر سه نقطه‌ی C,B,A روی یک خط راست واقع باشند همواره داریم:

$\overline{AB} \parallel \overline{AC}$

تست۰ ۱: دو بردار $a=(2,1,m+1)$ و $b=(-1,2k,1)$ موازیند، آنگاه: (کنکور آزاد)

۱) $\begin{cases} m=-3 \\ k=-\frac{1}{4} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} m=-3 \\ k=\frac{1}{4} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} m=3 \\ k=\frac{1}{4} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} m=3 \\ k=-\frac{1}{4} \end{cases}$

پاسخ:

$$\frac{2}{-1}=\frac{1}{2k}=\frac{m+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{4} \\ m=-3 \end{cases}$$

جمع و تفریق بردارها

الف: جمع و تفریق تحلیلی (به وسیله‌ی مؤلفه‌ها):

اگر $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3), \vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ دو بردار در فضا باشند در این صورت خواهیم داشت:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3)$$

خاصیت ها:

۱) خاصیت جابجایی $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

۲) عضو بی‌اثر عمل جمع $\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a}$

۳) خاصیت شرکت‌پذیری $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

۴) عضو قرینه در عمل جمع $(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=O$

تست۱۳: اگر $V_1 = 2i+3j+k,\ V_2 = i-j+k$ ، حاصل $\frac{|V_1-2V_2|}{|V_1+2V_2|}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

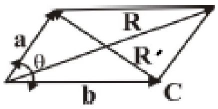
پاسخ:

$$\begin{cases} V_1 = (2,3,1) \\ V_2 = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 - 2V_2 = (0,5,-1) \\ V_1 + 2V_2 = (4,1,3) \end{cases} \Rightarrow |V_1 - 2V_2| = \sqrt{0+25+1} = \sqrt{26} \Rightarrow |V_1 + 2V_2| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$$

$$\frac{|V_1 - 2V_2|}{|V_1 + 2V_2|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = 1$$

ب: جمع و تفریق ترسیمی (از روی شکل):

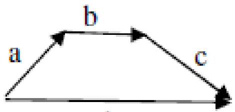
روش اول: روش متوازی الاضلاع: اگر دو بردار ابتدای مشترک داشته باشند آنگاه می توان متوازی الاضلاعی روی دو بردار بنا کرد.در این حالت دو قطر متوازی الاضلاع مطابق شکل بردار های جمع(برآیند) و تفاضل می باشد.

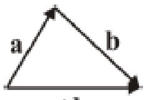


$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{R}' = \vec{a} - \vec{b}$

نکته: دقت کنید که جهت بردار $\vec{a} - \vec{b}$ همواره به سمت بردار اول یعنی a می باشد.

روش دوم: روش مثلث: اگر دو یا چند بردار پشت سر هم قرار گیرند (یعنی انتهای هر کدام ابتدای بردار بعدی باشد) برای یافتن مجموع همه آنها کافی است ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنیم.

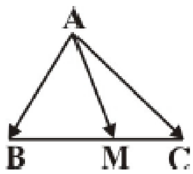




نکته: در هر حالت دیگر باید بردار ها را به یکی از حالات فوق تبدیل کرد.

مثال (مهم): اگر در مثلث ABC یکی از میانه ها $\overrightarrow{AM}$ باشد :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$



نکات روش متوازی الاضلاع

نکته۱: اگر زاویه بین دو بردار θ باشد آنگاه بر حسب مقدار این زاویه مقایسه طول بردارهای مجموع و تفاضل به صورت زیر است.

$$\begin{cases} ۰<\theta<۹۰ \Leftrightarrow |a+b|>|a-b| \\ ۹۰<\theta<۱۸۰ \Leftrightarrow |a+b|<|a-b| \\ \theta=۹۰ \Leftrightarrow |a+b|=|a-b| \end{cases}$$

تست ۱۶: اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=۳$,$|\vec{a}-\vec{b}|=۷$ باشند آنگاه زاویه بین دو بردار کدامست؟

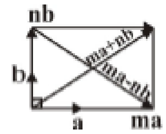
۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

نکته۲: سه حالت خاص:

الف: اگر بردار های a وb بر هم عمود باشندآن‌گاه، متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود و میدانیم در مستطیل قطرها هم طولند و بالعکس.

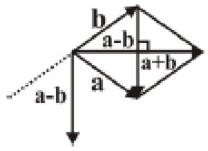
$|a+b|=|a-b| \Leftrightarrow a\perp b$

در حالت کلی اگر m و n اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه داریم:



$|ma+nb|=|ma-nb| \Leftrightarrow a\perp b$

ب: اگر بردار های a وb هم طول باشند آنگاه متوازی الاضلاع بنا شده لوزی خواهد بود و درآن قطر ها بر هم عمودند و بالعکس.



$(a+b)\perp(a-b) \Leftrightarrow |a|=|b|$

همچنین قطرها نیمساز هستند و همواره برای دو بردار هم طول a, b داریم: $\tan\frac{\theta}{۲}=\frac{|a-b|}{|a+b|}$

ج: در مربع، قطرها هم‌اندازه هستند و همچنین قطرها بر هم عمودند.

$(a+b)\perp(a-b)\ ,\ |a+b|=|a-b| \Leftrightarrow |a|=|b|\ ,\ a\perp b$

تست ۱۷: اگر برای دو بردار a وb داشته باشیم که $|e_a+e_b|=۳, |e_a-e_b|=\sqrt{۳}$ آنگاه زاویه بین دو بردار کدامست؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

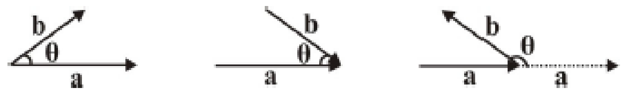
نکات روش مثلث

نکته: اگر بردار ها همگی پشت سر هم باشند و تشکیل یک فضای بسته دهند آنگاه مجموع آن ها صفر است.(چرا؟)

سوال: از روی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰$ چه نتیجه ای می گیریم؟

نکته مهم: زاویه‌ی بین دو بردار در حالتی درست است که دو بردار هم ابتدا باشند:

در سه شکل حالت‌های مختلف بررسی شده است:



جمع و تفریق بردارها، با استفاده از روابط:

جمع بردارها (بدون داشتن شکل): اگر حروف همنام در جمع کنار هم باشند از بین می‌روند:

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$$

حاصل‌ضرب داخلی (عددی – اسکالر – نقطه‌ای – درونی):

ضرب داخلی دو بردار $\bar{a}(a_۱,a_۲,a_۳),\bar{b}(b_۱,b_۲,b_۳)$ به صورت $\bar{a}.\bar{b}$ نمایش داده می شود و از یکی از رابطه های زیر محاسبه می شود:

۱) $a.b=|a||b|\cos\theta$

۲) $a.b=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$

تذکر: رابطه اول تعریف است و رابطه دوم از روی رابطه اول اثبات می‌شود که اثبات آن در انتهای فصل آمده است.

نکته: ضرب دو همواره خلی دو بردار یک عدد حقیقی است.

تست ۱ بردار $\bar{e}$ چقدر باشد تا رابطه‌ی $\bar{a}.\bar{e}=\bar{a}$ برای هر بردار دلخواه $\bar{a}$ درست باشد؟

۱) $(۱,۱,۱)$ ۲) $(\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ ۳) $(۱,۰,۰)$ ۴) چنین برداری وجود ندارد.

پاسخ:

حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک عدد می‌باشد و هرگز برابر بردار نمی‌باشد. گزینه‌ی «۴»

تست ۲۰: اگر $A(۱,-۲,-۳), B(-۱,۲,۳)$ باشند و $\overline{AC}.\overline{BC}=۱۱$ باشدفاصله نقطه C از مبدا کدامست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۲۱: اگر $\bar{a}.\bar{b}+|\bar{a}|.|\bar{b}|=۰$ باشد. زاویه‌ی بین $\bar{a}$ و $\bar{b}$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

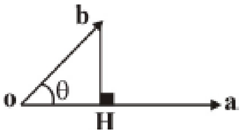
تعبیر هندسی ضرب داخلی:

ضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصلضرب اندازه‌ی یک بردار در طول تصویر بردار دیگر بر روی بردار اول.

$$a.b=|a|.\overline{oH}$$

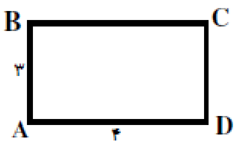
$\overline{oH}$ اندازه‌ی جبری می‌باشد.

یعنی:



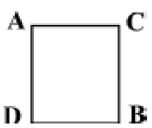
$$\begin{cases}\theta<\frac{\pi}{۲}\leftrightarrow \overline{oH}>۰\\ \theta=\frac{\pi}{۲}\leftrightarrow \overline{oH}=۰\\ \theta>\frac{\pi}{۲}\leftrightarrow \overline{oH}<۰\end{cases}$$

تست ۲۲: در شکل مقابل به طول اضلاع مستطیل ۳ و ۴، حاصل $\overline{AC}.\overline{AB}$ چیست؟



۱) ۹ ۲) -۹
۳) ۵ ۴) -۵

تست ۲۳: در مربع ACBD به قطر ۲، حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}$ برابر است با:



۱) ۸ ۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۰

ویژگی‌های ضرب داخلی در بردارها:

۱- خاصیت جابجایی دارد یعنی:

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

۲- ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است که می‌تواند مثبت یا منفی یا صفر باشدپس مجموعه‌ی بردارها نسبت به عمل ضرب داخلی بسته نیست.

