ماتریس !

- تعریف ماتریس : یک آرایش مستطیلی
  - مرتبه ماتریس : تعداد ستون x تعداد سطر
  - درایه : هر عدد درون ماتریس a_{mn} (شماره ستون ← ، → شماره سطر)
- تساوی دو ماتریس : هم مرتبه با درایه های نظیر به نظیر برابر
- انواع ماتریس
  - سطری یا ستونی : ماتریس هایی که فقط یک سطر یا فقط ستون دارند.
  - مربعی : ماتریس هایی که تعداد سطر و ستون آنها برابر است.
    - قطری : درایه های خارج از قطر اصلی همه درایه ها صفر
      - اسکالر : قطری که درایه های روی قطر اصلی برابر
        - همانی : اسکالری که قطر اصلی همگی ۱ است.
- جمع و تفریق ماتریس ها : در دو ماتریس هم مرتبه درایه های نظیر جمع می شوند.
- ماتریس نویسی فرمولی : براساس فرمول های داده شده برای قسمت های مختلف درایه می نویسیم → متداول

$$\begin{bmatrix} & & i<j \\ & i=j & \\ i>j & & \end{bmatrix}$$

- ضرب ماتریس ها
  - شرط (برابر بودن سطر اولی و ستون دومی) $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$
  - ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جائی ندارد و از ضرب هر سطر ماتریس اول در هر ستون ماتریس دوم یک درایه با همان آدرس تولید می شود.
- ضرب عدد در ماتریس ← در تک تک درایه ها
- توان رسانی ماتریس ها : ابتدا توان دوم و سوم یک ماتریس را مشخص می کنیم معمولاً با یافتن الگو توان های بالاتر بدون محاسبه قابل تشخیص هستند.
  - خودتوان $A^2=A$ - پوچ توان از مرتبه n $A^n=0$
  - کیلی همیلتون : $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=0$

ماتریس ۲

وارون ماتریس

معکوس دترمینان A ضربدر
قطر اصلی جابجا قطر فرعی قرینه

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \longleftarrow \text{A ماتریس مربعی } 2\times 2$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA \longleftarrow (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی: اگر $AX = B$ آنگاه $X = A^{-1}B$ یعنی: ماتریس مجهول = معکوس ماتریس ضرایب × ماتریس معلوم

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ یک جواب
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ صفر جواب
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ بی‌شمار جواب

دترمینان

دترمینان:
- 1×1: خود درایه
- 2×2: (قطر اصلی ضرب) منهای (قطر فرعی ضرب)
- 3×3: بسط حول سطر یا ستون - ساروس

(قطری: ضرب درایه‌های روی قطر اصلی)

ویژگی دترمینان

- $|AB| = |A||B|$ ولی $|A+B| \neq |A|+|B|$
- $|A^n| = |A|^n$
- $|0 \times 0| = 0$
- $|kA| = k^n|A|$
- تعویض دو سطر یا دو ستون قرینه کرده است ← اگر دو سطر یا ستون برابر یا مضرب از هم باشند ← دترمینان صفر است
- اگر دو دترمینان فقط در یک سطر یا یک ستون اختلاف (تفاوت) داشته باشند می‌توان آنها را جمع یا تفریق نمود.

مکان هندسی

- فاصله ثابت از یک نقطه : دایره
- " " از دو سر پاره خط : عمود منصف
- " " از یک خط : دو خط موازی در دو طرف خط
- " " از دو خط موازی : یک خط موازی وسط دو خط
- " " از دو خط متقاطع (اضلاع یک زاویه) : نیمساز
- انواع مقاطع مخروطی

* راهبرد حل مسائل :

در نظر گرفتن مختصات یک نقطه شناور و پیاده سازی شرایط مسئله روی آن نقطه.

* همین مکان ها در فضا هم قابل تعریف است.

رویه مخروطی : دو خط متقاطع l و d را در نظر بگیرید، اگر l محور باشد و d حول آن دوران کند رویه مخروطی داریم.

چگونگی ساخت مقاطع مخروطی

- مقطع عمود بر محور
  - اگر از محل برخورد l و d عبور کند : یک نقطه
  - " " " " " " نکند : دایره
- مقطع مایل ← اگر صفحه برش بر محور عمود نباشد و با مولد نیز موازی نباشد : بیضی
- مقطع موازی مولد
  - اگر از محل برخورد l و d عبور کند : یک خط
  - " " " " " " نکند : سهمی
- مقطع موازی محور
  - اگر شامل محور باشد : دو خط متقاطع
  - " " نباشد : هذلولی

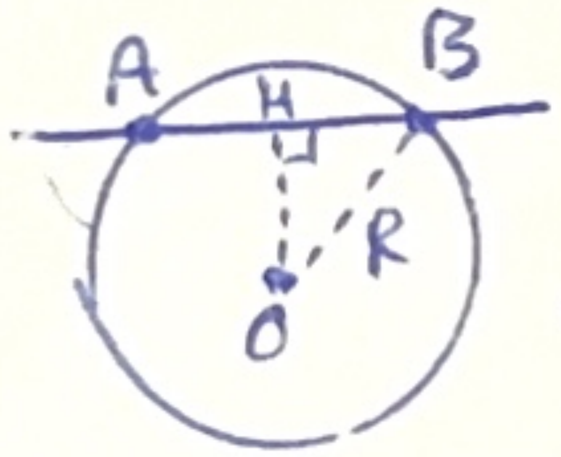
دایره :

- تعریف مکان هندسی

- معادله استاندارد به مرکز $O(a,b)$ و شعاع r : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
  - نقطه داخل : $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$
  - نقطه روی دایره : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
  - نقطه خارج : $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$

- معادله گسترده (ضمنی) : $x^2+y^2+ax+by+c=0$
  - مرکز $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$
  - شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$
    - دایره : $a^2+b^2-4c>0$
    - نقطه : $a^2+b^2-4c=0$
    - تهی : $a^2+b^2-4c<0$
  - اگر با جایگذاری مختصات یک نقطه به عدد $+$ / 0 / $-$ رسیدیم نقطه خارج / رو / داخل دایره است

- وضعیت خط و دایره
  - اگر معادله خط را در معادله دایره قرار دهیم بر اساس علامت Δ وضعیت خط و دایره مشخص می‌شود.
  - مقایسه :
    - بدون برخورد $OH>r$
    - مماس $OH=r$
    - متقاطع $OH<r$



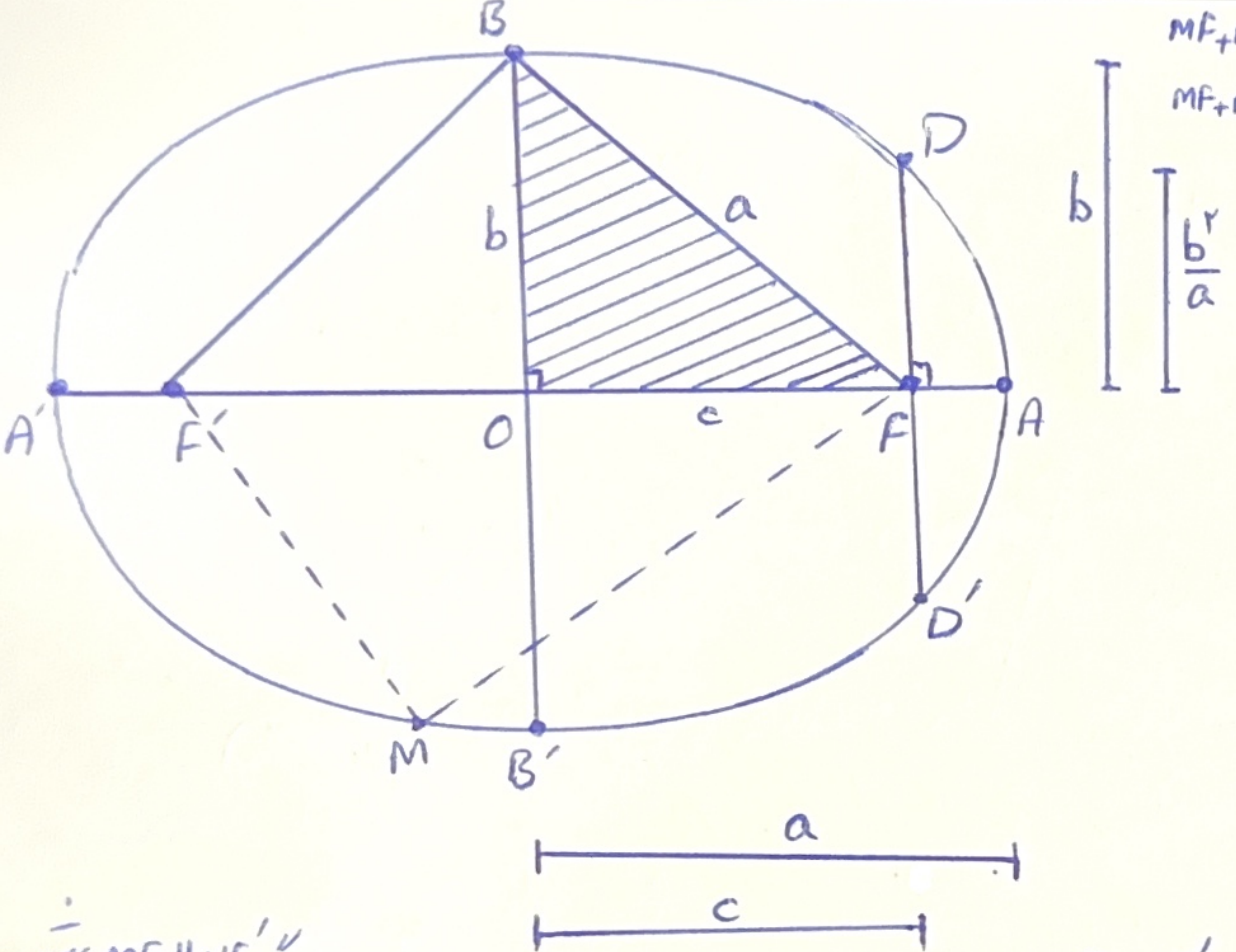
- وتر ایجاد شده از برخورد خط با دایره دارای طول $AB=2\sqrt{R^2-OH^2}$ خواهد بود.

- خط مماس و قائم بر دایره (می‌توان از مشتق استفاده کرد)
  - خط قائم : هر خطی که از مرکز دایره عبور کند (قطر) بر دایره عمود است.
  - خط مماس : هر خطی که در محل برخورد قطر و دایره بر قطر عمود شود بر دایره مماس است.

- وضعیت دو دایره :

$OO'=d$	0		$\lvert r-r'\rvert$		$r+r'$	
وضعیت	هم‌مرکز	متداخل	مماس داخل	متقاطع	مماس خارج	متخارج
تعداد خط مماس داخلی/خارجی	0/0	0/0	1/0	2/0	2/1	2/2

- وتر مشترک دو دایره : درحالتی که دو دایره متقاطع هستند از برابر قرار دادن معادله ضمنی دو دایره، معادله وتر مشترک بدست می‌آید.



بیضی

تعریف مکان هندسی $MF + MF' = 2a$

$MF+MF' > 2a$ خارج

$MF+MF' < 2a$ داخل

انواع بیضی: افقی، عمودی، مایل

نقاط اصلی بیضی (کانونها، رئوس کانونی و غیرکانونی)

پارامترهای اصلی (a، b، c): $a^2=b^2+c^2$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

دایره ⟵ $0 < e < 1$ ⟶ خط

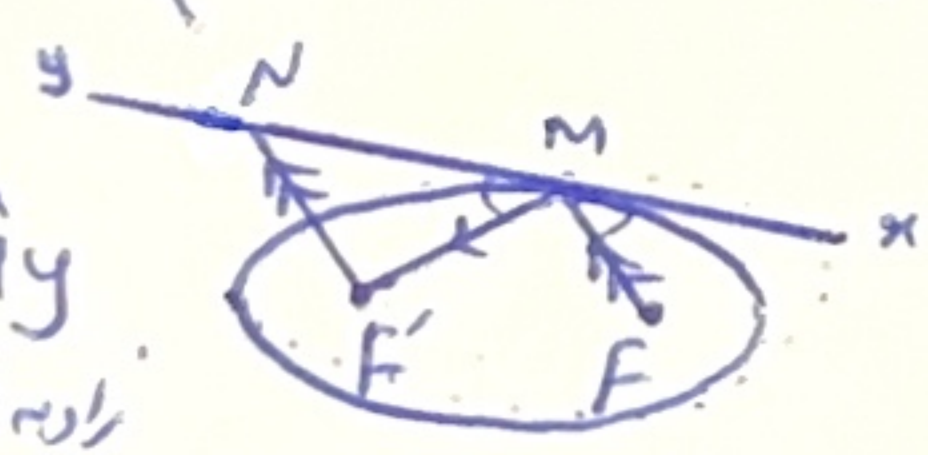
وتر مینیمم کانونی: $DD' = \frac{2b^2}{a}$

اگر کانونها از نقطه M با زاویه قائم رویت شوند: $MF.MF' = 2b^2$

دورترین و نزدیک ترین نقطه بیضی تا هر کانون، راس های کانونی بیضی (A و A') هستند.

ویژگی بازتابندگی بیضی: اگر پرتو نوری از یک کانون بگذرد (بتابد) و به درونه داخلی آینه ای بیضی برخورد کند، در بازتاب از کانون دیگر می گذرد.

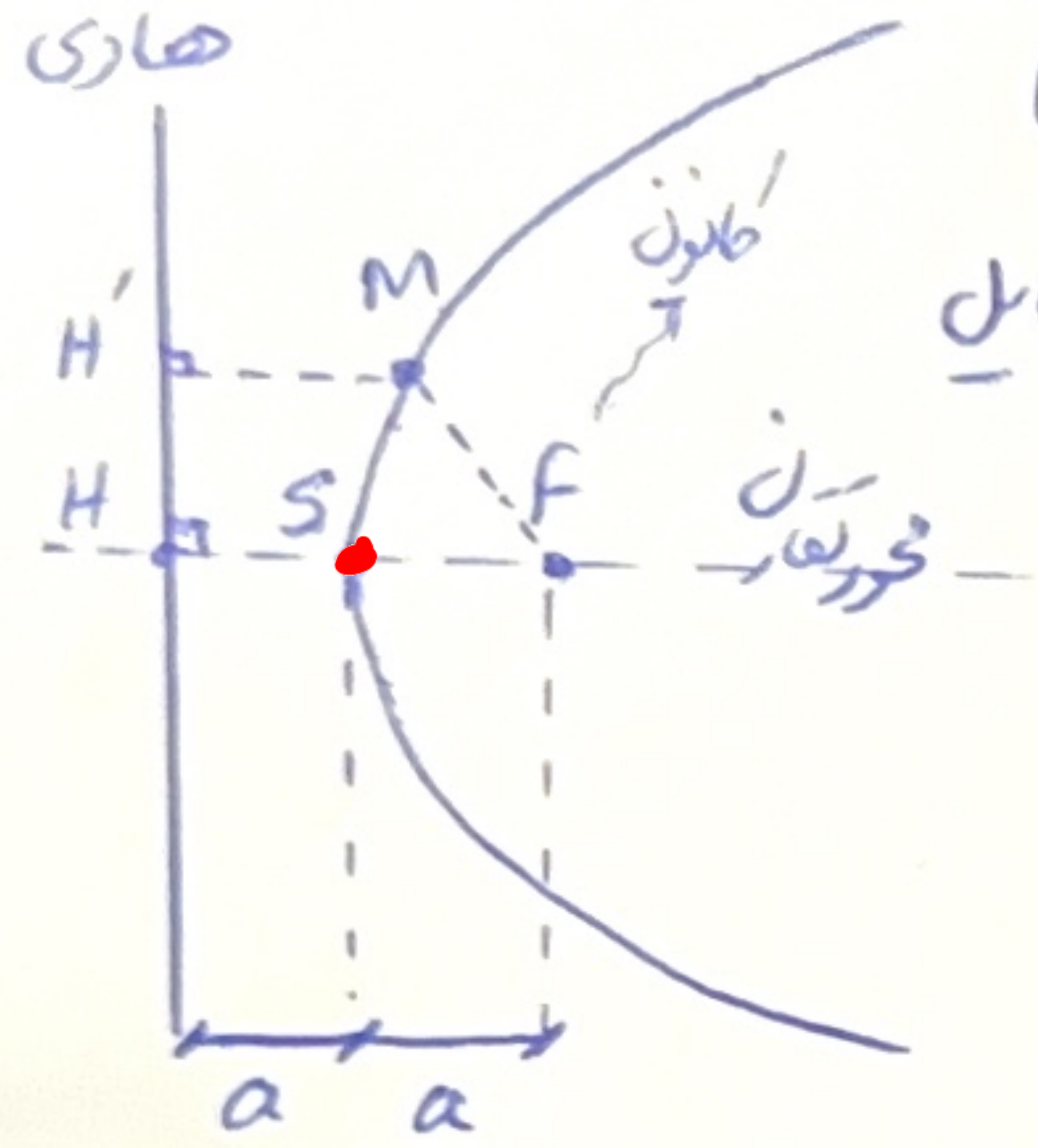
اگر $MF \parallel NF'$ باشد آنگاه $NF' = MF'$



$F\hat{M}x = F'\hat{M}y$

زاویه تابش   زاویه بازتابش

همچنین براساس هندسه یازدهم می توان گفت $MF+MF'$ کوتاه ترین مسیری است که می توان با عبور از نقطه ای روی خط xy از F به F' رسید.



تعریف مکان هندسی $MF = MH'$ ⟵ $a = SF = SH$ پارامتر اصلی سهمی (فاصله کانونی)

سهمی

انواع سهمی : قائم بالا رونده ∪ - قائم پایین رونده ∩ - افقی رونده ⊂ - افقی عقب رونده ⊃ - حالت

معادله سهمی : قائم : $(x-h)^2 = \pm 4a(y-k)$ افقی : $(y-k)^2 = \pm 4a(x-h)$

$+$: بالا یا جلو رونده و $-$: پایین یا عقب رونده

راس (h,k)

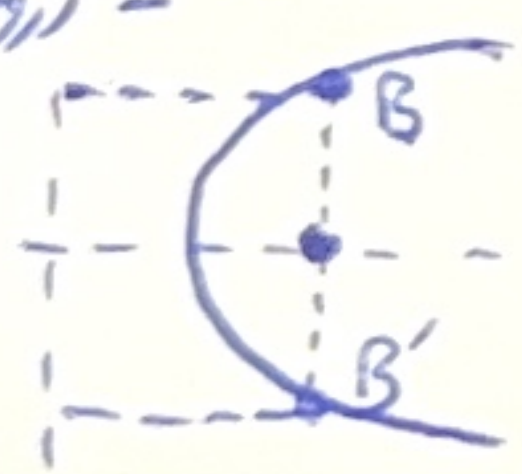
$$(\quad\quad)^2 = \pm 4a(\quad\quad)$$

مختصات کانون و معادله هادی

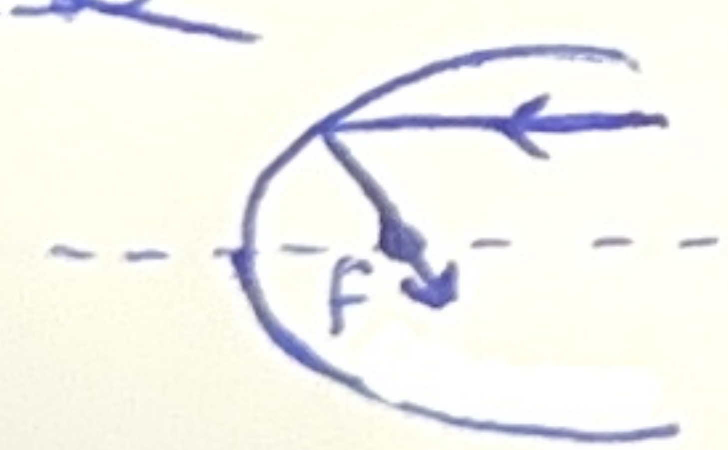
معادله گسترده (ضمنی) سهمی : بصورت
افقی : $Ay^2+By+Cx+D=0$
قائم : $Ax^2+Bx+Cy+D=0$
است که با مربع سازی به فرم استاندارد تبدیل می شود .

در این نوع معادله $a = \left|\frac{C}{4A}\right|$ ، اگر $AC<0$ باشد سهمی بالا و جلو رونده و اگر $AC>0$ پایین یا عقب رونده است .

تعیین وضعیت نقطه و سهمی
خارج سهمی $MF > MH'$
روی سهمی $MF = MH'$
درون سهمی $MF < MH'$
همچنین اگر در معادله گسترده $A>0$ باشد، مختصات نقطه را درون معادله قرار دهید + خارج ، ۰ رو ، - درون

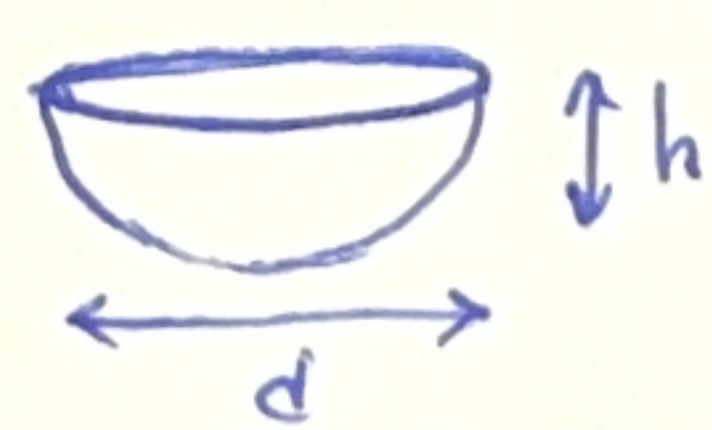


وتر کانونی Min : اگر از کانون خطی بر محور تقارن عمود کنیم و فاصله دو نقطه برخورد BB' باشد داریم : $BB' = 4a$



ویژگی بازتابندگی سهمی : اگر پرتوی به موازات محور تقارن به سهمی بتابد پرتو بازتابش از کانون عبور می کند و بالعکس . از این خاصیت در چراغ اتومبیل استفاده می شود .

دیش : $d^2 = 16ah$



ناحیه	علامت x	علامت y	علامت z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

فضای R^3

ناحیه‌ها و علامت‌ها: علامت چهار ربع در فضای R^2 را به خاطر بیاورید، ناحیه‌های زیر هم ۴ واحد اختلاف دارند، در ناحیه ۱ تا ۴ علامت z مثبت و در ناحیه‌های ۵ تا ۸ علامت z منفی است.

نام (عنوان) و معادله یک مکان: پارامتری که در عنوان مکان به کار رفته است باید مقدار ثابت بگیرد تا معادله مکان تشکیل شود. این تکنیک ناهمنام برای معادله‌نویسی مکان‌های اصلی (محورها و صفحات) و مکان‌های موازی آنها بکار می‌رود.

(۱و۲و۳)

(۱و۵و۵)

مثلاً معادله محور z بصورت $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ و معادله خط موازی محور z بصورت $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ خواهد بود.
یا معادله صفحه xoy بصورت $z=0$ و معادله صفحه‌ای موازی xoy بصورت $z=c$ خواهد بود.

مختصات نقطه هم همینطور است.

تصویر کردن یک نقطه روی یک مکان: ابتدا معادله مکان را مشخص کنید و مقادیر ثابت معادله مکان را در مختصات نقطه جایگذاری کنید.
مثلاً تصویر نقطه (x_0,y_0,z_0) روی محور z بصورت $(0,0,z_0)$ و روی صفحه xoy بصورت $(x_0,y_0,0)$ و روی خط $y=b$ بصورت (x_0,b,z_0) است.

قرینه کردن: می‌دانیم اگر A' قرینه A نسبت به M باشد رابطه‌ی $A'=2M-A$ برقرار است، پس معادله M را بنویسید و استفاده کنید.
مثلاً قرینه نقطه (x_0,y_0,z_0) نسبت به محور x $(x_0,-y_0,-z_0)$، نسبت به صفحه xoy $(x_0,y_0,-z_0)$ و نسبت به صفحه $x=a$ $(2a-x_0,y_0,z_0)$ است.

فاصله‌ها: ابتدا معادله مکان را بدست می‌آوریم و سپس فاصله نقطه تا مقادیر معلوم در معادله مکان را محاسبه می‌کنیم.
مثلاً فاصله نقطه (x_0,y_0,z_0) از نقطه (a,b,c) بصورت $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$
از خط $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ بصورت $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$ یا از محور y بصورت $\sqrt{(x_0-0)^2+(z_0-0)^2}$
از صفحه $z=c$ بصورت $\sqrt{(z_0-c)^2}=|z_0-c|$ یا از صفحه zoy بصورت $\sqrt{(x_0-0)^2}=|x_0|$ است.

ابتدا - انتها = بردار ← دو بردار هم سنگ یعنی هم راستا هم جهت هم اندازه ← همه مولفه ها برابر

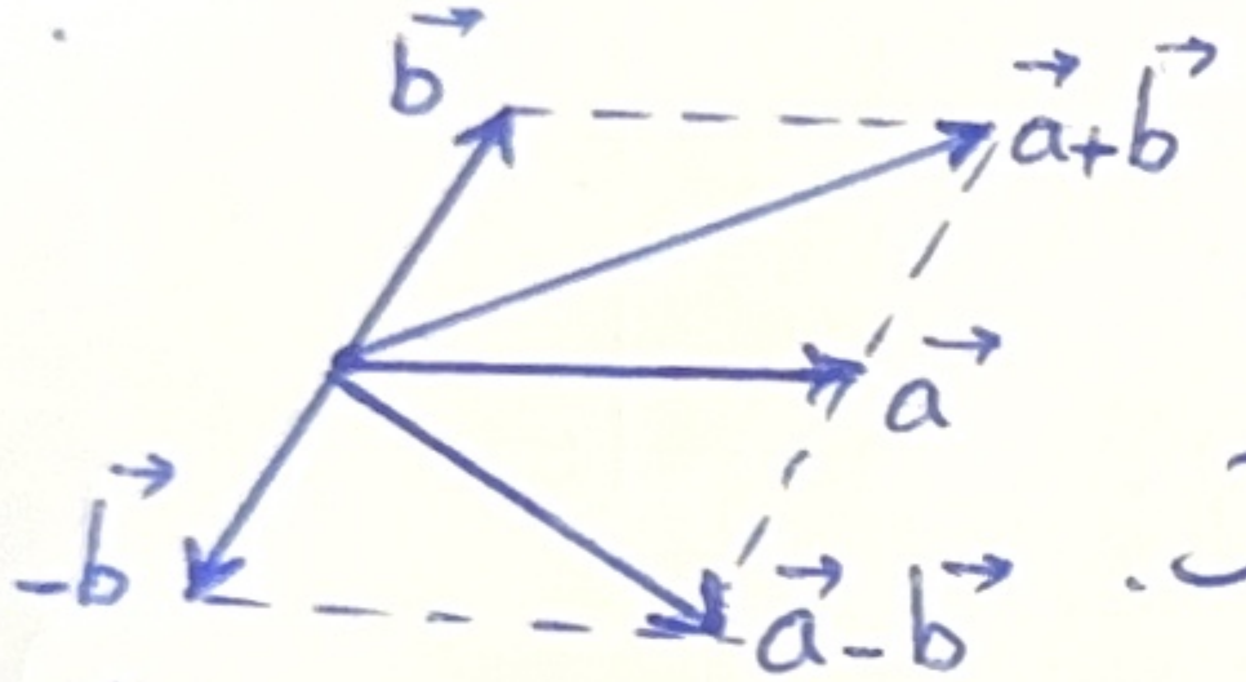
بردار

ضرب عدد در بردار : $k>1$ انبساط هم جهت ، $1>k>0$ انقباض هم جهت ، $0>k>-1$ انقباض خلاف جهت ، $k<-1$ انبساط خلاف جهت

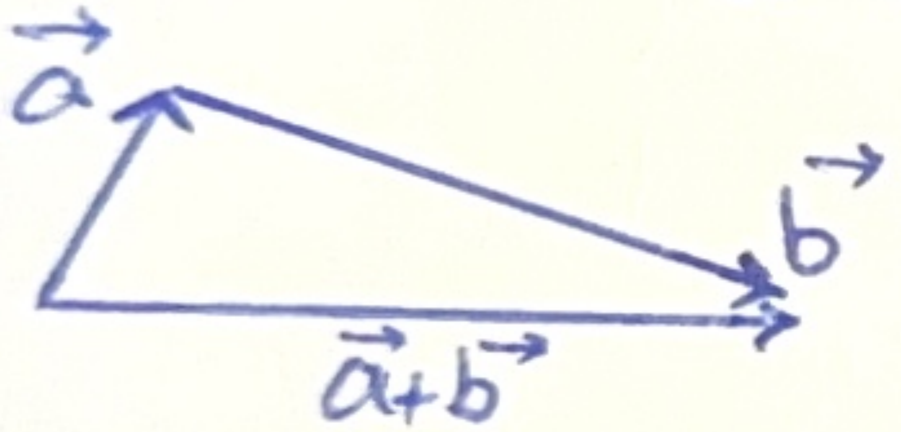
دو بردار موازی : $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

طول بردار : $|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

جمع بردارها : دو روش دارد



روش متوازی الاضلاع : اگر دو بردار هم ابتدا باشند یک قطر مجموع و قطر دیگر تفاضل است.



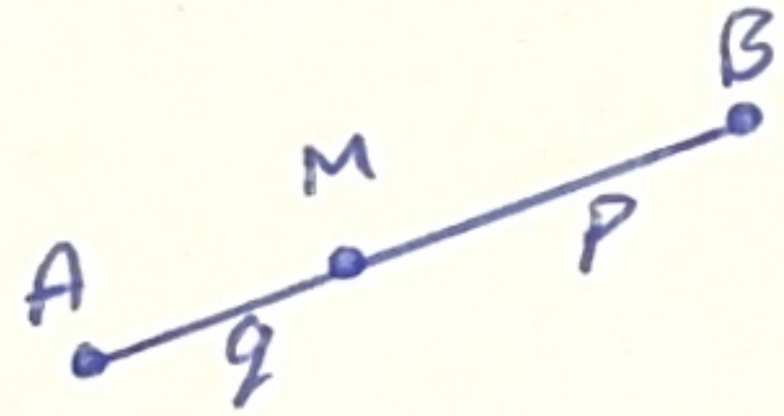
روش مثلث : برای بردارهای پشت سر هم

مختصات :

متوازی الاضلاع $A+C=B+D$

مرکز ثقل : $G=\frac{A+B+C}{3}$

نسبت : $M=\frac{pA+qB}{p+q}$



بردار یکه اصلی : $\vec{i}=(1,0,0)$ ، $\vec{j}=(0,1,0)$ ، $\vec{k}=(0,0,1)$ ← بردار یکه هر بردار

$$\vec{e}_a=\left(\frac{a_x}{|a|},\frac{a_y}{|a|},\frac{a_z}{|a|}\right)$$

$$\vec{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$|\vec{e}_a|=1 : \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

زوایای هادی : به زوایای ساخته شده بین بردار و محورهای مختصات (به ترتیب α و β و γ) گفته می شود و داریم

اگر با هر سه محور زاویه برابر بسازد $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

راستای نیمساز : اگر دو بردار جمع شوند، برآیند آنها به بردار بزرگتر نزدیکتر است و زاویه بین دو بردار را نصف نمی کند مگر اینکه دو بردار برابر باشند بنابراین بردار راستای نیمساز : $\vec{e}_a+\vec{e}_b$ یا $\vec{a}|\vec{b}|+\vec{b}|\vec{a}|$

متوازی الاضلاع خاص :

اگر $|a+b|=|a-b|$ ← مستطیل $a\perp b$

اگر $a+b\perp a-b$ ← لوزی $|a|=|b|$

ضرب داخلی

- حاصلضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. $a.b \in \mathbb{R}$ $\xLeftarrow{\text{دقت}}$ نه: $\vec{a}.0=0$ ، $\vec{a}.\vec{0}=0$ و $\vec{a}.\vec{0} \neq \vec{0}$

- محاسبه ضرب داخلی:
  - براساس اندازه و زاویه بین: $a.b = |a||b|\cos\theta$
    زاویه بین دو بردار: $\cos\theta = \dfrac{a.b}{|a||b|}$
  - براساس مولفه‌ها: $a.b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- ویژگی‌های ضرب داخلی: $a.a = |a|^2$ و $a.b = b.a$ ، اتحادها برای ضرب داخلی برقرار است.

- عمود بودن دو بردار غیرصفر: $a.b = 0 \leftrightarrow a \perp b$

- زاویه بین قطرهای مکعب: $\cos\theta = \frac{1}{3}$

- تصویر بردار $\vec{a}$ روی راستای بردار $\vec{b}$: $\vec{a}_T = \dfrac{a.b}{|b|^2}.\vec{b}$

- قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به راستای بردار $\vec{b}$: $\vec{a}' = 2\vec{a}_T - \vec{a}$

- نامساوی کوشی-شوارتز: $|a.b| \leq |a|.|b| \Longrightarrow (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \leq (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)$

حاصلضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر هر دو بردار که راستا و جهت آن با قانون دست راست بدست می آید.

ضرب خارجی

محاسبه ضرب خارجی:

بر حسب اندازه بردارها و زاویه بین:

$$|a\times b| = |a|\cdot|b|\cdot\sin\theta\cdot\cancel{\vec{a}_n}$$

بر حسب مولفه ها: محاسبه دترمینان

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

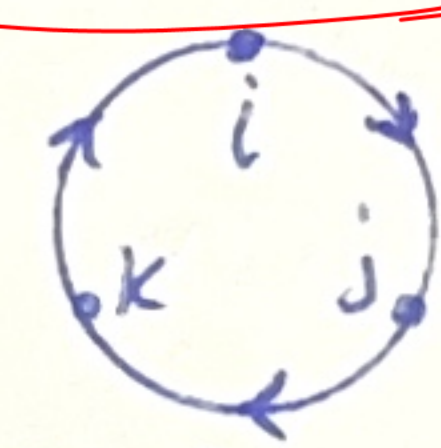
اندازه ضرب خارجی:

$$|a\times b| = |a||b|\sin\theta$$

$$(a\cdot b)^2 + |a\times b|^2 = |a|^2\cdot|b|^2 \xleftarrow{\text{بیان مجدد}}$$

ضرب خارجی بردارهای یکه:

اگر در جهت تعیین شده دو بردار متوالی را ضرب کنید، حاصل بردار سوم است.



$i\times j = k$, $j\times i = -k$

موازی بودن دو بردار غیر صفر:

$$a\parallel b \leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

ویژگی های ضرب خارجی:

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{0} = \vec{0}$

(خاصیت جابه جایی ندارد)

اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ $\leftrightarrow$ $a\times b = b\times c = c\times a$

مساحت

متوازی اضلاع ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$: در سه حالت بدست می آید:

$$S = |a\times b|$$

$$S = \frac{1}{2}|(a-b)\times(a+b)|$$

$$S = |a\times(a\pm b)|$$

مثلث که دو ضلع مجاور آن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشند:

$$S = \frac{1}{2}|a\times b|$$

ضرب مضاعف (سه‌گانه) سه بردار :

$$a\times(b\times c)=\vec{b}(a\cdot c)-\vec{c}(a\cdot b)$$

(برداری است هم صفحه با b و c)

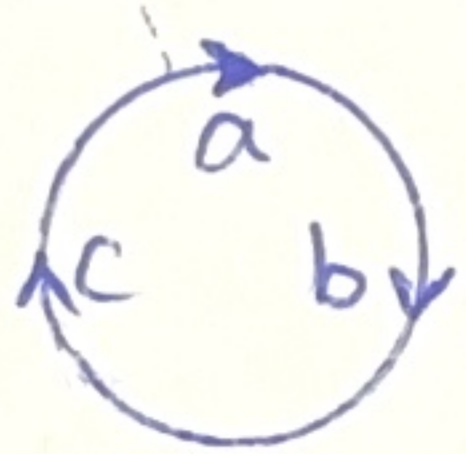
$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=\bar{0}$$

ضرب مخلوط

محاسبه :

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

←



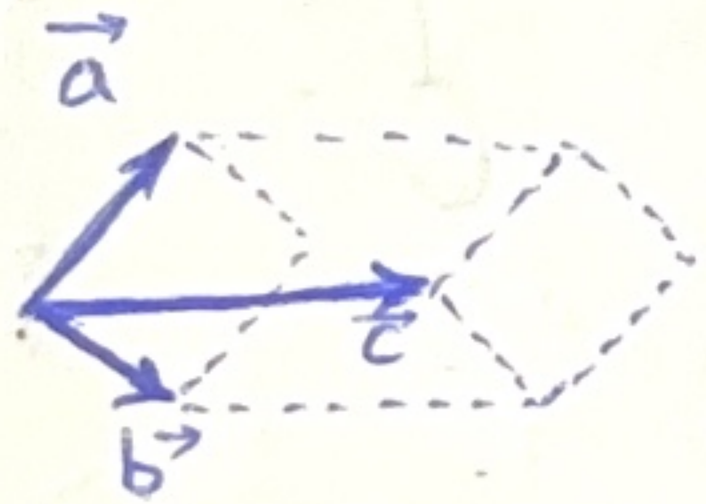
←

$$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b)$$

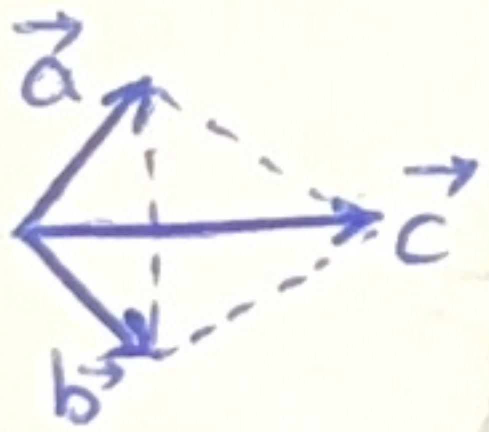
بصورت چرخشی حاصل یکسان تولید می‌کند

شرط هم صفحه بودن سه بردار $\Leftrightarrow a\cdot(b\times c)=0$

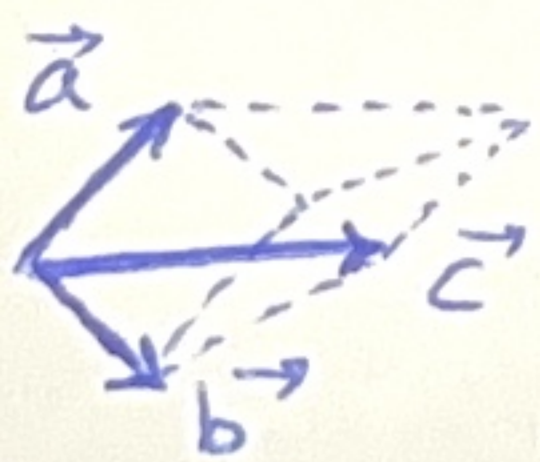
حجم



متوازی السطوح $=|a\cdot(b\times c)|$



هرم $=\frac{1}{6}|a\cdot(b\times c)|$



منشور مثلث القاعده $=\frac{1}{2}|a\cdot(b\times c)|$