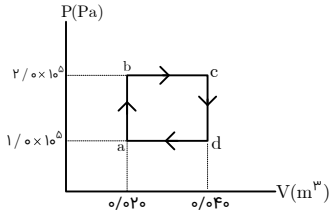
### ۵-۷ ماشین‌های گرمایی

۱۵) یک مول از یک گاز کامل تک اتمی در یک ماشین گرمایی آرمانی، چرخه‌ای را مطابق شکل روبه‌رو می‌پیماید. مطلوب است:




الف) کار انجام شده توسط ماشین گرمایی در پیمودن یک چرخه.

کار انجام شده در یک چرخه برابر است با مساحت داخل چرخه بنابراین:

$$|W_{\text{چرخه}}| = S = (۲-۱)\times ۱۰^۵ \times (۰/۰۴ - ۰/۰۲) = ۲۰۰۰ \xrightarrow[\text{چرخه ساعتگرد}]{} W = -۲۰۰۰J$$

ب) گرمای مبادله شده در فرآیند abc.

$$Q_{abc} = Q_{ab} + Q_{bc}$$

فرایند ab هم‌حجم است. $\rightarrow Q_{ab} = \frac{۳}{۲}V\Delta P = \frac{۳}{۲}\times ۰/۰۲ \times (۲-۱)\times ۱۰^۵ = ۳۰۰۰J \rightarrow ۳/۰kJ$

فرایند bc هم‌فشار است. $\rightarrow Q_{bc} = \frac{۵}{۲}P\Delta V = \frac{۵}{۲}\times ۲\times ۱۰^۵ \times (۰/۰۴ - ۰/۰۲) = ۱۰۰۰۰J \rightarrow Q_{bc} = ۱۰kJ$

$$\rightarrow Q_{abc} = ۳/۰ + ۱۰ = ۱۳kJ \rightarrow Q_{abc} = ۱۳kJ$$

پ) گرمای مبادله شده در فرایند cda

$$Q_{cda} = Q_{cd} + Q_{da}$$

فرایند cd هم‌حجم است. $\rightarrow Q_{cd} = \frac{۳}{۲}\times V\Delta P = \frac{۳}{۲}\times ۰/۰۴ \times (۱-۲)\times ۱۰^۵ = -۶۰۰۰J \rightarrow Q_{cd} = -۶/۰kJ$

فرایند bc هم‌فشار است. $Q_{da} = \frac{۵}{۲}P\Delta V = \frac{۵}{۲}\times ۱\times ۱۰^۵ \times (۰/۰۲ - ۰/۰۴) = -۵۰۰۰J \rightarrow Q_{da} = -۵/۰kJ$

$$\rightarrow Q_{cda} = -۶/۰ - ۵/۰ = -۱۱kJ \rightarrow Q_{cda} = -۱۱kJ$$

ت) تغییر انرژی درونی در فرآیند abc

$$\Delta U_{abc} = \Delta U_{ab} + \Delta U_{bc} = (Q_{ab} + W_{ab}) + (Q_{bc} + W_{bc})$$

فرایند ab هم‌حجم است. $\rightarrow W_{ab} = ۰$

فرایند bc هم‌فشار است. $\rightarrow W_{bc} = -P\Delta V = -۲\times ۱۰^۵ \times (۰/۰۴ - ۰/۰۲) = -۴/۰kJ \rightarrow W_{bc} = -۴kJ$

$$\Delta U_{abc} = (۳/۰ + ۰) + (۱۰ - ۴/۰) = ۹/۰kJ \rightarrow \Delta U_{abc} = ۹/۰kJ$$

۱۶) یک ماشین گرمایی آرمانی در هر چرخه $۱۰۰/۰J$ گرما از منبع دما بالا می‌گیرد و $۶۰/۰J$ گرما به منبع دما پایین می‌دهد.

الف) بازده این ماشین چقدر است؟

$$Q_H = ۱۰۰J \ , \ Q_L = -۶۰J \ , \ t = ۰/۵s \ , \ \eta = ? \ , \ P = ?$$

$$\eta = ۱ - \frac{|Q_L|}{Q_H} = ۱ - \frac{۶۰}{۱۰۰} = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴ \rightarrow \eta = ۴۰\%$$

ب) اگر هر چرخه $۰/۵۰۰s$ طول بکشد، توان خروجی این ماشین چقدر است؟

$$|W| = Q_H - |Q_L| = ۱۰۰ - ۶۰ = ۴۰J \ , \ P = \frac{|W|}{t} = \frac{۴۰}{۰/۵} = ۸۰W \rightarrow P = ۸۰W$$

۱۷) بازده‌ی یک ماشین آرمانی ۲۵/۰ درصد است و در هر چرخه $۸/۲\times۱۰^{۳}J$ کار انجام می‌دهد.

الف) $Q_H$ و $|Q_L|$ را در هر چرخه ماشین به دست آورید.

$$\eta=\frac{۲۵}{۱۰۰}=۰/۲۵\ ,\ |W|=۸/۲\times۱۰^{۳}J\ ,\ Q_H=?\ ,\ Q_L=?$$

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\rightarrow Q_H=\frac{|W|}{\eta}=\frac{۸/۲\times۱۰^{۳}}{۰/۲۵}=۳۲/۸\times۱۰^{۳}J\rightarrow Q_H=۳۲/۸\times۱۰^{۳}$$

$$Q_H=|W|+|Q_L|\rightarrow|Q_L|=Q_H-|W|=۳۲/۸\times۱۰^{۳}-۸/۲\times۱۰^{۳}=۲۴/۶\times۱۰^{۳}\rightarrow|Q_L|=۲۴/۶\times۱۰^{۳}J$$

ب) اگر با تنظیم موتور، بازده‌ی ماشین به ۳۰/۰ درصد افزایش یابد، $Q_H$ و $|Q_L|$ به ازای همان مقدار کار چقدر می‌شود؟

$$\eta=\frac{۳۰}{۱۰۰}=۰/۳\ ,\ |W|=۸/۲\times۱۰^{۳}J\ ,\ Q_H=?\ ,\ Q_L=?$$

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\rightarrow Q_H=\frac{|W|}{\eta}=\frac{۸/۲\times۱۰^{۳}}{۰/۳}\simeq۲۷/۳\times۱۰^{۳}J\rightarrow Q_H\simeq۲۷/۳\times۱۰^{۳}J$$

$$|Q_L|=Q_H-|W|=۲۷/۳\times۱۰^{۳}-۸/۲\times۱۰^{۳}=۱۹/۱\times۱۰^{۳}J\rightarrow|Q_L|=۱۹/۱\times۱۰^{۳}J$$

۱۸) یک ماشین‌بخار در هر دقیقه $۱/۵\times۱۰^{۵}MJ$ گرما از دیگ بخار دریافت می‌کند و $۹/۰\times۱۰^{۴}MJ$ گرما در چگالنده از دست می‌دهد. با فرض آرمانی بودن این ماشین:

الف) کار انجام شده توسط ماشین در هر دقیقه چند مگاژول است؟

$$Q_H=۱/۵\times۱۰^{۵}MJ\ ,\ |Q_L|=۹\times۱۰^{۴}MJ=۰/۹\times۱۰^{۵}MJ\ ,\ |W|=?$$

$$|W|=Q_H-|Q_L|=۱/۵\times۱۰^{۵}-۰/۹\times۱۰^{۵}=۰/۶\times۱۰^{۵}MJ\rightarrow|W|=۶\times۱۰^{۴}MJ$$

ب) بازده این ماشین چقدر است؟

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}=\frac{۶\times۱۰^{۴}}{۱/۵\times۱۰^{۵}}=۰/۴=۴۰\%\rightarrow\eta=۴۰\%$$

۱۹) یک ماشین گرمایی درون‌سوز در هر چرخه ۸/۰۰kJ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می‌کند و ۲/۰۰kJ کار تحویل می‌دهد. گرمای حاصل از سوخت $۵/۰\times۱۰^{۴}J/g$ است و ماشین در هر ثانیه ۴۰/۰ چرخه را می‌پیماید. کمیت‌های زیر را حساب کنید.

الف) بازده ماشین.

$$Q_H=۸kJ=۸\times۱۰^{۳}J\ ,\ |W|=۲kJ=۲\times۱۰^{۳}J,\ \text{گرمای سوختن}=۵\times۱۰^{۴}\frac{J}{g}\ \text{هر ثانیه ۴۰ چرخه،}$$

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}=\frac{۲\times۱۰^{۳}}{۸\times۱۰^{۳}}=۰/۲۵\rightarrow\eta=۲۵\%$$

ب) با فرض آرمانی بودن ماشین، گرمای تلف شده در هر چرخه.

$$|Q_L|=Q_H-|W|=۸\times۱۰^{۳}-۲\times۱۰^{۳}=۶\times۱۰^{۳}J\rightarrow|Q_L|=۶\times۱۰^{۳}J$$

پ) سوخت مصرف شده در هر چرخه.

$$\frac{۱}{x}=\frac{۵\times۱۰^{۴}}{۸\times۱۰^{۳}}\rightarrow x=\frac{۸\times۱۰^{۳}}{۵\times۱۰^{۴}}=۰/۱۶g\rightarrow x=۰/۱۶g$$

ت) توان ماشین.

$$|W|=۴۰\times۲\times۱۰^{۳}=۸\times۱۰^{۴}\ ,\ t=۱S\ ,\ P=\frac{|W|}{t}\rightarrow P=\frac{۸\times۱۰^{۴}}{۱}=۸\times۱۰^{۴}W\ \text{توان ماشین}$$

### ۵-۸ قانون دوم ترمودینامیک (به بیان ماشین گرمایی)

۲۰) مخترعی مدعی است ماشینی ساخته که بین نقطه‌های جوش (در فشار متعارف جو) و انجماد کار می‌کند و بازده‌ی آن ۷۰/۰ درصد است. آیا ادعای این مخترع می‌تواند درست باشد؟ توضیح دهید.

بازده کارنوی ماشین گرمایی که بین این دو دما کار می‌کند را بدست می‌آوریم:

$$T_H = ۱۰۰ + ۲۷۳ = ۳۷۳K \quad , \quad T_L = ۰ + ۲۷۳ = ۲۷۳K \quad , \quad \eta = ?$$

$$\eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲۷۳}{۳۷۳} = ۱ - ۰/۷۳ = ۰/۲۷ \rightarrow \eta = ۲۷\%$$

با توجه به اینکه حداکثر بازده ماشین گرمایی که بین این دماها کار می‌کند، ۲۷ درصد است، ادعای این مخترع نادرست است.

۲۱) می‌خواهیم بازده یک ماشین کارنو را افزایش دهیم. با مثالی عددی بررسی کنید آیا بهتر است که دمای منبع دما بالا را افزایش دهیم یا دمای منبع دما پایین را به همان مقدار کاهش دهیم؟

با فرض $T_H = ۴K$ و $T_L = ۲K$ بازده کارنو برابر است با:

$$\text{کارنو} \quad \eta = ۱ - \frac{T_L}{T_H} = ۱ - \frac{۲}{۴} = ۰/۵$$

اگر دمای منبع بالا را یک درجه افزایش دهیم داریم:

$$\text{کارنو} \quad \eta = ۱ - \frac{۲}{۴+۱} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

اگر دمای منبع پایین را یک درجه کاهش دهیم داریم:

$$\text{کارنو} \quad \eta = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

با توجه به نتایج به دست آمده در مثال فوق برای افزایش بازده ماشین کارنو بهتر است دمای منبع دما پایین را کاهش دهیم.

۲۲) مخترعی ادعا می‌کند چهار ماشینساخته است که هر یک بین منبع‌های با دمای ۳۰۰K و ۴۰۰K کار می‌کنند. داده‌های هر ماشین در هر چرخه عبارت‌اند از:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ماشین A | $Q_H = ۲۰۰۰J$ | $Q_L = -۱۷۵۰J$ | $W = -۴۰J$ |
| ماشین B | $Q_H = ۵۰۰J$ | $Q_L = -۲۰۰J$ | $W = -۴۰۰J$ |
| ماشین C | $Q_H = ۶۰۰J$ | $Q_L = -۲۰۰J$ | $W = -۴۰۰J$ |
| ماشین D | $Q_H = ۱۰۰J$ | $Q_L = -۹۰J$ | $W = -۱۰J$ |

با فرض آرمانی بودن این چهار ماشین:

الف) کدام یک از ماشین‌ها قانون اول ترمودینامیک را نقض می‌کنند؟

قانون اول ترمودینامیک همان قانون اول پایستگی انرژی است یعنی در هر ماشین گرمایی $Q_H = |Q_L| + |W|$ بنابراین:

$$\text{ماشین A} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۱۷۵۰ + ۴۰ = ۱۷۹۰J \\ Q_H = ۲۰۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H \neq |Q_H| + |W| \rightarrow \text{قانون اول نقض می‌شود}$$

$$\text{ماشین B} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰J \\ Q_H = ۵۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H \neq |Q_L| + |W| \rightarrow \text{قانون اول نقض می‌شود}$$

$$\text{ماشین C} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰J \\ Q_H = ۶۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H = |Q_L| + |W| \rightarrow \text{قانون اول برقرار است}$$

$$\text{ماشین D} : \begin{cases} |Q_L| + |W| = ۱۰ + ۹۰ = ۱۰۰J \\ Q_H = ۱۰۰J \end{cases} \rightarrow Q_H = |Q_L| + |W| \rightarrow \text{قانون اول برقرار است}$$

ب) کدام یک از ماشین‌ها قابل ساخت هستند؟

حداکثر بازده یک ماشین گرمایی که بین دو منبع گرم و سرد با دمای ۳۰۰K و ۴۰۰K کار می‌کند برابر است با:

$$\eta_{\text{کارنو}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{300}{400} = \frac{1}{4} = 0/25 \rightarrow \eta = 0/25$$

بازده ماشین‌های C و Dرا محاسبه کرده و با بازده کارنو مقایسه می‌کنیم، ماشینی قابل ساخت است که در آن هم قضیه کارنو و هم قانون اول ترمودینامیک برقرار باشد:

$$\eta_C = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{200}{600} = 1 - 0/33 = 0/67 \rightarrow \eta_C > \eta \rightarrow$$ قضیه کارنو برقرار نیست:

$$\eta_D = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{900}{100} = 1 - 0/9 = 0/1 \rightarrow \eta_D < \eta \rightarrow$$ قضیه کارنو برقرار است:

۲۳) یک ماشین کارنو بین دماهای $280/0K$ و $360/0K$ کار می‌کند. این ماشین در هر چرخه $750/0J$ گرما از منبع دما بالا می‌گیرد.

الف) در هر چرخه $|W|$ چقدر است؟

$$T_L = 280K \ , \ T_H = 360K \ , \ Q_H = 750J \ , \ |W| = ? \ , \ |Q_L| = ?$$

$$\eta_{\text{کارنو}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{280}{360} = 1 - \frac{28}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \rightarrow |W| = \eta Q_H = \frac{2}{9} \times 750 = \frac{500}{3} \rightarrow |W| = \frac{500}{3} J$$

ب) در هر چرخه چقدر گرما به منبع دما پایین داده می‌شود؟

$$|Q_L| = Q_H - |W| \rightarrow |Q_L| = 750 - \frac{500}{3} = \frac{1750}{3} \rightarrow |Q_L| = \frac{1750}{3} J$$

### ۹-۵ قانون دوم ترمودینامیک و یخچال‌ها

۲۴) قرار است نیم‌ساعت دیگر مهمانی برای شما برسد در حالی که هیچی یخی را برای نوشابه‌ی خود آماده نکرده‌اید. به سرعت $1/00L$ آبِ $10/0°C$ را در قالب‌های یخ می‌ریزید و در فریزر قرار می‌دهید. آیا در زمانی که مهمان می‌رسد، یخ خواهید داشت؟ ضریب عملکرد یخچال ۴/۰ و توان آن $110/0W$ است. (فرض کنید همه‌ی توان الکتریکی یخچال صرف سرد کردن ویخ زدن آب می‌شود.)

$$V = 1L = 1 \times 10^{-3} m^3 \ , \ c_{\text{آب}} = 4200 \frac{J}{kg.K} \ , \ L_{F_{\text{یخ}}} = 333/7 \times 10^3 \frac{J}{kg} \ , \ \rho_{\text{آب}} = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$K = 4 \ , \ P = 110W \ , \ t = ?$$

با استفاده از رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ جرم آب را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho V = 1000 \times 1 \times 10^{-3} = 1kg \rightarrow m = 1kg$$

مقدار گرمایی که $1kg$ آب $10°C$ از دست می‌دهید تا به یخ $0°C$ تبدیل شود به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q = mc\Delta\theta - mL_F = 1 \times 4200 \times (0 - 10) - (1 \times 333/7 \times 10^3)$$

$$= -42000 - 333700 = -375700 \rightarrow |Q_L| = 375700J$$

کاری که یخچال از آب برای یخ زدن می‌گیرد:

کاری که یخچال برای یخ‌زدن آب انجام می‌دهد:

$$K=\frac{|Q_L|}{W}\rightarrow W=\frac{|Q_L|}{K}=\frac{۳۷۵۷۰۰}{۴}=۹۳۹۲۵J\rightarrow W=۹۳۹۲۵J$$

زمانی که طول می‌کشد تا آب یخ بزند:

$$P=\frac{W}{t}\rightarrow t=\frac{W}{P}=\frac{۹۳۹۲۵}{۱۱۰}=۸۵۳S\rightarrow t\simeq ۱۴\,min$$

با توجه به اینکه تقریباً ۱۴ دقیقه طول می‌کشد تا همه آب به یخ $۰^\circ C$ تبدیل شود زمان کافی برای درست کردن یخ خواهیم داشت.

۲۵) یک کولر گازی در هر دقیقه $۹/۰\times۱۰^۴J$ گرما از اتاق می‌گیرد و در همان مدت $۱/۳\times۱۰^۵J$ گرما به فضای بیرون می‌دهد. با فرض آرمانی بودن کولر،

الف) توان مصرفی این کولر چند وات است؟

$$t=۶۰s\ ,\ |Q_L|=۹\times۱۰^۴J\ ,\ Q_H=۱۳\times۱۰^۴J\ ,\ P=?\ ,\ K=?$$

برای بدست آوردن توان مصرفی کولر ابتدا باید کار انجام شده توسط کولر را محاسبه کرد:

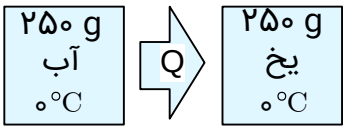
در یخچال‌ها : $|Q_H|=Q_L+W\rightarrow W=|Q_H|-Q_L=۱۳\times۱۰^۴-۹\times۱۰^۴=۴\times۱۰^۴J\rightarrow W=۴\times۱۰^۴J$

$$P=\frac{W}{t}=\frac{۴\times۱۰^۴}{۶۰}=\frac{۲}{۳}\times۱۰^۳W\rightarrow P=\frac{۲}{۳}\times۱۰^۳W$$ توان مصرفی کولر

ب) ضریب عملکرد آن چقدر است؟

$$K=\frac{|Q_L|}{W}=\frac{۹\times۱۰^۴}{۴\times۱۰^۴}=۲/۲۵\rightarrow K=۲/۲۵$$ ضریب عملکرد کولر

۲۶) فرض کنید $۲۵۰/۰g$ آب صفر درجه سلسیوس در اختیار داریم. می‌خواهیم با قرار دادن این آب در یخچال، یخ تهیه کنیم. یخچال در اتاقی قرار دارد که دمای آن $۲۲/۰^\circ C$ است. دمای داخل یخچال در $-۵/۰^\circ C$ ثابت نگه داشته شده است. کمترین مقدار انرژی الکتریکی که باید به یخچال داده شود تا یخ صفر درجه‌ی سلسیوس تشکیل شود، چقدر است؟




$$m=۲۵۰g=۰/۲۵kg\ ,\ T_H=۲۲+۲۷۳=۲۹۵K\ ,\ T_L=-۵+۲۷۳=۲۶۸K\ ,\ W=?$$

یخ $۳۳۳/۷\times۱۰^۳\ \frac{J}{kg}$

$$Q_L=-mL_F=-۰/۲۵\times۳۳۳/۷\times۱۰^۳=-۸۳۴۲۵J\rightarrow Q_L=۸۳۴۲۵J$$

کمترین مقدار انرژی داده شده به یخچال زمانی است که یخچال بیشترین بازده را داشته باشد: کارنو K=K

ضریب عملکرد یخچال:

$$K_{\text{کارنو}}=\frac{T_L}{T_H-T_L}=\frac{۲۶۸}{۲۹۵-۲۶۸}=\frac{۲۶۸}{۲۷}\simeq ۱۰\rightarrow K_{\text{کارنو}}=K=۱۰$$

$$K=\frac{|Q_L|}{W}\rightarrow W=\frac{|Q_L|}{K}=\frac{۸۳۴۲۵}{۱۰}=۸۳۴۲/۵J\rightarrow W=۸۳۴۲/۵J$$