۳- خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی) ندارد: $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c} \neq \vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})$ ضرب داخلی برای سه بردار بی‌معنی است و اساساً تعریف نشده است.

۴- خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری) نسبت به جمع و تفریق بردارها از چپ و راست برقرار است یعنی:

$$\vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c} \qquad (\vec{b} \pm \vec{c}).\vec{a} = \vec{b}.\vec{a} \pm \vec{c}.\vec{a}$$

تذکر: عمل فاکتورگیری در ضرب داخلی برداری‌ها برقرار است یعنی داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c})$$

۵- اگر $r \in R$ یک عدد حقیقی و $\vec{b},\vec{a}$ دو بردار در فضای $R^{۳}$ باشند داریم:

$$r(\vec{a}.\vec{b}) = (r\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(r\vec{b})$$

۶- حاصل‌ضرب داخلی هر بردار در خودش برابر با مربع اندازه‌ی همان بردار می‌باشد یعنی داریم:

$$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^{۲}$$

۷- طرفین یک رابطه را می‌توان در یک بردار ضرب داخلی کرد ولی عکس آن صحیح نیست:

$$\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$$
$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

تست۲۴: اگر $|\vec{a}| = ۲$ و $|\vec{b}| = ۳$ و $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}) = ۷$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

« کاربردهای ضرب داخلی »

کاربرد اول:شرط عمود بودن دو بردار بر هم:

شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار این است که ضرب داخلی آن دو صفر شود.

اثبات:

تست۲۵ : به ازای چه مقدار m بردار $\vec{a}(m^{۲}-۱, m+۲, m+۳)$ بر محور ox عمود است؟

۱) ۱ و ۱−　　۲) ۲−　　۳) ۳−　　۴) ۴

کاربرد دوم : یافتن زاویه میان دو بردار:

با توجه به رابطه $|a||b|\cos\theta = a.b$ داریم: $\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$

تست۲۷ : اگر $A\begin{vmatrix}۱\\۲\\۵\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۱\\۷\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۴\\-۱\\۵\end{vmatrix}$ سه رأس مثلث باشند. زاویه‌ی $\hat{A}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$　　۲) $\frac{\pi}{۴}$　　۳) $\frac{\pi}{۳}$　　۴) $\frac{\pi}{۲}$

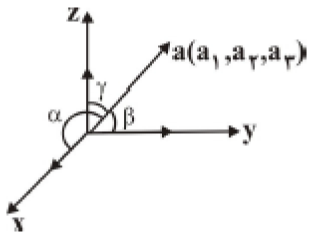
تست ۲۸ : اگر زاویه دو بردار $a(m,۱,۰), b(۱,۰,۱)$ برابر ۶۰ درجه باشد مقدار m کدامست؟

۱) ۱　　۲) ۱−　　۳) ۲　　۴) ۱ و ۱−

کاربرد سوم: زوایای یک بردار با محورهای مختصات:

بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ با محور xها، yها و zها به ترتیب زوایای α، β و γ تشکیل می‌دهد که به این زوایا، اصطلاحاً **زوایای هادی** و به کسینوس این زوایا، **کسینوس‌های هادی** گویند. برای بدست آوردن کسینوس‌های هادی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\bar{a}(a_1,a_2,a_3) \text{ و } \bar{i}(1,0,0) \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\bar{a}\,\bar{i}}{|\bar{a}|.|\bar{i}|}=\frac{a_1}{|\bar{a}|}$$



$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a_1}{|\bar{a}|} \quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\bar{a}|} \quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\bar{a}|}}$$

روابط داخل کادر حفظ شوند.

نکته: اگر بردار $\bar{a}(a_1,a_2,a_3)$ مفروض باشد بردار یکه‌ی آن به صورت $e_{\bar{a}}=(\frac{a_1}{|a|},\frac{a_2}{|a|},\frac{a_3}{|a|})$ خواهد بود و با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$\boxed{e_{\bar{a}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)}$$

مشاهده می گردد که با معلوم بودن کسینوس‌های هادی بردار $\bar{a}$، بردار e_a که حاوی مشخصات، راستا و جهت بردار a می‌باشد به طور منحصر به فرد در فضا مشخص می‌شود.

نکته: از آنجائی که $|e_{\bar{a}}|=1$ پس: $\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$

با توجه به رابطه‌ی فوق در صورتی که دو زاویه از زوایای هادی α,β,γ را داشته باشیم می‌توانیم سومین زاویه را محاسبه نمائیم.

تست ۲۹: زاویه‌ی بردار $\vec{a}=\sqrt{2}i-\sqrt{2}j-2k$ با محور y ها کدام است؟

۱) 60° ۲) 120° ۳) 135° ۴) 45°

پاسخ:

$$\bar{a}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},-2)\,,\ |a|=2\sqrt{2}\Rightarrow \cos\gamma=\frac{a_2}{|a|}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\gamma=120^\circ$$

تست ۳۰: زاویه برداری با محور x و y برابر ۴۵و ۶۰ درجه است.زاویه این بردار با محور zها چقدر است؟

۱)۴۵ ۲)۶۰ ۳)۱۲۰ ۴)گزینه ۲و۳

پاسخ:

$$\alpha=45,\beta=60\Rightarrow\cos^2 45+\cos^2 60+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\gamma=60,120$$

نکته مهم :

۱) اگر مجموع دو زاویه برابر ۹۰ باشد،زاویه دیگر نیز حتما باید ۹۰ باشد.

۲) شرط لازم (نه کافی) برای این‌که α، β و γ زوایای هادی یک بردار باشند این است که جمع هر دو زاویه در بازه $[90,270]$ باشد.

تست ۳۲: به ازای چه مقدار a زاویه بردار $\vec{a}(a^2+1,\frac{3}{a-2},\sqrt{a+5})$ با محور های مختصات به ترتیب برابر ۳۰و۳۰و۶۰ می باشد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴)هیچ مقدار

تست ۳۳: اگر زاویه بردار $\vec{a}(m,m^2,\frac{1}{m})$ با هر سه محور یکسان باشد m کدامست؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۱-   ۴) ۲

تست ۳۴: کدام یک از بردارهای زیر با محور y ها زاویه‌ی بزرگ‌تری می‌سازد؟

۱) $(1,-\sqrt{2},1)$ ۲) $(2,5,-1)$ ۳) $(0,-1,4)$ ۴) $(2,-3,7)$

پاسخ:

گزینه ی «۱»: $\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

گزینه ی «۲»: $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{30}}$

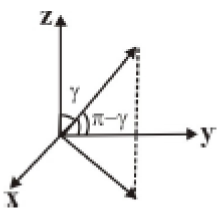
گزینه ی «۳»: $\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

گزینه ی «۴»: $\cos\beta=\frac{-3}{\sqrt{60}}$

$\Rightarrow$ چون $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ از بقیه کم‌تر است. پس مقدار زاویه‌ی آن بیش‌تر از همه است.

زاویه یک بردار با صفحات مختصات:

برای یافتن زاویه یک بردار با یکی از صفحات مختصات کافی است زاویه بردار با محور عمود بر آن صفحه را از ۹۰ کم کنیم.پس:



$\frac{\pi}{2}-\gamma=$ زاویه با صفحه‌ی xoy

$\frac{\pi}{2}-\beta=$ زاویه با صفحه‌ی xoz

$\frac{\pi}{2}-\alpha=$ زاویه با صفحه‌ی yoz

تست ۳۵: زاویه‌ی بردار $\bar v=\sqrt{2}i+j+k$ با صفحه‌ی xoy کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

پاسخ:

$\cos\gamma=\frac{1}{|\bar v|}=\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma=45^\circ \rightarrow$ زاویه با صفحه‌ی xoy $=90-5=45^\circ$

کاربرد چهارم: استفاده از اتحادها در بردارها

$(1):(\bar a+\bar b)^2=|\bar a+\bar b|^2=|\bar a|^2+|\bar b|^2+2\bar a.\bar b$ (اتحاد مربع دو جمله‌ای)

$(2):(\bar a-\bar b)^2=|\bar a-\bar b|^2=|\bar a|^2+|\bar b|^2-2\bar a.\bar b$ (اتحاد مربع دو جمله‌ای)

$(3):(\bar a-\bar b).(\bar a+\bar b)=|\bar a|^2-|\bar b|^2$ (اتحاد مزدوج)

$(4):(\bar a+\bar b+\bar c)^2=|\bar a+\bar b+\bar c|^2=|\bar a|^2+|\bar b|^2+|\bar c|^2+2\bar a.\bar b+2\bar a.\bar c+2\bar b.\bar c$ (اتحاد مربع سه جمله‌ای)

رابطه‌ی جمع و تفریق بردارها در حالت خاص $|\bar a|=|\bar b|$

اگر $|\bar a|=|\bar b|$ **همواره داریم:**

کاربرد در فیزیک : $\begin{cases}(1)|\bar a+\bar b|=2|\bar a|\cos\frac{\theta}{2}=2|\bar b|\cos\frac{\theta}{2}\\(2)|\bar a-\bar b|=2|\bar a|\sin\frac{\theta}{2}=2|\bar b|\sin\frac{\theta}{2}\end{cases}$

تست ۳۶: اگر $|a|=3$ و $|b|=5$ و $|c|=7$ بطوریکه $a+b+c=0$ آنگاه زاویه‌ی بین دو بردار **a** و **b** کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

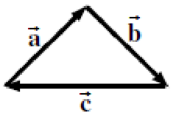
پاسخ:

در این تست طول بردار $a+b$ را به صورت زیر داده است.

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow |a+b|=|-c|=7 \Rightarrow |a+b|^2=49 \Rightarrow |a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta=49 \Rightarrow$$

$$9+25+2(3)(5)\cos\theta=49 \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta=60^\circ}$$

تست ۳۷: در شکل مقابل اندازه‌ی بردارهای $\bar a$ و $\bar b$ و $\bar c$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۶ است. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\bar a$ و $\bar b$ کدام است؟



۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ:

$\bar a+\bar b+\bar c=\bar 0 \Rightarrow \bar a+\bar b=-\bar c$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} |\bar a|^2+|\bar b|^2+2\bar a.\bar b=|-\bar c|^2$

$\Rightarrow 9+25+2\bar a.\bar b=36 \Rightarrow \bar a.\bar b=1$

نکته: برای محاسبه اندازه مجموع و تفاضل دو بردار نیز می‌توان از اتحاد استفاده نمود.

تست ۳۸: اگر $|a|=3$ و $|b|=8$ و $|a+b|=7$ آنگاه طول بردار $(a-b)$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{93}$ ۴) $\sqrt{97}$

کاربرد پنجم: نامساوی کشی – شوارتز $\bar{U}.\bar{V} \le |\bar{U}||\bar{V}|$

تست۳۹: اگر $3x+4y+2z=6$ باشد، کم‌ترین مقدار $9x^2+4y^2+z^2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳۶

پاسخ:

$$\begin{matrix}\bar{u}(3x,2y,z)\\ \bar{v}(1,2,2)\end{matrix} \Rightarrow \bar{u}.\bar{v} \le |\bar{u}|.|\bar{v}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{3x+4y+2z}_{6} \le \sqrt{9}\times\sqrt{9x^2+4y^2+z^2}$$

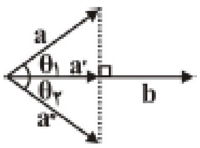
$$\Rightarrow 9x^2+4y^2+z^2 \ge 4 \Rightarrow$$ گزینه‌ی «۲»

کاربرد ششم : تصویر قائم و قرینه بردار a نسبت به بردار b:

اگر a و b دو بردار باشند که 'a تصویر قائم a روی b باشد و "a قرینه‌ی a نسبت به b باشد آن‌گاه داریم:

$$1)\ a' = \frac{a.b}{|b|^2}b$$

$$2)\ a'' = 2a' - a$$



$\theta_1=\theta_2$

نکته: رابطه‌ طول بردارهای تصویر و قرینه با طول بردارهای اصلی:

۱) طول بردار قرینه با طول بردارهای اصلی برابر است: $|a''|=|a|$

۲) طول تصویر بردار a بر روی بردار b از رابطه روبرو بدست می‌آید: $|a'|=\left|\frac{a.b}{|b|}\right|$ و $|\bar{a}'|=|\bar{a}|.\cos\theta$

تست ۳۹: مختصات تصویر بردار $a=(4,-3,1)$ بر راستای برداری که با محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد، کدام است؟

۱) $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ۲) $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$ ۳) $(-3,-3,-3)$ ۴) $(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$

پاسخ:
همانطور که می‌دانیم در تصویر و قرینه‌ی بردار a نسبت به راستای b، طول و جهت بردار b دارای اهمیت نمی‌باشد، بلکه فقط راستای آن مهم می‌باشد. بنابراین می‌توان هر بردار دلخواهی که زاویه‌ی آن با هر سه محور برابرمی‌باشد را نوشت: $b=(k,k,k)(k>0)$

تست ۴۱: اگر زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$، 30° باشد، حاصل $\frac{\vec{a}.\vec{a}''}{\vec{a}\vec{a}'}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

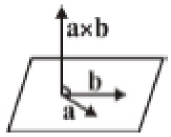
پاسخ:

$$\begin{matrix}|\vec{a}'|=|\vec{a}|.\cos\theta\\|\vec{a}''|=|\vec{a}|\end{matrix} \text{ و } \Rightarrow \frac{\vec{a}.\vec{a}''}{\vec{a}.\vec{a}'}=\frac{|a|.|a''|.\cos 60}{|a|.|a'|.\cos 30}==\frac{\cancel{|a|.|a|}\times\frac{1}{2}}{\cancel{|a|.|a|}.\cos 30\times\cos 30}$$

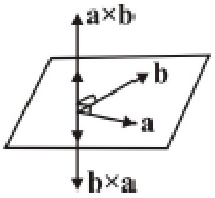
ضرب خارجی دو بردار (ضرب برداری –ضرب برونی) :

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که حاصل آن یک عدد حقیقی است، حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌باشد.

اگر a و b دو بردار باشند، ضرب خارجی a در b به صورت $a\times b$ یا $a\wedge b$ نشان داده می‌شود. $a\times b$ برداری است عمود بر بردارهای a و b.



تعیین جهت بردار $a\times b$**:** اگر انگشتان دست راست در جهت بردار a جمع شده‌ی انگشتان در جهت b باشد، آن‌گاه انگشت شست در جهت $a\times b$ خواهد بود.



تعیین بردار ضرب خارجی : فرض می‌کنیم بردارهای $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ در فضای IR^3 باشند. ضرب خارجی $a\times b$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

خود بردار : $a\times b=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2,-(a_1b_3-a_3b_1),a_1b_2-a_2b_1)$

تذکر: می‌دانیم که $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

محاسبه‌ی اندازه‌ی بردار $a\times b$**:** $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$ که θ زاویه‌ی بین بردارهای a و b است.

طول بردار : $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

می‌توان گفت که اگر دو بردار غیر صفر با هم موازی باشند ضرب خارجی آنها صفر است.

☹**تست ۱۴:** اگر دو بردار a و b عمود بر هم و $a\times b=(-6,3,1)$ و $a=(1,1,3)$. آنگاه مختصات بردار b کدام است؟

۱) $(8,19-9)$ ۲) $(\frac{8}{11},\frac{19}{11},\frac{-9}{11})$ ۳) $(-8,-19,9)$ ۴) $(-\frac{8}{11},\frac{-19}{11},\frac{9}{11})$

پاسخ:

$a=(1,1,3)$

$b=(x,y,z)$

$a\perp b\Rightarrow a.b=0\Rightarrow \underline{x+y+3z=0}\,|(1)$

$$a\times b=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ x & y & z\end{vmatrix}=(z-3y,3x-z,y-x)\Rightarrow(z-3y,3x-z,y-x)=(-6,3,1)\Rightarrow\begin{cases}z-3y=-6\\ 3x-z=3\rightarrow z=3x-3\\ y-x=1\rightarrow y=1+x\end{cases}$$

$$(1):x+y+3z=0 \qquad x+(1+x)+3(3x-3)=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{8}{11}}$$

$$y=1+x=1+\frac{8}{11}=\frac{19}{11}$$

$$z=3x-3=\frac{24}{11}-3=-\frac{9}{11}\Rightarrow b=(\frac{8}{11},\frac{19}{11},\frac{-9}{11})$$

☺تست۴۳: اگر $a = i - ۲k$ و $b = -۲i + j$ ، طول بردار $a \times b$ چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۹}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۲۱}$

☹تست۴۴: a و b دو بردار به طول‌های ۵ و ۸ که کسینوس زاویه‌ی بین آنها برابر $(-\frac{۳}{۵})$ می‌باشد. طول بردار $b \times a$ چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۳۴ ۴) ۲۸

نکته مهم: بردار $a \times b$ بر بردارهای $\vec{b}, \vec{a}$ و همه ترکیبات خطی a, b به صورت $m\vec{a} + n\vec{b}$ عمود است.

☺تست۴۵: اگر a و b دو بردار غیر صفر و ناهمراستا آنگاه حاصل $a.(a \times b)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $|a|$ ۳) $|a \times b|$ ۴) $|a||a \times b|$

☺☺تست۴۶: دو بردار با مولفه های $a(۱,۲,-۱), b(۲,۴,m)$ مفروضند.به ازای کدام مقادیر m اندازه بردار $(a+b).(a \times b)$ برابر صفر است؟(سراسری ۸۸)

۱) $m = -۲$ ۲) $m = \pm ۲$ ۳)هیچ مقدار m ۴)هر مقدار m

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار:

۱) ضرب خارجي و بردار در حالت كلي فاقد خاصيت جابجايي است.

$$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$$

بلكه: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

اثبات: کافی است برای دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ یکبار $\vec{a}\times\vec{b}$ و یکبار $\vec{b}\times\vec{a}$ را طبق فرمول قبل محاسبه کنیم و ببینیم که مؤلفه‌های این دو بردار دقیقا قرینه هم‌اند. (متن دقیق اثبات در صفحه۲۶ کتاب درسی آمده است.بخوانید!)

البته:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

۳) اگر r عدد حقیقی باشد همواره داریم:

$$(r\vec{a})\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(r\vec{b})$$

اثبات: کافی است بردار $r\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$ و بردار $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ را در هم ضرب خارجی کنیم و نهایتا از r فاکتور بگیریم و ببینیم که حاصل عبارت فوق برابر $r(\vec{a}\times\vec{b})$ می‌باشد. (متن دقیق اثبات در صفحه۲۶ و ۲۷ کتاب درسی آمده است.بخوانید!)

۴) ضرب خارجی بردارها نسبت به جمع و تفریق بردارها خاصیت توزیع‌پذیری از چپ و راست را داراست.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}\qquad(\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$$

اثبات: شبیه اثبات های فوق است. (متن دقیق اثبات در صفحه۲۷ کتاب درسی آمده است.بخوانید!)

۵) قانون حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار نیست ولی عکس آن را می‌توان انجام داد یعنی:

$$\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\not\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

۶) خاصیت بسته بودن در مجموعه‌ی بردارهای واقع در فضا برقرار است، زیرا حاصل‌ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌شود.

۷) ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است یعنی: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}\Rightarrow 2\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

۸) دو بردار غیر صفر $\vec{a},\vec{b}$ موازیند اگر و فقط اگر حاصلضرب خارجی آنها صفر شود.

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Rightarrow|a||b|\sin\theta=0\Rightarrow\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0,\pi\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۹) در ضرب خارجی حق استفاده از اتحادها را نداریم.

تست ۴۸: اگر $|\vec{a}|=4$ و $|\vec{b}|=5$ و $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=20$ باشد، زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

تست ۴۹: اگر بردارهای $\bar a$ و $\bar b$ یکّه باشند و زاویه‌ی بین آن‌ها 30° باشد، اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی بردارهای $2\bar a+3\bar b$ و $\bar a-\bar b$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

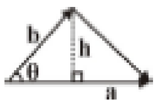
پاسخ:

$$(\bar a-\bar b)\times(2\bar a+3\bar b)=\underbrace{\cancel{2\bar a\times\bar b}}_{0}+3\bar a\times\bar b-2\bar b\times\bar a-\underbrace{\cancel{3\bar b\times\bar b}}_{0}$$

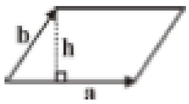
$$3\bar a\times\bar b+2\bar a\times\bar b=5\bar a\times\bar b\xrightarrow{\text{اندازه}}5|\bar a\times b|=5|a|.|b|.\sin 30$$

$$=5\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\quad\Rightarrow$$ گزینه‌ی «۱»

نکته: از این رابطه ها می توان طول ارتفاع ها را هم محاسبه کرد:



ارتفاع وارد بر ضلع a: $|h|=\frac{|a\times b|}{|a|}$



ارتفاع وارد بر ضلع a: $|h|=\frac{|a\times b|}{|a|}$

ضرب داخلی و خارجی بردارهای یکّه

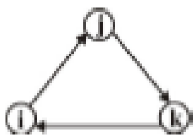
اگر i و j و k یکّه‌های محورهای مختصات باشند داریم:

۱) $i.i=j.j=k.k=1$

۲) $i.j=j.k=k.i=0$

۳) $i\times i=j\times j=k\times k=0$

۴) اگر با توجه به شکل مقابل، ساعتگرد حرکت کنیم، داریم:



$i\times j=k\,,\ j\times k=i\,,\ k\times i=j$

و اگر پادساعتگرد حرکت کنیم، داریم:

$j\times i=-k\,,\ k\times j=-i\,,\ i\times k=-j$

تست ۵۰: مساحت مثلثی که رئوس آن $A(1,2,0)$ و $B(0,1,1)$ و $C(-1,3,3)$ می‌باشند، کدام است؟

۱) $3\sqrt2$ ۲) $2\sqrt3$ ۳) $2\sqrt{13}$ ۴) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

پاسخ:

$$\begin{cases}AB=(-1,-1,1)\\AC=(-2,1,3)\end{cases}\Rightarrow AB\times AC=(-4,1,-3)\Rightarrow S=\frac{1}{2}|AB\times AC|=\frac{1}{2}\sqrt{26}$$

تست ۵۱: اگر دو بردار $d=(0,3,2)$ و $d'=(2,-1,-4)$ قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، آنگاه مساحت آن کدام است؟

۱) $\sqrt{38}$ ۲) $\sqrt{19}$ ۳) $2\sqrt{19}$ ۴) $\sqrt{14}$

پاسخ:

در این تست داریم : $d\times d'=\begin{vmatrix}0&3&2\\2&-1&-4\end{vmatrix}=(-10,4,-6)$

$$|d\times d'|=2S\Rightarrow\sqrt{100+16+36}=2S\Rightarrow$$

$$2\sqrt{38}=2S\Rightarrow\boxed{\sqrt{38}=S}$$

تست ۵۲: مساحت متوازی‌الاضلاعی که سه رأس از آن نقاط $(۱,۲,۱)$ و $(۰,۱,۱)$ و $(۱,-۱,۲)$ باشد،چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ:

یکی از مطالبی که در این تست دانش آموزان را دچار وقفه می‌کند این است که شاید این نقاط بطور متوالی نباشند در این صورت شاید یکی از بردارهایی که با این سه نقطه ساخته می شود، بجای ضلع متوازی الاضلاع، قطر آن باشد، که طبق نتیجه فوق تاثیری در جواب آخر ایجاد نمی شود.

بنابراین اگر: $A(۱,۲,۱)\quad B(۰,۱,۱)\qquad C(۱,-۱,۲)$

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

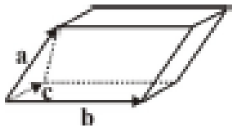
$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-۱,-۱,۰)\\ \overrightarrow{AC}=(۰,-۳,۱)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۱,۱,۳)$$

$$S=\sqrt{۱+۱+۹}=\sqrt{۱۱}$$

کاربردها :

۱) محاسبه حجم متوازی السطوح و منشور و هرم:

متوازی‌السطوح، یک ۶ وجهی است که وجوه مقابل آن با یکدیگر موازی هستند. مثلاً هر مکعب یا مکعب مستطیل یک متوازی‌السطوح است. فرض کنید متوازی‌السطوحی با یال‌های a، b و c که هم‌رأس‌اند و هر سه بردار را در اختیار داشته باشیم.

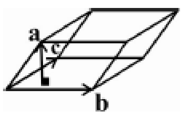


- حجم این متوازی‌السطوح برابر است با: $V=|a.(b\times c)|$ و اندازه‌ی ارتفاع برابر است با: $\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}$.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

- حجم منشور مثلث‌القاعده: $V=\frac{۱}{۲}|a.(b\times c)|$
- حجم چهاروجهی (هرم) به یال‌های a، b و c برابر است با: $V=\frac{۱}{۶}|a.(b\times c)|$ منشور $V=\frac{۱}{۳}\times$

تست ۵۳: در متوازی السطوح شکل مقابل $b=۴i+۲j+k$ و $c=۳i+j+k$ و حجم آن برابر $\underline{۴\sqrt{۳}}$ آنگاه ارتفاع وارد بر قاعده (h) چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

$$b\times c=\begin{vmatrix}۴&۲&۱\\۳&۱&۱\end{vmatrix}=(۱,-۱,-۲)$$

مساحت قاعده: $S=\sqrt{۱+۱+۴}=\underline{\sqrt{۶}}$

$$V=S.h\Rightarrow ۴\sqrt{۳}=\sqrt{۶}\times h\Rightarrow h=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=\underline{\underline{۲\sqrt{۲}}}$$

۲) هم‌صفحه بودن سه بردار

اگر سه بردار در یک صفحه باشند، آن‌گاه متوازی‌السطوحی تشکیل نمی‌دهند یا به عبارت دیگر حجمی تشکیل نمی‌دهند. یعنی:

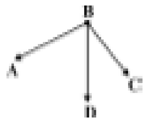
$a.(b\times c)=۰ \Leftrightarrow$ سه بردار a، b و c هم‌صفحه‌اند.

تست۳۷: به ازاء کدام مقدار m چهار نقطه‌ی $A(-۱,۲,m)$ و $B(۲,۰,۱)$ و $c(۱,۲,۳)$ و $D(۳,۱,۴)$ هم‌صفحه می‌باشند؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

پاسخ:

با این چهار نقطه سه بردار تشکیل می‌دهیم آنگاه اگر سه بردار هم صفحه باشند آنگاه این چهار نقطه نیز هم صفحه خواهند بود.



$$\boxed{\vec{BA}.(\vec{BD}\times\vec{BC})=۰}$$

تذکر: در این تست مبدأ بردارها را نقطه‌ای قرار می‌دهیم که در مختصات آن مجهول m وجود ندارد (برای راحتی محاسبه)

$$\vec{AB}=(۳,-۲,۱-m)\ ,\vec{BC}=(-۱,۲,۲),\ \vec{BD}=(۱,۱,۳)\Rightarrow\vec{BC}\times\vec{BD}=\begin{vmatrix}-۱ & ۲ & ۲\\ ۱ & ۱ & ۳\end{vmatrix}=(۴,۵,-۳)$$

$$\vec{AB}.(\vec{BC}\times\vec{BD})=(۳,-۲,۱-m).(۴,۵,-۳)=۰\Rightarrow ۱۲-۱۰-۳+۳m=۰\Rightarrow m=\frac{۱}{۳}$$

ضرب مضاعف:

اگر بردارهای a، b و c در فضای $IR^{۳}$ باشند، آن‌گاه $a\times(b\times c)$ را حاصل‌ضرب سه‌گانه‌ی برداری یا ضرب مضاعف سه بردار a، b و c می‌نامند و روابط زیر برقرار می باشند:

۱) $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$

۲) $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$ (اثبات در تمرینهای پایان فصل)

توجه ۱: در رابطه ۱ عبارت‌های $a.c$، $a.b$ و $b.c$ اعداد حقیقی هستند که در بردارهای a، b و c ضرب شده‌اند.

توجه ۲: در رابطه ۲ می‌توانید از شکل مقابل استفاده کنید: