درس اوّل : ریشه و توان

در سال های قبل با مفهوم توان یک عدد آشنا شدید و می دانید که ریشه و توان دو مفهوم مرتبط به هم هستند. مثلاً می دانیم که $۲^۳ = ۸$ لذا می نویسیم $\sqrt[۳]{۸} = ۲$ و می گوییم ۲ ریشه‌ی سوّم عدد ۸ است. در این درس این مفهوم را توسعه می دهیم.

قسمت اوّل : رابطه‌ی ریشه گیری و توان رسانی

فرض کنید که n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک و a و b اعداد حقیقی نامنفی باشند و که $a^n = b$ آنگاه a را ریشه‌ی n ام عدد b می نامند و آن را با نماد $\sqrt[n]{b}$ نمایش می دهند. عدد طبیعی n را فرجه‌ی رادیکال می گویند.

$$a^n = b \to \sqrt[n]{b} = a$$

اگر n فرد باشد، a و b می توانند منفی باشند.

مثال ۱:

$$۲^۳ = ۸ \to \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

یعنی ۲ ریشه‌ی سوّم عدد ۸ است.

مثال ۲:

$$(-۵)^۳ = -۱۲۵ \to \sqrt[۳]{-۱۲۵} = -۵$$

یعنی ۵- ریشه‌ی سوّم عدد ۱۲۵- است.

مثال ۳:

$$۲^۵ = ۳۲ \to \sqrt[۵]{۳۲} = ۲$$

یعنی ۲ ریشه‌ی پنجم عدد ۳۲ است.

مثال ۴:

$$۳^۲ = ۹ \to \sqrt{۹} = ۳$$

یعنی ۳ ریشه‌ی دوّم عدد ۹ است.

توجه: اگر فرجه‌ی رادیکال عدد ۲ باشد، معمولاً آن را نمی نویسند. یعنی $a^۲ = b \to \sqrt{b} = a$ واضح است که

الف : هر عدد مثبت دو ریشه‌ی دوّم دارد. برای مثال ۲۵ دو ریشه‌ی دوّم دارد. یکی $+\sqrt{۲۵}=۵$ و دیگری $-\sqrt{۲۵}=-۵$

ریشه‌ی دوم نامنفی عدد b را جذر a نیز می خوانند.

ب : اعداد منفی ریشه‌ی دوّم ندارند. برای مثال ۹- ریشه‌ی دوّم ندارد. زیرا هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که بتوان ۲ برسد و ۹- بدست آید. در اصطلاح گویند $\sqrt{-۹}$ تعریف نشده یا نامعین است.[1]

تمرین ۱ : برای هر مورد نمایش رادیکالی بنویسید.

الف) $۲^۴=۱۶$

ب) $(-۵)^۳=-۱۲۵$

ج) $(-۳)^۲=۹$

د) $(\frac{۲}{۳})^۵=\frac{۳۲}{۲۴۳}$

تمرین ۲ : برای هر مورد نمایش توانی بنویسید.

الف) $\sqrt{۸۱}=۹$

ب) $\sqrt[۳]{-۸}=-۲$

ج) $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$

د) $\sqrt[۴]{۱۶}=۲$

تمرین ۳ : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۶۴}=$

۲) $\sqrt[۴]{۱۶}=$

۳) $\sqrt[۵]{۳۲}=$

۴) $\sqrt{۱۶}=$

۵) $\sqrt[۴]{۸۱}=$

۶) $\sqrt{-۲۵}=$

۷) $\sqrt[۳]{-۸}=$

۸) $\sqrt[۴]{-۸۱}=$

۹) $\sqrt{۱/۴۴}=$

تمرین ۴ : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۲۱۶}=$

۲) $\sqrt[۳]{-۸}=$

۳) $\sqrt[۵]{-۳۲}=$

۴) $\sqrt{-۳۶}=$

۵) $\sqrt[۴]{-۸۱}=$

۶) $-\sqrt{۱۰۰}=$

۷) $\sqrt{(-۲)^۴}=$

۸) $\sqrt[۴]{(-۹)^۲}=$

۹) $\sqrt[۷]{۱}=$

[1] . این خاصیت برای رادیکال های با فرجه‌ی زوج نیز درست است.

تمرین ۵ : عبارت های زیر را کامل کنید.

الف: هر عدد مثبت دارای .... ریشه‌ی چهارم است که .... یکدیگرند. عددهای منفی ریشه‌ی چهارم ندارند. صفر فقط دارای یک ریشه‌ی چهارم است.

ب : هر عدد مثبت یا منفی دارای .... ریشه‌ی پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه‌ی پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشه‌ی پنجم آن منفی است. عدد صفر فقط دارای یک ریشه‌ی پنجم است.

ج : اعداد ۳ و .... ریشه های چهارم عدد .... می باشند.

د : عدد .... ریشه‌ی پنجم عدد ۲۴۳ است.

***

تذکر :

۱ : از این به بعد هر کجا عبارت $\sqrt[n]{x}$ مورد استفاده قرار گیرد. منظور x و n هایی می باشند که رادیکال قابل تعریف باشد.

۲ : ریشه‌ی دوّم هر عدد مثبت را **جذر** و ریشه‌ی سوّم را **کعب** می نامند.

۳ : ریشه‌ی nام عدد یک برابر یک است. $\sqrt[n]{۱}=۱$

نتیجه : برای هر عبارت یا هر عدد حقیقی مانند u همواره داریم:

$$\sqrt{u^{۲}}=|u|$$

تمرین ۶ : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt{(-۵)^{۲}}=$　　۲) $\sqrt{۷^{۲}}=$　　۳) $-\sqrt{(-۳)^{۲}}=$

تمرین ۷ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^{۲}}=$　　ب) $\sqrt{(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})^{۲}}=$　　ج) $\sqrt{۸-۲\sqrt{۱۵}}=$

تمرین ۸ : اگر $a=\sqrt[۴]{۱۶}$ در این صورت حاصل عبارت $a^{۳}+۵$ را بیابید.

***

توجه: اعدادی از قبیل عدد $\sqrt[3]{۲۵}$ مقدار دقیقی ندارند. مقدار تقریبی آن را می توان به کمک ماشین حساب به صورت زیر نوشت:

مقدار تقریبی $\sqrt[3]{۲۵}$ تا یک رقم اعشار برابر ۲/۹ است.

مقدار تقریبی $\sqrt[3]{۲۵}$ تا دو رقم اعشار برابر ۲/۹۲ است.

مقدار تقریبی $\sqrt[3]{۲۵}$ تا سه رقم اعشار برابر ۲/۹۲۴ است.

گاهی نیز لازم است بدانیم که این قبیل اعداد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند.

تمرین ۹ : دو عدد صحیح متوالی بنویسید که $\sqrt{۲۰}$ بین آنها باشد.

حل : واضح است که عدد ۲۰ بین دو عدد مربع کامل ۱۶ و ۲۵ قرار دارد. یعنی : $۱۶ < ۲۰ < ۲۵$

پس $\sqrt{۱۶} < \sqrt{۲۰} < \sqrt{۲۵}$. لذا $۴ < \sqrt{۲۰} < ۵$

تمرین ۱۰ : در جای خالی چه عددی قرار دهیم که نامساوی برقرار باشد.

$$۴ < \sqrt{....} < ۵$$

حل : اگر قرار دهیم $۴ < \sqrt{x} < ۵$ آنگاه می توان نوشت $۱۶ < x < ۲۵$. در این صورت هر عدد از بازه‌ی $(۱۶,۲۵)$ می تواند جواب مسئله باشد.

لیست اعداد مربع و مکعب کامل اعداد طبیعی

عدد	مربع	مکعب
۱	۱	۱
۲	۴	۸
۳	۹	۲۷
۴	۱۶	۶۴
۵	۲۵	۱۲۵
۶	۳۶	۲۱۶
۷	۴۹	۳۴۳
۸	۶۴	۵۱۲
۹	۸۱	۷۲۹
۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰

***

تمرین برای حل :

۱۱ : دو عدد صحیح متوالی بنویسید که $\sqrt[3]{۲۰}$ بین آنها باشد.

۱۲ : دو عدد صحیح متوالی بنویسید که $\sqrt{۳۳}+۱$ بین آنها باشد.

۱۳ : دو عدد صحیح متوالی بنویسید که $\sqrt[3]{۳۵}-۲$ بین آنها باشد.

۱۴ : در جای خالی چه عددی قرار دهیم که نامساوی برقرار باشد. $۵ < \sqrt{....} < ۶$

۱۵ : در جای خالی چه عددی قرار دهیم که نامساوی برقرار باشد. $۱۰<\sqrt[۳]{....}<۱۱$

۱۶ : چند عدد صحیح وجود دارد که می توانند به جای x قرار گیرند، تا نامساوی زیر برقرار شود؟

$$۳<\sqrt[۳]{x}<۴$$

((توجه))
اعداد بزرگتر از یک، وقتی به توان برسند، بزرگتر می شوند.
اعداد بین صفر و یک ، هرچه به توان برسند، کوچکتر می شوند.
در مورد ریشگی آنها چه می توانید بگویید؟

۱۷ : در هر مورد یکی از علامت های ($<$یا $=$ یا $>$) را در جای خالی قرار دهید.

الف) $(۰/۵)^۳ \; \square \; (۰/۵)^۲$ ب) $\sqrt[۳]{۶۴} \; \square \; \sqrt{۶۴}$

ج) $\sqrt{۰/۲۵} \; \square \; \sqrt[۳]{۰/۱۲۵}$ د) $\sqrt[۴]{۳^۴} \; \square \; (\sqrt[۴]{۳})^۴$

۱۸ : اگر $a>۱$ در این صورت یکی از علامت های ($<$یا $=$ یا $>$) را در جای خالی قرار دهید.

الف) $a^۲ \; \square \; a$ ب) $\sqrt{a} \; \square \; a$ ج) $\sqrt[۳]{a} \; \square \; \sqrt{a}$

۱۹ : اگر $۰<a<۱$ در این صورت یکی از علامت های ($<$یا $=$ یا $>$) را در جای خالی قرار دهید.

الف) $a^۲ \; \square \; a$ ب) $\sqrt{a} \; \square \; a$ ج) $\sqrt[۳]{a} \; \square \; \sqrt{a}$

۲۰ : مثالی بیان کنید که نشان دهد تساوی زیر نادرست است. (a و b اعداد حقیقی غیر منفی هستند.)

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

***

قسمت دوّم : توان رسانی با اعداد گویا

برای تعریف توان گویای عدد حقیقی مثبت a به شکل زیر عمل می کنیم.

اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n عددی طبیعی مخالف یک باشد، عبارت $a^{\frac{۱}{n}}$ را با نماد $\sqrt[n]{a}$ نمایش می دهند.

$$a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

مثال: $۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$, $۶^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۶}$

توجه : طبق تعریف فوق در توان کسری باید پایه مثبت باشد، در غیر این صورت، توان کسری را فعلاً تعریف نمی کنیم، لذا عبارت هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۲}{۴}}$ را در این کتاب تعریف نمی کنیم.

نتیجه : اگر a یک عدد حقیقی مثبت و m و n دو عدد طبیعی غیر یک باشند. در این صورت داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال: $$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} \quad , \quad 6^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{6^4}$$

تمرین ۲۱ : عبارت $9^{1/5}$ را به صورت رادیکالی بنویسید. سپس مقدار آن را به دست آورید.

تمرین ۲۲ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$4^{\frac{3}{2}} =$$

تمرین ۲۳ : برای هر عدد گویای r ثابت کنید که $1^r = 1$

حل : فرض کنید که $r = \frac{m}{n}$ (n و m دو عدد صحیح و $n \neq 0$) در این صورت :

$$1^r = 1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1$$

قوانین توان رسانی با ، توان های صحیح برای توان های گویا نیز برقرار است. یعنی اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا باشند. در این صورت:

$$a^r . b^r = (ab)^r \qquad a^r . a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

تمرین ۲۴ : برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی و مثبت a نشان دهید که $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

حل :

$$a^{-r} = (a^{-1})^r = (a^r)^{-1} = \frac{1}{a^r}$$

تمرین ۲۵ : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و s و r دو عدد گویای دلخواهی باشند. ثابت کنید که :

$$1)\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad 2)\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

حل :

۱ :

$$(\frac{a}{b})^r = (a \times \frac{۱}{b})^r = (a)^r \times (\frac{۱}{b})^r = (a)^r \times (b^{-۱})^r = (a)^r \times (b^r)^{-۱} = a^r \times \frac{۱}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$$

۲ :

$$\frac{a^r}{a^s} = a^r \times \frac{۱}{a^s} = a^r \times a^{-s} = a^{r+(-s)} = a^{r-s}$$

تمرین برای حل :

۲۶ : توان های کسری زیر را در صورت امکان به صورت رادیکالی بنویسید.

۱) $۲^{\frac{۱}{۳}} =$ ۳) $(-۵)^{\frac{۱}{۳}} =$ ۵) $۸۱^{\frac{۱}{۴}} =$

۲) $۳^{\frac{۱}{۲}} =$ ۴) $۴^{\frac{۱}{۴}} =$ ۶) $(\frac{۱}{۱۲۵})^{\frac{۱}{۳}}$

۲۷ : رادیکال های زیر را در صورت امکان به صورت توان کسری بنویسید.

۱) $\sqrt[۷]{۳^۲} =$ ۳) $\sqrt[۵]{(-۳)^۲} =$ ۵) $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} =$

۲) $\sqrt[۳]{-۱} =$ ۴) $\sqrt{۲^۵} =$ ۶) $\sqrt[۵]{۳^{-۲}}$

۲۸ : حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $۸^{\frac{۲}{۳}}$

۲۹ : کدام مورد نادرست حل شده است؟

الف) $(-۳۲)^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

ب) $\sqrt[۵]{-۳۲} = \sqrt[۵]{(-۲)^۵} = -۲$

ج) $\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = -۲$

***

قسمت سوّم : قواعد ریشه گیری

با توجه به تعریف ارائه شده برای توان گویای یک عدد حقیقی و در صورت وجود شرایط تعریف، اعمال زیر را می توان بیان کرد.

۱) ویژگی ضرب دو رادیکال

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

مثلاً :

$$\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۲\times۴}=\sqrt[۳]{۸}=۲$$

$$\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۵\times۴}=\sqrt[۳]{۲۰}$$

۲) ویژگی تقسیم دو رادیکال

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

مثلاً :

$$\frac{\sqrt[۳]{۱۶}}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۳]{۸}=۲$$

توجه : بنابر دو ویژگی فوق، نتیجه می شود که شرط ضرب یا تقسیم دو عبارت رادیکالی این است که فرجه ها برابر باشند.

۳) ویژگی توان رسانی یک رادیکال

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

مثلاً :

$$(\sqrt[۳]{۸})^۲=\sqrt[۳]{(۸)^۲}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

۴) ویژگی برابر توان و فرجه

الف) $\sqrt[n]{a^n}=a$ اگر n فرد باشد.　　　ب) $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ اگر n زوج باشد.

مثلاً :

$\sqrt[۳]{(-۲)^۳}=-۲$ و $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=|-۲|=۲$

۵) سایر ویژگی ها

ویژگی	مثال
الف) $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$ اگر b مثبت باشد.	$۲\sqrt[۳]{۵}=\sqrt[۳]{۲^۳\times ۵}$
ب) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}\quad ;\quad p>۰$	$\sqrt[۳]{۵^۲}=\sqrt[۳\times۴]{۵^{۲\times۴}}=\sqrt[۱۲]{۵^۸}$
ج) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۵}}=\sqrt[۳\times۴]{۴}=\sqrt[۱۲]{۴}$

تمرین ۳۰ : هر یک از قوانین فوق را ثابت کنید.

اثبات ۱ :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=a^{\frac{۱}{n}}\times b^{\frac{۱}{n}}=(ab)^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{ab}$$

اثبات۲ :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{۱}{n}}}{b^{\frac{۱}{n}}}=(\frac{a}{b})^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

اثبات ۳ :

$$(\sqrt[n]{a})^m=(a^{\frac{۱}{n}})^m=(a)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

اثبات ۶ :

$$b\sqrt[n]{a}=b(a^{\frac{۱}{n}})=(b^n)^{\frac{۱}{n}}(a^{\frac{۱}{n}})=(b^n a)^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{b^n a}$$

اثبات ۷ :

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

اثبات ۸ :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{(a)^{\frac{۱}{n}}}=((a)^{\frac{۱}{n}})^{\frac{۱}{m}}=a^{\frac{۱}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

نتیجه : به کمک قوانین بیان شده برای رادیکال ها به سادگی نتیجه می شود که :

الف) $a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}=ab\sqrt[n]{xy}$ ب) $\frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{y}}=\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ ج) $(\sqrt[n]{a^m})^k=\sqrt[n]{a^{mk}}$

تمرین ۳۱ : حاصل عبارت های زیر را به کمک خواص رادیکال محاسبه کنید.

۱) $\sqrt[۳]{-۳}\times\sqrt[۳]{۹}=$

۲) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۴}=$

۳) $\sqrt{۵}\times\sqrt{۲۰}=$

۴) $\sqrt{۲۰۰}\div\sqrt{۲}=$

۵) $\sqrt[۳]{۱۶}\div\sqrt[۳]{۲}=$

۶) $\dfrac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}}=$

۷) $\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=$

۸) $\sqrt[۳]{\sqrt{۷۲۹}}=$

۹) $(\sqrt[۳]{۲})^{۶}\times(\sqrt{۳})^{۴}=$

۱۰) $\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۵]{۱۸}\times\sqrt[۵]{۱۶}=$

۱۱) $\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt[۶]{۲}=$

۱۲) $\sqrt[۱۲]{۳^{۴}}\times\sqrt[۶]{۳^{۸}}\times\sqrt[۶]{۹}=$

۱۳) $\sqrt[۳]{-۲\sqrt{۱۶}}=$

تمرین ۳۲ : در هر مورد ضریب را به داخل رادیکال ببرید و حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۱) $۳\sqrt{۵}=$

۲) $۲\sqrt[۳]{۵}=$

۳) $۲\sqrt[۳]{\sqrt{۵}}=$

۴) $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۵}}=$

۵) $\sqrt{۴\sqrt{۲\sqrt{۲}}}=$

۶) $۵\sqrt[۳]{۵}\times۳\sqrt[۴]{۳}=$

تمرین ۳۳ : تساوی های زیر را به ساده ترین حالت بنویسید.

۱) $\sqrt{۳۲}=$

۲) $\sqrt[۳]{۳۲}=$

۳) $\sqrt[۵]{۱۲۸}=$

۴) $\sqrt{x^{۷}}=$

۵) $\sqrt[۳]{۵۴x^{۷}}=$

۶) $\sqrt{۵۰x^{۶}y^{۹}}=$

۷) $\sqrt{۳۶a^{۵}b^{۷}c^{۱۰}}=$

۸) $\sqrt[۳]{۱۶x^{۶}y^{۱۲}z^{۱۴}}=$

تمرین ۳۴ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۷})(\sqrt{۳}+\sqrt{۷})=$

۲) $(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})=$

۳) $\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}=$

تمرین ۳۵ : درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=a$$

حل :

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=(\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})^{n}})^{m}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$$

تمرین۳۶ : حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=$ ب) $\sqrt{\sqrt{۸۱}}$

تمرین ۳۷ : برای هر عدد حقیقی و مثبت a و اعداد طبیعی m و n درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

حل :

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a}=a^{\frac{۱}{m}}\times a^{\frac{۱}{n}}=a^{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}}=a^{\frac{m+n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

تمرین ۳۸ : عبارت زیر را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}}=$$

***

رادیکال های متشابه : دو یا چند رادیکال را متشابه می نامند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف: فرجه های مساوی داشته باشند.

ب: اعداد زیر رادیکال ها برابر باشند.

برای مثال هر دسته از رادیکال های زیر متشابهند.

الف) $۲\sqrt[۳]{۵}\ ,\ -۴\sqrt[۳]{۵}\ ,\ \frac{۱}{۷}\sqrt[۳]{۵}\ ,\ -\sqrt[۳]{۵}\ ,\ \sqrt[۳]{۵}$

ب) $۳\sqrt{x}\ ,\ -۲\sqrt{x}\ ,\ \frac{۲}{۳}\sqrt{x}\ ,\ ۱\frac{۲}{۷}\sqrt{x}\ ,\ -\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{x}$

نتیجه: رادیکال های متشابه فقط در ضرایب آنها اختلاف دارند.

***

جمع و تفریق رادیکال ها

دو رادیکال را وقتی می توان جمع یا تفریق کرد که متشابه باشند.[۲] در این صورت حاصل، رادیکالی متشابه آنها است، بطوری که ضریب آن از جمع یا تفریق رادیکال های داده شده بدست می آید.

برای مثال:

الف) $۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=(۵+۲-۱)\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$

ب) $۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x}+۵\sqrt[۳]{x}+۳\sqrt[۳]{x}-۴\sqrt[۳]{x}=(۲-۱+۵+۳-۴)\sqrt[۳]{x}=۵\sqrt[۳]{x}$

ولی رادیکال های زیر به دلیل متشابه نبودن نمی توان جمع یا تفریق کرد.

الف) $۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۶}$ ب) $\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt[۵]{x}$

تمرین۳۹ : عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱) $۵\sqrt{۲}+۷\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=$

۲) $۴\sqrt{۲}-۷\sqrt{۳}-۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}=$

۳) $\sqrt{x}+۲\sqrt{y}-۳\sqrt{x}+۴\sqrt{y}-۵\sqrt{x}+۶\sqrt{y}=$

۴) $۴\sqrt[۵]{m}+۳\sqrt[۵]{n}-۲\sqrt[۵]{m}+۸\sqrt[۵]{n}=$

تذکر: گاهی لازم است،قبل از انجام عمل جمع یا تفریق دو رادیکال آنها را ساده کرد.

تمرین ۴۰ : عبارت های زیر را ساده کنید.

۱) $۲\sqrt[۳]{x}+۳\sqrt{x}-۴\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt{x}=$

۲) $۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۳}=$

۳) $۶\sqrt{۳}-\sqrt{۹۸}+\sqrt{۵۰}+\sqrt{۲۷}+۲\sqrt{۲۰۰}=$

۴) $۵\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۳۲}-\sqrt[۳]{۱۰۸}=$

۵) $\sqrt{۲}(۲\sqrt{۳}+۱)-\sqrt{۳}(۲\sqrt{۲}+۱)=$

۶) $(۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(۵\sqrt{۳}-\sqrt{۲})=$

۷) $\sqrt{\frac{۱}{۷۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۱۵۰}}=$

***

۲. توجه کنید که شرط ضرب یا تقسیم رادیکال ها فقط مساوی بودن فرجه های‌آنها است ولی شرط جمع و تفریق رادیکال ها، متشابه بودن آنها می باشد.

قسمت چهارم : توان رسانی با اعداد حقیقی

گاهی اوقات توان یک عدد می تواند یک عدد حقیقی نیز باشد. برای مثال $2^{\sqrt{5}}$

معمولاً محاسبه ی مقدار واقعی این اعداد امکان پذیر نیست و اغلب از تقریبات اعشاری آنها استفاده می شود.

برای مثال محاسبه مقدار دقیق $5^{\sqrt{2}}$ مشکل است ، ولی می توان مقدار تقریبی این عدد را با دقت چند رقم اعشار تعیین کرد. مثلاً:

$$2^{\sqrt{3}}=2^{1/7}=2^{\frac{17}{10}}=\sqrt[10]{2^{17}}=\sqrt[10]{131072}=3/24$$

قوانین توان رسانی با توان های صحیح برای توان های حقیقی نیز برقرار است. یعنی اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی دلخواهی باشند. در این صورت:

$$(a^r)^s=a^{rs} \qquad a^r.b^r=(ab)^r \qquad 1^r=1$$

$$a^r.a^s=a^{r+s} \qquad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

تمرین ۴۱ : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و s و r دو عدد حقیقی دلخواهی باشند. ثابت کنید که :

۱) $(\frac{a}{b})^r=\frac{a^r}{b^r}$ ۲) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

حل :

۱ :

$$(\frac{a}{b})^r=(a\times\frac{1}{b})^r=(a)^r\times(\frac{1}{b})^r=a^r\times\frac{1}{b^r}=\frac{a^r}{b^r}$$

۲ :

$$\frac{a^r}{a^s}=a^r\times\frac{1}{a^s}=a^r\times a^{-s}=a^{r+(-s)}=a^{r-s}$$

تمرین ۴۲ : حاصل عبارت $\frac{4^{\sqrt{3}}\times 2^{\sqrt{75}}}{2^{\sqrt{12}}\times 8^{\sqrt{3}}}$ را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل :

$$\frac{4^{\sqrt{3}}\times 2^{\sqrt{75}}}{2^{\sqrt{12}}\times 8^{\sqrt{3}}}=\frac{2^{2\sqrt{3}}\times 2^{5\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}\times 2^{3\sqrt{3}}}=\frac{2^{7\sqrt{3}}}{2^{5\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}}$$

برای مطالعه

تمرین ۴۳ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱)\ ((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}} =$$

$$۲)\ ((\sqrt[۳]{۵})^{۳-\sqrt{۳}})^{۳+\sqrt{۳}} =$$

$$۳)\ ((\sqrt{۱۰})^{۲-\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}} =$$

$$۴)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} =$$

$$۵)\ (۲-\sqrt[۳]{۷})^{\pi+۱}(۴+۲\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۴۹})^{\pi+۱} =$$

تمرین ۴۴ : مقدار x را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵$$

حل :

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵ \to x^{\sqrt{۲}}=۴ \to (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=(۴)^{\sqrt{۲}} \to x^{۲}=۲^{۲\sqrt{۲}} \to x=۲^{\sqrt{۲}}$$

تمرین ۴۵ : مقدار x را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=۲$$

تمرین ۴۶ : دو عدد $\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}}$ و $\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$ را با هم مقایسه کنید.

حل : ابتدا عدد داده شده را به توان $\sqrt{۱۲}$ می رسانیم.

$$(\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}=\sqrt{۲}^{\sqrt{۳۶}}=\sqrt{۲}^{۶}=۲^{۳}=۸$$

$$(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۱۲}}=\sqrt{۳}^{\sqrt{۲۴}}=\sqrt{۳}^{۲\sqrt{۶}}=(\sqrt{۳}^{۲})^{\sqrt{۶}}=۳^{\sqrt{۶}}$$

واضح است که $۳^{\sqrt{۶}}>۳^{۲}>۹$ پس $۳^{\sqrt{۶}}>۸$ یعنی $\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}>\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}}$

تمرین۴۷ : جملات دنباله‌ی زیر به چه عددی نزدیک می شوند؟ چرا؟

$$۸^{۱/۳}\ \text{و}\ ۸^{۱/۳۳}\ \text{و}\ ۸^{۱/۳۳۳}\ \text{و}\ ...$$

***

درس دوّم : مطالب تکمیلی عبارت های جبری

در سال های قبل با مفهوم عبارت جبری ، یک جمله ای و چند جمله ای آشنا شدید. همچنین با برخی از اتحادهای جبری و تجزیه‌ی چندجمله ای ها آشنا شده اید. در این درس بحث های تکمیلی این مفاهیم را ارائه می کنیم.

قسمت اوّل : اتحاد های جبری

هر اتحاد یک تساوی جبری است که اگر به جای حروف هر عدد دلخواه جایگزین شود، تساوی درست باشد. به عبارت دیگر اتحاد تساوی جبری که به ازای تمام مقادیر عددی برقرار باشد.

برای مثال تساوی زیر به ازای هر مقدار عددی درست است. پس یک اتحاد است.

$$\boxed{(a+b)^2-2ab=a^2+b^2}$$

در اینجا فقط اتحاد هایی را ذکر می کنیم که کاربرد بیشتری داشته باشند.

۱) اتحادهای مربع دوجمله ای

الف) مربع مجموع دو جمله

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

ب) مربع تفاضل دو جمله

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

مثال:

الف) $(3x+5y)^2=(3x)^2+2(3x)(5y)+(5y)^2=9x^2+30xy+25y^2$

ب) $(m-3n)^2=(m)^2-2(m)(3n)+(3n)^2=m^2-6mn+9n^2$

تمرین ۱ : اتحاد های بالا را ثابت کنید.

اثبات:

الف) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

ب) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

تمرین۲: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(3x+y)^2 =$

۲) $(3m+4n)^2 =$

۳) $(x^2+2y^3)^2 =$

۴) $(3x^2y-5xy^2)^2 =$

تمرین۳: در عبارت های زیر جای خالی را کامل کنید.

الف) $(3x+\ldots)^2 = 9x^2+\ldots+25$

ب) $(2x+\ldots)^2 = \ldots+12xy+\ldots$

ج) $(\ldots-5b)^2 = \ldots-20ab+\ldots$

د) $(\ldots-\ldots)^2 = k^2-\ldots+36$

۲) اتحاد مزدوج (حاصل ضرب مجموع دوجمله در تفاضل همان دو جمله)

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$$

مثال:

$$(3m+2n)(3m-2n)=(3m)^2-(2n)^2=9m^2-4n^2$$

تمرین ۴ : این اتحاد را ثابت کنید.

تمرین ۵ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(3xy+2k)(3xy-2k)=$

۲) $(x^3-y^2)(x^3+y^2)=$

۳) $(x+y+z)(x+y-z)=$

۳) اتحاد جمله‌ی مشترک

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

مثال:

$$(k+5)(k+3)=k^2+(5+3)k+(5)(3)=k^2+8k+15$$

مثال:

$$(m+2)(m-5)=m^2+(2-5)m+(2)(-5)=m^2-3m-10$$

تمرین ۶ : این اتحاد را ثابت کنید.

تمرین ۷ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(xy-۲)(xy-۷)=$

۲) $(x^۲+۵y)(x^۲-۶y)=$

۳) $(۲a+۴)(۲a+۳)=$

۴) $(۷-۵b)(۷-۲b)=$

۵) $(ab-۴x)(۵x+ab)=$

۴) اتحاد های مجموع یا تفاضل دو مکعب (چاق و لاغر)

اتحاد مجموع دو مکعب

$$\boxed{(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳}$$

اتحاد تفاضل دو مکعب

$$\boxed{(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳}$$

مثال:

$$(x+۲y)(x^۲-۲xy+۴y^۲)=(x)^۳+(۲y)^۳=x^۳+۸y^۳$$

مثال:

$$(۲x-۳y)(۴x^۲+۶xy+۹y^۲)=(۲x)^۳-(۳y)^۳=۸x^۳-۲۷y^۳$$

تمرین ۸ : اتحاد های بالا را ثابت کنید.

تمرین ۹ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(۲x+۳y)(۴x^۲-۶xy+۹y^۲)=$

۲) $(x^۲-y^۲)(x^۴+x^۲y^۲+y^۴)=$

***

۵) اتحاد های مکعب دو جمله ای

اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$\boxed{(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳}$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

$$\boxed{(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳}$$

الگوی جالب برای اتحادهای مکعب دوجمله‌ای

$(a)(a)(a)=a^۳$

$۳(a)(a)(b)=۳a^۲b$

$۳(a)(b)(b)=۳ab^۲$

$(b)(b)(b)=b^۳$

مثال:

$$(x+2y)^3=(x)^3+3(x)^2(2y)+3(x)(2y)^2+(2y)^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$$

مثال:

$$(2m-3n)^3=(2m)^3+3(2m)^2(-3n)+3(2m)(-3n)^2+(-3n)^3$$
$$=8m^3-36m^2n+54mn^2-27n^3$$

تمرین ۱۰ : اتحاد های بالا را ثابت کنید.

تمرین ۱۱: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(2xy+3x)^3=$ ۲) $(x-4)^3=$ ۳) $(x^2-y^2)^3=$

***

اتحاد های دیگر

علاوه بر اتحاد های فوق اتحاد های دیگری[1] نیز از اهمیت بسیاری برخور دارند. مهمترین این اتحادها عبارتند از:

۱) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۲) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۳) $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۶) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

تمرین ۱۲ : هر یک از اتحاد های فوق را ثابت کنید.

تمرین ۱۳ : حاصل تساوی زیر را به دست آورید.

$$(3x+2y)^2-(3x-2y)^2=$$

توجه : بطور مشابه اتحادها را می توان برای عبارت های جبری دیگر غیر از یک جمله‌ای ها نیز مـی تـوان بکار برد.

مثال :

$$(a+\sqrt{2x})(a-\sqrt{2x})=(a)^2-(\sqrt{2x})^2=a^2-2x$$

[1]. این اتحاد ها را اتحادهای فرعی نیز می نامند. تمام این اتحادها به کمک اتحادهای اصلی قابل اثبات هستند.

تمرین برای حل :

۱۴ : در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

۱) $(\ldots+1)^2 = x^2+\ldots+1$

۲) $(5+\ldots)^2 = 25+\ldots+49x^2$

۳) $(3x-\ldots.)^2 = \ldots-24x+\ldots$

۴) $(\ldots-\ldots)^2 = 9x^2-\ldots+16y^2$

۵) $(\ldots-6x)(\ldots+6x) = 25a^2-\ldots$

۶) $(\ldots+\ldots)^2 = 9x^2+\ldots+25$

۷) $(3x-\ldots)^2 = 9x^2-24x+\ldots$

۸) $(\ldots+\ldots)(9x^2-6x+4) = \ldots+\ldots$

۹) $(\ldots-\ldots)(16m^2+12mn+9n^2) = \ldots-\ldots$

۱۰) $(2a-\ldots)^3 = \ldots-12a^2b+\ldots-\ldots$

۱۵ : به کمک اتحاد ها هر یک از تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $(2k+3)^2 =$

۲) $(x+\frac{3}{x})^2 =$

۳) $(\frac{x}{2}-y)(\frac{x}{2}+y) =$

۴) $(x-7)(x+8) =$

۵) $(x+x^2)(x+3x^2) =$

۶) $(\frac{x}{3}+\frac{y}{3})^3 =$

۷) $(x-3)(x^2+3x+9) =$

۸) $(x-y)^2-(x+y)^2 =$

۹) $(x+1)^3-(x-1)^3 =$

۱۰) $(3x-y)^2(3x+y)^2 =$

۱۱) $(x+7)(x-2)(x^2+5x+14) =$

۱۲) $(y-1)(y^2+y+2)(y+2) =$

۱۳) $(m-n)(m^4+m^2n^2+n^4)(m+n) =$

۱۴) $(x^3-1)(x^6+1)(x^3+1) =$

۱۶ : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(x^3-5a)(x^3+5a) =$

۲) $(4-3a)(3a+4) =$

۳) $(3k^2+5k)^2 =$

۴) $(x-1)(1+x)(x^2+1)(x^4+1) =$

۵) $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=$

۶) $(x-\frac{1}{x})(x+\frac{2}{x})=$

۷) $(2x^3+4)(2x^3-7)=$

۸) $(x^3+2)(x^6-2x^3+4)=$

۹) $(x+2)(x^4+4x^2+16)(x-2)=$

۱۰) $(3x+2y)^3=$

۱۱) $(3x-y+1)(3x-y+2)=$

۱۲) $(r^3+5r)^2=$

۱۳) $(x+1)(x^3-1)(x^2-x+1)$

۱۷ : حاصل هر یک از تساوی های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید.

۱) $(a-\sqrt{a^2-4ax})(a+\sqrt{a^2-4ax})=$

۲) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=$

۱۸ : اگر $a+b=5$ و $a^2+b^2=20$ باشد. حاصل ab را بیابید.

۱۹ : اگر $x+\frac{1}{x}=5$ حاصل $x^2+\frac{1}{x^2}$ را بیابید.

۲۰ : اگر $x-\frac{1}{x}=5$ باشد، حاصل عبارت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.

۲۱ : اگر $a\neq b \quad , \quad a^2+b^2=6ab$ مقدار عددی عبارت $(\frac{a+b}{a-b})^2$ را حساب کنید.

۲۲ : اگر $a+b=9$ و $ab=5$ در این صورت مقدار a^2+b^2 چقدر است؟ (ج:۷۱)

۲۳ : اگر $k+\frac{1}{k}=3$ باشد، حاصل عبارت $k^2+\frac{1}{k^2}$ را بدست آورید.

۲۴ : اگر $a-\frac{1}{a}=4$ باشد، حاصل عبارت $a^2+\frac{1}{a^2}$ را بدست آورید.

۲۵ : اگر $m+n=p$ و $mn=q$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۱}{n^۲}+\frac{۱}{m^۲}$ را بدست آورید.

۲۶ : اگر $a-\frac{۱}{a}=۴$ باشد، حاصل عبارت $a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ را بدست آورید.

۲۷ : اگر $x+y=-۲$ و $xy=-۴$ باشد، حاصل $x^۳-y^۳$ را بیابید.

۲۸ : در هر مورد جای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل مربع کامل شود. سپس آن دوجمله ای را مشخص کنید.

۱) $x^۲+...+۲۵=$

۲) $۴x^۲+...+a^۲=$

۳) $۹x^۲-۳۰x+...$

۴) $۴x^۲-۳x+...=$

۵) $۹x^۲+۴ax+...=$

۶) $...-۱۲ab+۹b^۲=$

۷) $...-۴x+\frac{۱}{۹}=$

۸) $...+x+۴=$

۲۹ : عبارت $۹+۴\sqrt{۵}$ را به صورت اتحاد مربع دوجمله ای بنویسید.

۳۰ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{a-b}{۲})^۲=ab$$

۳۱ : به کمک اتحاد های جبری ، حاصل تساوی های زیر را به دست آورید.

۱) $۹۹^۲=$

۲) $۱۰۱^۲=$

۳) $۱۶\times ۱۴=$

۴) $۸\times ۱۲\times ۱۰۴=$

۵) $(\sqrt{۷}-\sqrt{۳})(\sqrt{۷}+\sqrt{۳})=$

۶) $(\sqrt[۳]{۵}-۲)(\sqrt[۳]{۲۵}+۲\sqrt[۳]{۵}+۴)=$

***

قسمت دوّم : تجزیه‌ی چند جمله ای ها

تبدیل یک چند جمله ای به حاصل ضرب دو یا چند چندجمله ای ساده تر را تجزیه می نامند. مانند:

۱) $x^{2}+3x=x(x+3)$

۲) $a^{2}+ab=a(a+b)$

۳) $k^{2}+5k-14=(k+7)(k-2)$

۴) $a^{2}-10a+25=(a-5)^{2}$

۵) $4m^{2}-9n^{2}=(2m-3n)(2m+3n)$

توجه :

۱) همه‌ی چند جمله ای ها را نمی توان تجزیه کرد. عبارت هایی را که نمی توان تجزیه کرد، تجزیه ناپذیر گویند. مانند عبارت های $2x+3$ و $x^{2}+1$

۲) یک چند جمله ای را باید تا آن اندازه تجزیه کرد که :

الف: هر یک از عامل های آن تجزیه پذیر نباشند.

ب: هیچ متغیری زیر رادیکال نباشد.

برای مثال تجزیه‌ی عبارت $x^{3}-4x$ به صورت زیر کافی است

$$x^{3}-4x=x(x^{2}-4)=x(x-2)(x+2)$$

یا اینکه

$$x^{2}-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

ولی عبارت $x-25$ را نمی توان تجزیه کرد. زیرا در صورت تبدیل به ضرب، متغیر زیر رادیکال قرار می گیرد.

$$x-25=(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)$$

***

روش های تجزیه‌ی چند جمله ای ها

در تجزیه ی چند جمله ای ها روش های مختلفی وجود دارد. در اینجا مهمترین این روش ها بیان می شود.

۱) روش فاکتورگیری

هرگاه در یک چند جمله ای عامل مشترکی وجود داشته باشد، آن عامل مشترک با توان کمتر را فاکتور می نامند. با تقسیم تمام جملات بر فاکتور عبارت مورد نظر تجزیه می شود.

مثال : عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A=15a^2x^3-12a^3x^2+6a^2x^2$$

واضح است که در این عبارت $3a^2x^2$ عامل مشترک بین تمام جملات (فاکتور) است. حال تمام جملات را بر این عامل مشترک تقسیم می کنیم.

$$\frac{15a^2x^3}{3a^2x^2}=5x \qquad \frac{12a^3x^2}{3a^2x^2}=4a \qquad \frac{6a^2x^2}{3a^2x^2}=2$$

$$A=15a^2x^3-12a^3x^2+6a^2x^2=3a^2x^2(5x-4a+2)$$

تمرین۳۲ : هر یک از عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$1)\ 2ax+3a^2=$

$2)\ 12xyz+28y^2z-8yz^2+4x^2z=$

$3)\ 7a^3b^3c-3ab^3c^3-a^3bc^3=$

$4)\ a(x+2y)-b(x+2y)-c(x+2y)=$

$5)\ ab(x^2+y)+ab(x+y^2)=$

۲) تجزیه به کمک اتحاد ها

به کمک اتحاد ها نیز می توان یک عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر نیز تجزیه نمود. در اینجا نحوه‌ی تجزیه به کمک اتحاد ها به ترتیب اهمیت همراه با مثال شرح می دهیم.

۱- ۲) اتحاد مزدوج

$$\boxed{a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)}$$

توجه : این اتحاد برای تجزیه‌ی یک دوجمله ای با شرایط زیر بکار می رود.

الف: هر دو جمله‌ی آن مربع کامل باشند.

ب: بین آنها منها باشد.

با این شرایط از هر دو جمله جذر گرفته و از این اتحاد استفاده کنید.

مثال۱:

$$\underbrace{۲۵x^{۲}}_{\substack{\downarrow\\ ۵x}}-\underbrace{۹y^{۲}}_{\substack{\downarrow\\ ۳y}}=(۵x-۳y)(۵x+۳y)$$

مثال۲ :

$$۱۶a^{۲}-b^{۲}=(۴a-b)(۴a+b)$$

مثال ۳ :

$$t^{۲}-\frac{۹}{۴}=(t-\frac{۳}{۲})(t+\frac{۳}{۲})$$

تمرین۳۳ : هر یک از عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $k^{۲}-۹=$ ۳) $(x-y)^{۲}-۳۶=$ ۵) $x^{۸}-۱=$

۲) $a^{۴}-b^{۴}=$ ۴) $a^{۴}-۹b^{۲}=$ ۶) $۲۵-(x+y)^{۲}=$

***

۲- ۲) اتحاد جمله‌ی مشترک

$$\boxed{x^{۲}+\underbrace{s}_{a+b}x+\underbrace{p}_{a\times b}=(x+a)(x+b)}$$

توجه : این اتحاد برای تجزیه‌ی یک سه جمله‌ای با شرایط زیر بکار می رود.

الف: یک جمله از این سه جمله مربع کامل با ضریب یک باشد.

ب: ضریب جمله‌ی شامل متغیر (جذر جمله‌ی مربع) را s و جمله‌ی بدون متغیر را p فرض می کنیم و دو عدد صحیح پیدا می کنیم که مجموع آنها s و حاصل ضرب آنها p باشد.

با این شرایط از جمله‌ای که مربع کامل است جذر گرفته و با توجه به علامت دو عدد بدست آمده در بالا از این اتحاد استفاده کنید.

مثال۱ :

$$\underbrace{x^{۲}}_{\substack{\downarrow \\ x}} + \underbrace{۷}_{۲+۵} x + \underbrace{۱۰}_{۲\times ۵} = (x+۲)(x+۵)$$

مثال۲ :

$$\underbrace{m^{۲}}_{\substack{\downarrow \\ m}} + \underbrace{۴}_{-۳+۷} m - \underbrace{۲۱}_{-۳\times ۷} = (m-۳)(m+۷)$$

مثال۳ :

$$\underbrace{k^{۲}}_{\substack{\downarrow \\ k}} - \underbrace{۵}_{(-۱)+(-۴)} k + \underbrace{۴}_{(-۱)\times(-۴)} = (k-۱)(k-۴)$$

تمرین۳۴ : هر یک از عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^{۲} - ۸x + ۱۲ =$ ‏ ‏ ‏ ۳) $t^{۲} + t - ۲۰ =$ ‏ ‏ ‏ ۵) $x^{۲} + ۲۰x + ۱۹ =$

۲) $x^{۲} - ۲۲x + ۸۵ =$ ‏ ‏ ‏ ۴) $m^{۲} + ۱۰m + ۱۶ =$

۳ـ ۲) اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$\boxed{a^{۲} + ۲ab + b^{۲} = (a+b)^{۲}}$$

۴ـ ۲) اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$\boxed{a^{۲} - ۲ab + b^{۲} = (a-b)^{۲}}$$

توجه : این دو اتحاد برای تجزیه‌ی یک سه جمله ای با شرایط زیر بکار می روند.

الف: دو جمله از این سه جمله مربع کامل باشند.

ب: جمله سوم دو برابر حاصل ضرب جذر دو جمله ی مربع باشد.

با این شرایط از دو جمله‌ای که مربع کامل هستند جذر گرفته و با توجه به علامت جمله‌ی سوّم از اتحاد مربوطه استفاده کنید.

مثال۱:

$$\underbrace{x^{۲}}_{\substack{\downarrow \\ x}} + \underbrace{۶x}_{۲(x)(۳)} + \underbrace{۹}_{\substack{\downarrow \\ ۳}} = (x+۳)^{۲}$$

مثال۲:

$$\underbrace{9x^2}_{\downarrow \atop 3x} - \underbrace{30x}_{2(3x)(5)} + \underbrace{25}_{\downarrow \atop 5} = (3x-5)^2$$

تمرین ۳۵ : هر یک از عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^2 - 2xy + y^2 =$ ۳) $25a^2 + 30a + 9 =$ ۵) $9m^2 + 12mn + 4n^2 =$

۲) $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} =$ ۴) $m^2 - 6m + 9 =$ ۶) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 =$

***

تذکر: اتحاد های مربع مجموع دو جمله و مربع تفاضل دو جمله را می توان به کمک اتحاد جملهی مشترک نیز تجزیه نمود.

مثال:

$$\underbrace{x^2}_{\downarrow \atop x} + \underbrace{6x}_{3+3} + \underbrace{9}_{3\times 3} = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$$

***

۵- ۲) اتحاد مجموع دو مکعب

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

توجه : این اتحاد برای تجزیهی یک دو جمله ای با شرایط زیر بکار می رود.

الف: هر دو جمله مکعب کامل باشند.

ب: بین آنها به اضافه باشد.

با این شرایط از کعب هر دو جمله را تعیین کرده و از این اتحاد استفاده کنید.

مثال:

$$\underbrace{8x^3}_{\downarrow \atop 2x} + \underbrace{27y^3}_{\downarrow \atop 3y} = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

***

۶- ۲) اتحاد تفاضل دو مکعب

$$\boxed{a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)}$$

توجه : این اتحاد برای تجزیه‌ی یک دو جمله ای با شرایط زیر بکار می رود.

الف: هر دو جمله مکعب کامل باشند.

ب: بین آنها منها باشد.

با این شرایط از کعب هر دو جمله را تعیین کرده و از این اتحاد استفاده کنید.

مثال:

$$\underbrace{۸x^۳}_{\downarrow\ ۲x} - \underbrace{۱۲۵}_{\downarrow\ ۵} = (۲x-۵)(۴x^۲ + ۱۰x + ۲۵)$$

تمرین ۳۶ : هر یک از عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $۸x^۳ - ۲۷ =$

۲) $۱۲۵k^۳ + ۶۴ =$

۳) $(x-y)^۳ + ۸x^۳ =$

۴) $(a-۱)^۳ + ۸ =$

***

۷- ۲) اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$\boxed{a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ = (a+b)^۳}$$

مثال:

$$x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ = (x+۱)^۳$$

***

۸- ۲) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

$$\boxed{a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ = (a-b)^۳}$$

مثال:

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = (x-۱)^۳$$

تمرین ۳۷ : هر یک از عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$$۱)\ m^{۶}+۶m^{۴}n+۱۲m^{۲}n^{۲}+۸n^{۳}=$$

$$۲)\ k^{۳}-۳k+\frac{۳}{k}-\frac{۱}{k^{۳}}=$$

***

چند نکته در تجزیه‌ی چند جمله‌ای ها

۱) برای تجزیه‌ی یک چند جمله‌ای ابتدا باید روش فاکتور گیری را بررسی کرد. سپس به روش های دیگر پرداخت.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت های زیر قبل از اتحاد از فاکتور گیری استفاده شده است.

$$۱)\ ۸x^{۳}-۲x=۲x(۴x^{۲}-۱)=۲x(۲x-۱)(۲x+۱)$$

$$۲)\ ۵۰x^{۳}+۶۰x^{۲}+۱۸x=۲x(۲۵x^{۲}+۳۰x+۹)=۲x(۵x+۳)^{۲}$$

$$۳)\ ۴۸x^{۵}-۶x^{۲}=۶x^{۲}(۸x^{۳}-۱)=۶x^{۲}(۲x-۱)(۴x^{۲}+۲x+۱)$$

***

۲) گاهی اوقات لازم است قبل از تجزیه‌ی یک عبارت، جملات آن را دسته بندی کرد.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت های زیر قبل از هر عملی جملات را دسته بندی می کنیم.

الف:

$$\begin{aligned} ۲a^{۲}+a+۲ab+b &= (۲a^{۲}+a)+(۲ab+b) \\ &= a(۲a+۱)+b(۲a+۱)=(۲a+۱)(a+b) \end{aligned}$$

ب:

$$\begin{aligned} &۱-a^{۲}+۲ab-b^{۲}=۱+(-a^{۲}+۲ab-b^{۲})=۱-(a^{۲}-۲ab+b^{۲}) \\ &=۱-(a-b)^{۲}=[۱-(a-b)][۱+(a-b)]=(۱-a+b)(۱+a-b) \end{aligned}$$

***

۳) گاهی برای تجزیه‌ی یک چند جمله ای لازم است جمله یا جمله هایی از آن را تفکیک کرد.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت $۳x^۲ + ۷x + ۲$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$۳x^۲ + ۷x + ۲ = ۳x^۲ + \overbrace{۶x + x}^{۷x} + ۲ = (۳x^۲ + ۶x) + (x + ۲)$$
$$= ۳x(x + ۲) + (x + ۲) = (x + ۲)(۳x + ۱)$$

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت $x^۳ + x - ۱۰$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$x^۳ + x - ۱۰ = x^۳ + x - ۲ - ۸ = (x^۳ - ۸) + (x - ۲)$$
$$= (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴) + (x - ۲)$$
$$= (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴ + ۱) = (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۵)$$

***

۴) گاهی برای تجزیه‌ی یک چند جمله ای لازم است جمله یا جمله هایی را به آن عبارت افزود و کم کرد.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت $x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۹y^۴$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$x^۴ + ۲x^۲y^۲ + ۹y^۴ = x^۴ + ۶x^۲y^۲ + ۹y^۴ - ۴x^۲y^۲$$
$$= (x^۴ + ۶x^۲y^۲ + ۹y^۴) - ۴x^۲y^۲$$
$$= (x^۲ + ۳y^۲)^۲ - ۴x^۲y^۲$$
$$= [(x^۲ + ۳y^۲) - ۲xy][(x^۲ + ۳y^۲) + ۲xy]$$
$$= (x^۲ + ۳y^۲ - ۲xy)(x^۲ + ۳y^۲ + ۲xy)$$

۵) برای تجزیه‌ی یک سه جمله ای درجه‌ی دوّم که در آن ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوّم آن برابر یک نباشد.

می توان به روش زیر نیز عمل کرد. که در ضمن مثال توضیح داده می شود.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت $۳x^۲ + ۷x + ۲$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

الف: عبارت داده شده را برابر یک حرف مانند P قرار می دهیم.

$$P = ۳x^۲ + ۷x + ۲$$

ب: دو طرف تساوی را در ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوّم یعنی $x^۲$ ضرب می کنیم.

$$P=3x^2+7x+2\xrightarrow{\times 3}3P=9x^2+21x+6$$

ج: مشاهده می شود که یک جمله در تساوی جدید مربع است. جذر آن را محاسبه می کنیم و جملهی درجه ی یک را نیز به صورت مضربی از آن می نویسیم.

$$3P=(3x)^2+7(3x)+6$$

د: مشابه اتحاد جملهی مشترک دو عدد پیدا می کنیم که مجموع آنها ۷ و ضرب آنها ۶ باشد.

$$3P=(3x)^2+\underbrace{7}_{6+1}(3x)+\underbrace{6}_{6\times 1}\rightarrow 3P=(3x+6)(3x+1)$$

هـ: در نهایت مضرب ۳ را از دو طرف تساوی حذف می کنیم.

$$3P=3(x+2)(3x+1)\rightarrow P=(x+2)(3x+1)$$

توجه : این روش را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد، که به دلیل سادگی و سریع بودن آن به **روش کوتاه** موسوم است. در اینجا این روش را جهت تفهیم بهتر به صورت چند مرحله ای بیان می کنم.

مرحلهی اوّل : برای سه جمله ای داده شده را بیان می کنیم.

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}(ax+...)(ax+...)$$

مرحلهی دوّم : دو عدد پیدا می کنیم که مجموع آنها b و حاصل ضرب آنها ac باشد.

مرحلهی سوّم : این دو عدد را به جای نقطه چین ها قرار می دهیم.

مرحلهی چهارم : در صورت لزوم یک یا هر دو پرانتز از پرانتز های بدست آمده را به روش فاکتور گیری تجزیه می کنیم و سپس با a ساده می کنیم.

مثال ۱ : برای تجزیهی سه جمله ای $2x^2+7x+3$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$2x^2+7x+3=\frac{1}{2}(2x+...)(2x+...)$$

اکنون دو عدد پیدا می کنیم که مجموع آنها ۷ و حاصل ضرب آنها $6=2\times 3$ باشد. واضح است که این دو عدد ۱ و ۶ می باشند. پس می توان نوشت.

$$2x^2+7x+3=\frac{1}{2}(2x+6)(2x+1)=\frac{1}{2}\times 2(x+3)(2x+1)=(x+3)(2x+1)$$

مثال۲ : برای تجزیه‌ی سه جمله ای $۶x^۲ - ۷x - ۵$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$۶x^۲ - ۷x - ۵ = \frac{۱}{۶}(۶x + ...)(۶x + ...)$$

اکنون دو عدد پیدا می کنیم که مجموع آنها ۷− و حاصل ضرب آنها $۶ \times (-۵) = -۳۰$ باشد. واضح است که این دو عدد ۱۰− و ۳ می باشند. پس می توان نوشت.

$$۶x^۲ - ۷x - ۵ = \frac{۱}{۶}(۶x - ۱۰)(۶x + ۳) = \frac{۱}{۶} \times ۲(۳x - ۵) \times ۳(۲x + ۱)$$
$$= (۳x - ۵)(۲x + ۱)$$

***

تمرین برای حل :

۳۸ : عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $k^۲ - ۱۰k + ۲۴ =$

۲) $x^۴ - ۱۶ =$

۳) $x^۲ - y^۲ + ۴x - ۴y =$

۴) $۳x^۲ + x - ۱۰ =$

۵) $۸x^۳ - ۲۷ =$

۶) $۸x^۳ + ۱۲x^۲ + ۶x + ۱ =$

۷) $a^۳ - b^۳ + a^۲ + ab + b^۲ =$

۸) $۴m^۶ - ۲۰m^۳ + ۲۵ =$

۹) $۳x^۲ - ۵x + ۲ =$

۱۰) $x^۳ + ۴x - ۵ =$

۱۱) $x^۳ + ۶x + ۷ =$

۱۲) $a^۸ - ۱۳a^۴ + ۳۶ =$

۱۳) $a^۲ - b^۲ - c^۲ - ۲bc =$

۱۴) $a^۲x^۲ - ۸۱x^۲ =$

۱۵) $۴x^۲ + ۲x - ۹y^۲ - ۳y =$

۱۶) $۱۵ - x - ۲x^۲ =$

۱۷) $x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱ =$

۱۸) $۳x^۲ - ۷x - ۶ =$

۱۹) $a^۴ + ۳a^۲ - ۴ =$

۲۰) $x^۴ + ۴$

۳۹ : عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^۶ - y^۶ =$ ب) $x^۲ + ۷xy + ۱۲y^۲$ ج) $a^۶ - ۳b^۶ + ۲a^۳b^۳$

۴۰ : اگر $x + y + z = ۰$ ثابت کنید که $x^۳ + y^۳ + z^۳ = ۳xyz$ (اتحاد اویلر)

۴۱ : اگر $c = \sqrt{۲} + ۱$ و $b = -\sqrt{۸}$ و $a = \sqrt{۲} - ۱$، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$P = \frac{a^۳ + b^۳ + c^۳}{\sqrt{۲}}$$

***

دو اصل کارآمد در جبر

الف: اصل ضرب دو عدد

اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد، حداقل یکی از آنها صفر است. به عبارت دیگر

$$A \times B = ۰ \rightarrow \quad A = ۰ \quad or \quad B = ۰$$

ب : اصل مجموع مربعات

اگر مجموع مربعات دو عدد برابر صفر باشد، باید هر یک از آن دو عدد برابر صفر باشند. به عبارت دیگر

$$A^۲ + B^۲ = ۰ \rightarrow \quad A = ۰ \quad and \quad B = ۰$$

تمرین ۴۲ : مقدار x را از تساوی مقابل به دست آورید.

$$(۳x + ۶)(۵ - x) = ۰$$

تمرین ۴۳ : در هر مورد مقدار y و x را به دست آورید.

الف) $(x - ۱)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۰$

ب) $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۱۳ = ۰$

تمرین ۴۴ : اگر $(a + ۲)^۲ + (b - ۳)^۲ + (c + ۱)^۲ = ۰$ باشد. ثابت کنید که $a + b + c = ۰$

تمرین ۴۵ : اگر $a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۳ = ۲(a + b + c)$ باشد. ثابت کنید که $a + b + c = ۳$

***

محاسبه‌ی بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها

برای تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک وکوچکترین مضرب مشترک دو یا چند،چند جمله ای، ابتدا هر یک از آنها را به عوامل اوّل[2] تجزیه می کنیم. سپس قاعده های زیر را بکار می گیریم .

بزرگترین مقسوم علیه مشترک با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر ، برابر است.

کوچکترین مضرب مشترک با حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر ، برابر است.

***

مثال : بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارت های زیر را بدست آورید.

الف:

$A=۱۲a^۳b^۲c$ و $B=۱۸a^۲b^۳c^۲$ و $C=۳۰a^۲b^۲$

حل: ابتدا در صورت لزوم عبارت های داده شده را تجزیه می کنیم.

$A=۱۲a^۳b^۲c=۳\times ۲^۲\times a^۳b^۲c$

$B=۱۸a^۲b^۳c^۲=۲\times ۳^۲\times a^۲b^۳c^۲$

$C=۳۰a^۲b^۲=۲\times ۳\times ۵\times a^۲b^۲$

ب م م: $۲\times ۳\times a^۲b^۲=۶a^۲b^۲$

ک م م: $۲^۲\times ۳^۲\times ۵\times a^۳b^۳c^۲=۱۸۰a^۳b^۳c^۲$

ب:

$A=x^۴y^۲(x+۱)^۵(y+۳)$ و $B=x^۴y(x+۱)^۳(y+۴)^۲$

حل: عبارت های داده شده تجزیه شده می باشند. پس:

ب م م: $x^۴y(x+۱)^۳$

ک م م: $x^۴y^۲(x+۱)^۵(y+۳)(y+۴)^۲$

ج:

$A=x^۶-۳x^۴-۴x^۲$ و $B=x^۴-۸x$

حل: ابتدا در صورت لزوم عبارت های داده شده را تجزیه می کنیم.

[2] . منظور از عامل های اول یک چند جمله ای، عواملی است که پس از تجزیه ی یک عبارت بدست می آیند.

$$A = x^6 - 3x^4 - 4x^2 = x^2(x^4 - 3x^2 - 4)$$
$$= x^2(x^2+1)(x^2-4) = x^2(x^2+1)(x-2)(x+2)$$

$$B = x^4 - 8x = x(x^3 - 8) = x(x-2)(x^2+2x+4)$$

ب م م : $x(x-2)$

ک م م : $x^2(x^2+1)(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)$

تمرین ۴۶ : بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عبارت های زیر را بدست آورید.

۱) $A = 12m^2n$ و $B = 18mn^2$

۲) $A = 4a^5(x+1)^2(y+1)$ و $B = 4b^5(x+1)(y+1)^2$

۳) $A = 300x^2y^5(x^2-y^2)$ و $B = 72x^3y^4z(x+y)(x-y)^3$

۴) $A = x^2 - 2xy - 15y^2$ و $B = x^2 + 7xy + 12y^2$

۵) $A = 2x(x+y)^3$ و $B = 3x^2 + 3y^2 + 6xy$ و $C = 4x^2 - 4y^2$

۶) $A = x^5y + x^2y$ و $B = x^9 - x^3$

۷) $A = x^3 - 4x$ و $B = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

۸) $A = x^3y + x^2y - xy - y$ و $B = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ و $C = x^2y^3 + 2xy^3 + y^3$

***

قسمت سوّم : عبارت های گویا

برای مطالعه

هر عبارت به صورت $\frac{A}{B}$ که در آن A و B دو چند جمله ای بوده و B مخالف صفر باشد، را یک عبارت گویا می نامند.

مثال : هر یک از عبارت های زیر یک عبارت گویا است.

الف) $\dfrac{-x+5}{x^2-1}$ ب) $\dfrac{3t-\sqrt{5}}{4t+t^2+1}$ ج) $\dfrac{4}{6xy}$

توجه : طبق تعریف، هر یک از عبارت های زیر گویا نمی باشند.

الف) $\dfrac{\sqrt{x}+5}{x^2-1}$ ب) $\dfrac{3t-5}{2-\sqrt{t^2+1}}$ ج) $\dfrac{3m^2+|m|+1}{m^3-1}$

دامنه‌ی یک عبارت گویا

برای مطالعه

دامنه‌ی یک عبارت گویا مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر حقیقی است که به ازای آنها مخرج صفر نشود.

به عبارت دیگر دامنه‌ی عبارت $\frac{A}{B}$ می شود. $D = R - \{\text{ریشه های مخرج}\}$

تمرین۴۷ : دامنه‌ی عبارت زیر را تعیین کنید.

$$P = \frac{۳x - ۱}{x^۲ - ۵x}$$

$$x^۲ - ۵x = ۰ \rightarrow x(x-۵) = ۰ \rightarrow x = ۰ \quad , \quad x = ۵$$

$$D = R - \{۰, ۵\}$$

ساده کردن عبارت گویا

برای مطالعه

برای ساده کردن یک عبارت گویا، صورت و مخرج آن را در صورت امکان تجزیه نموده و عامل های مشترک را از صورت و مخرج حذف می کنیم.

مثال : عبارت زیر را ساده کنید.

$$A = \frac{x^۲ - ۲x + ۱}{x^۲ - ۳x + ۲}$$

حل:

$$A = \frac{x^۲ - ۲x + ۱}{x^۲ - ۳x + ۲} = \frac{(x-۱)^۲}{(x-۱)(x-۲)} = \frac{x-۱}{x-۲}$$

تمرین برای حل :

۴۸ : ابتدا دامنه‌ی هر یک از عبارت های زیر را تعیین نموده و سپس آنها را ساده کنید.

الف) $A = \frac{x^۳ - ۴x}{۴ - x^۲}$

ب) $B = \frac{x^۲ + x + ۱}{x^۳ - ۱}$

ج) $D = \frac{x^۲ - ۳x}{۲x - ۶}$

د) $C = \frac{x^۴ - ۱۶}{x^۲ + ۴}$

هـ) $E = \frac{s^۶ + ۱}{s^۴ + ۲s^۲ + ۱}$

و) $F = \frac{r^۲ + ۱}{r^۴ - ۱}$

برای مطالعه

۴۹ : هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید.

۱) $A=\frac{۵x^{۳}y^{۴}}{۱۵xy^{۷}}$

۴) $D=\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}+۸x+۷}$

۲) $B=\frac{m^{۲}-۶m+۹}{۹m^{۲}-۲۷m}$

۵) $E=\frac{x^{۳}+۲x^{۲}y+۱۸y+۹x}{-x^{۲}+۴y^{۲}}$

۳) $C=\frac{۳x^{۲}-۳xy}{۳(x-y)^{۲}}$

۶) $F=\frac{t^{۷}-t}{t^{۳}+t^{۲}+t}=$

۵۰ : عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^{۳}-۱}{(x-۱)^{۳}}$

ب) $\frac{p^{۵}-p^{۳}-۱۲p}{۸p^{۲}+۱۶p}$

ج) $A=\frac{۸^{۳۲}+۸^{۳۴}}{۸^{۱۵}+۸^{۱۳}}$

***

جمع و تفریق عبارت های گویا

برای مطالعه

برای جمع و تفریق دو عبارت گویا دو حالت زیر وجود دارد.

الف : اگر مخرج ها مساوی باشند، در این حالت، صورت ها را با هم جمع یا از هم کم می کنیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{۲x-۱}{x+۲}+\frac{۳x+۱}{x+۲}-\frac{۳-۵x}{x+۲}=\frac{۲x-۱+۳x+۱-۳+۵x}{x+۲}=\frac{۱۰x-۳}{x+۲}$$

تمرین برای حل :

۵۱ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{a+۱}{۲-a}+\frac{a-۵}{۲-a}$

ب) $\frac{۱}{۱+k}-\frac{۱-k}{۱+k}+\frac{k^{۲}-k-۱}{۱+k}$

ب : اگر مخرج ها مساوی نباشند، در این حالت، ابتدا مخرج ها را با توجه به کوچکترین مضرب مشترک آنها ، مساوی می کنیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=\frac{x+۵}{x-۱}-\frac{۶}{x^{۲}+x+۱}-\frac{۶(x^{۲}+۲)}{x^{۳}-۱}$$

ابتدا ک م م مخرج ها را محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases} P = x-۱ \\ Q = x^۲ + x + ۱ \\ R = x^۳ - ۱ = (x-۱)(x^۲+x+۱) \end{cases} \xrightarrow{\text{ک م م}} (x-۱)(x^۲+x+۱)$$

$$A = \frac{x+۵}{x-۱} - \frac{۶}{x^۲+x+۱} - \frac{۶(x^۲+۲)}{x^۳-۱}$$

$$= \frac{x+۵}{x-۱} - \frac{۶}{x^۲+x+۱} - \frac{۶(x^۲+۲)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$= \frac{(x+۵)(x^۲+x+۱) - ۶(x-۱) - ۶(x^۲+۲)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$= \frac{x^۳ + x^۲ + x + ۵x^۲ + ۵x + ۵ - ۶x + ۶ - ۶x^۲ - ۱۲}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$= \frac{x^۳-۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} = ۱$$

تمرین ۵۲ : اگر $\frac{۵x+۳}{x^۲+x-۲} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۲}$ مقدار B و A را بیابید.

حل:

$$\frac{۵x+۳}{x^۲+x-۲} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۲} \to \frac{۵x+۳}{(x-۱)(x+۲)} = \frac{A(x+۲)+B(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}$$

$$\to A(x+۲) + B(x-۱) = ۵x+۳$$

$$\left\langle \begin{array}{l} x = -۲ \to A(-۲+۲) + B(-۲-۱) = ۵(-۲)+۳ \to -۳B = -۷ \to B = \frac{۷}{۳} \\ x = ۱ \to A(۱+۲) + B(۱-۱) = ۵(۱)+۳ \to ۳A = ۸ \to A = \frac{۸}{۳} \end{array} \right.$$

تمرین برای حل :

۵۳ : حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۱)\frac{a-b}{bc}+\frac{b-c}{ac}+\frac{c-a}{ab}+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$$

$$۲)\frac{۱}{x(x+۱)}+\frac{۱}{(x+۳)(x+۲)}$$

$$۳)\frac{۱}{x^{۲}+۵x+۶}+\frac{۱}{x^{۲}+۷x+۱۰}$$

$$۴)\frac{m^{۳}+۲m^{۲}n+mn^{۲}}{m^{۲}n+mn^{۲}}-\frac{m^{۲}+mn}{m^{۲}-mn}$$

$$۵)\frac{۱}{(a-b)(a-c)}+\frac{۱}{(b-c)(b-a)}+\frac{۱}{(c-a)(c-b)}$$

$$۶)\ \frac{۶(a^{۲}+۲)}{a^{۳}-۱}-\frac{a+۵}{a-۱}+\frac{۶}{a^{۲}+a+۱}$$

$$۷)\ \frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{y-x}+\frac{۴xy}{x^{۲}-y^{۲}}$$

$$۸)\ \frac{x+۵}{x-۱}-\frac{۲x^{۲}+۳x+۷}{x^{۲}-۱}+\frac{x-۲}{x+۱}$$

$$۹)\ \frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^{۲}-۱}+\frac{۱}{x^{۲}+۱}$$

۵۴ : اگر $\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x+۲}=\frac{۱}{x^{۲}-۴}$ مقدار B و A را بیابید.

۵۵ : اگر $\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{x+۱}=\frac{۲}{x^{۳}-x}$ مقدار c و b و a را بیابید.

***

برای مطالعه

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

برای ضرب دو عبارت گویا ابتدا در صورت امکان آنها را ساده می کنیم و سپس صورت ها را در همدیگر و همچنین مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

برای تقسیم دو عبارت گویا، کافی است عبارت اوّل را در معکوس عبارت دوّم ضرب کنیم.

مثال : حاصل عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{x-۵}{۴x^۲-۹}\times\frac{۴x^۲+۱۲x+۹}{۲x^۲-۱۱x+۵}$

حل:

$$\frac{x-۵}{۴x^۲-۹}\times\frac{۴x^۲+۱۲x+۹}{۲x^۲-۱۱x+۵}=\frac{x-۵}{(۲x+۳)(۲x-۳)}\times\frac{(۲x+۳)^۲}{(۲x-۱)(x-۵)}=\frac{۲x+۳}{(۲x-۳)(۲x-۱)}$$

ب) $\frac{x^۲-۲x+۱}{۳x-۶}\div\frac{(x-۱)^۳}{x^۲-۳x+۲}$

حل:

$$\frac{x^۲-۲x+۱}{۳x-۶}\div\frac{(x-۱)^۳}{x^۲-۳x+۲}$$
$$=\frac{x^۲-۲x+۱}{۳x-۶}\times\frac{x^۲-۳x+۲}{(x-۱)^۳}=\frac{(x-۱)^۲}{۳(x-۲)}\times\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)^۳}=\frac{۱}{۳}$$

برای مطالعه

تمرین برای حل :

۵۶ : عبارت های زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

۱) $\frac{x^۲-۴}{x^۲-۳x+۲}\times\frac{x^۲-۱}{x+۲}$

۲) $\frac{x^۲-۹}{x^۲-۴}\div\frac{x^۲-۶x+۹}{x^۲-x-۲}$

۳) $(\frac{۱}{۱+t}+\frac{t}{۱-t})\div(\frac{۱}{۱-t}-\frac{۱-t}{۱+t})$

۴) $(\frac{۱+x}{۱-x}-\frac{۱-x}{۱+x})(\frac{۱}{x}-x)$

۵) $\dfrac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x-۱}}{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}}$

***

قسمت چهارم : گویا کردن مخرج کسرهای گنگ

منظور از گویا کردن مخرج یک کسر گنگ این است که با انجام عملیاتی ، مخرج را از حالت رادیکالی خارج کنیم. برای مثال مخرج کسر $\frac{۲}{۵\sqrt{۳}}$ یک عدد رادیکالی است و با ضرب صورت و مخرج آن در $\sqrt{۳}$ می توان مخرج را از حالت رادیکالی خارج نمود.

$$\frac{۲}{۵\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۵\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۵\times۳}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۵}$$

برای گویا کردن مخرج کسرهای گنگ می توان موارد زیر را در نظر گرفت:

الف : برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دارای یک جمله بوده و شامل رادیکال بـا فرجـه‌ی ۲ باشند، باید صورت و مخرج را در رادیکال مخرج ضرب کنید.

مثال :

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال :

$$\frac{۱}{۳\sqrt{۵}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳\times۵}=\frac{\sqrt{۵}}{۱۵}$$

ب : برای گویا کـردن مخـرج کـسرهایی کـه مخـرج آنهـا دارای یـک جملـه بـوده و شـامل رادیکـالی بـه صورت $\sqrt[m]{a^n}$ باشند. باید صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب کنید.$(m>n)$

مثال :

$$\frac{۱}{\sqrt[۹]{۳^۴}}=\frac{۱}{\sqrt[۹]{۳^۴}}\times\frac{\sqrt[۹]{۳^۵}}{\sqrt[۹]{۳^۵}}=\frac{\sqrt[۹]{۳^۵}}{\sqrt[۹]{۳^۹}}=\frac{\sqrt[۹]{۲۴۳}}{۳}$$

ج : برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دوجمله ای بوده و شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج باشند، باید صورت و مخرج را هر چند بار که لازم باشد، در مزدوج مخرج ضرب کنید.

مثال :

$$\frac{۳}{\sqrt{۷}-۲}=\frac{۳}{\sqrt{۷}-۲}\times\frac{\sqrt{۷}+۲}{\sqrt{۷}+۲}=\frac{۳(\sqrt{۷}+۲)}{۷-۴}=\sqrt{۷}+۲$$

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{5}}=\frac{1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{5}}\times\frac{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=\frac{(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}$$

د : برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دارای دو یا سه جمله بوده و شامل رادیکال با فرجه‌ی ۳ باشند، از اتحاد های زیر استفاده نمایید.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

اگر در مخرج پرانتز کوچک باشد، صورت و مخرج آن را در پرانتز بزرگ و اگر در مخرج پرانتز بزرگ باشد، صورت و مخرج آن را در پرانتز کوچک ضرب کنید.

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$$

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}}=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}}\times\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{5-3}$$

تمرین برای حل :

۵۷ : مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{۳}{\sqrt{۵}}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}$

۳) $\frac{۴}{\sqrt[۵]{x^۲}}$

۴) $\frac{۲}{۱+\sqrt{x}}$

۵) $\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

۶) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}$

۷) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}+۲}$

۸) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}$

۹) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۵}}$

۱۰) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}}$

۱۱) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}}$

۱۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}$

۵۸ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}-\frac{۲\sqrt{x}-۵}{x-۱}$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}-\frac{۵x}{x-۱}$

ج) $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}$

د) $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}+\frac{۱}{\sqrt[۸]{x}-۱}$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath