فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

بانک سلول‌های بنیادی رویان

- **درس اوّل** ریشه و توان
- **درس دوم** ریشه n ام
- **درس سوم** توان‌های گویا
- **درس چهارم** عبارت‌های جبری

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $2=\sqrt[3]{8} \Rightarrow 8=2^3$؛ همچنین $8=2^3 \Rightarrow 2=\sqrt[3]{8}$. علامت $\Rightarrow$ به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به‌طور خلاصه با علامت $\Leftrightarrow$ نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $2=\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow 8=2^3$.

فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$$9^2=81 \Leftrightarrow \sqrt{81}=9 \qquad \sqrt[3]{-27}=-3 \Leftrightarrow (-3)^3=-27$$

$$\sqrt{50}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(5\sqrt{2}\right)^2=50 \qquad (-5)^3=-125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125}=-5$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \Leftrightarrow (-2)^3=-8 \qquad 2^4=16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16}=2$$

$$\sqrt{100}=10 \Leftrightarrow 10^2=100 \qquad 11^2=121 \Leftrightarrow \sqrt{121}=11$$

$$\sqrt{48}=4\sqrt{3} \Leftrightarrow (4\sqrt{3})^2=48 \qquad (0/25)^2=0/0625 \Leftrightarrow \sqrt{0/0625}=0/25$$

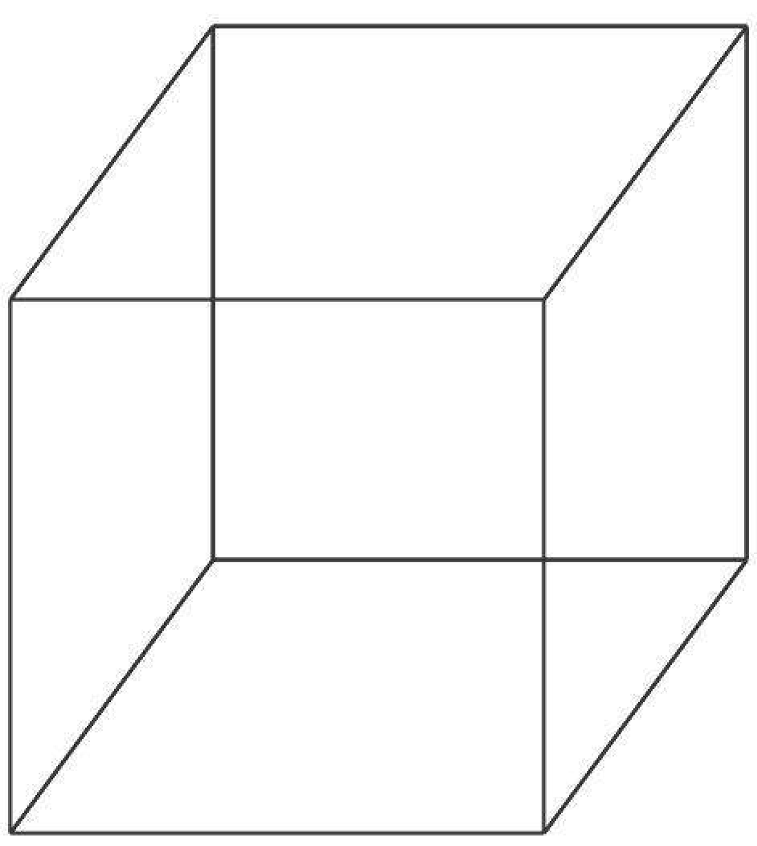
$$\sqrt{45}=3\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2=45 \qquad (0/5)^2=0/25 \Leftrightarrow \sqrt{0/25}=0/5$$

۲ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	۲۷-	۱۲۵	۱۰۰۰-	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	۳-	۵	۱۰-	۱۵	۱۰	۹

کار در کلاس

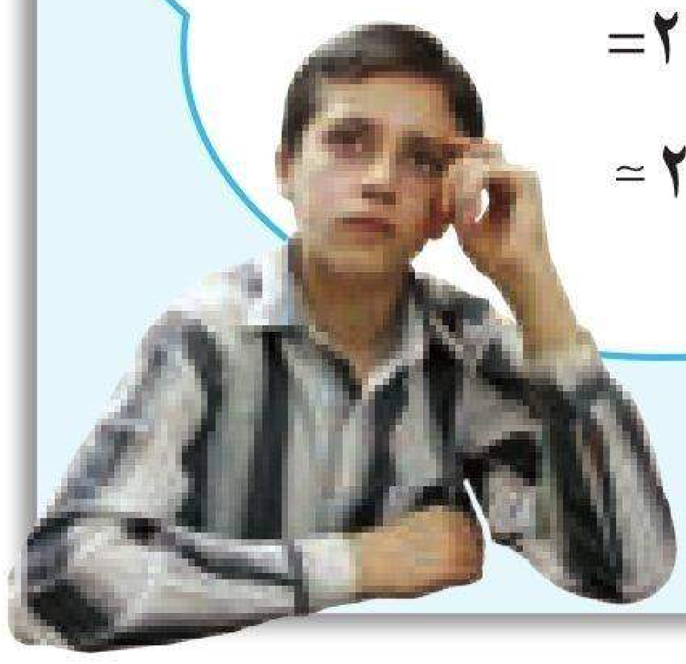
۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.



طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

احمد: چون $۲۷=۳^۳$ و $۸<۲۵<۲۷$، پس $۲<\sqrt[۳]{۲۵}<۳$
بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم
آیا $(۲/۸)^۳ \stackrel{?}{=} ۲۵$
$(۲/۸)^۳=(۲/۸)^۲\times ۲/۸$
$=۲۱/۹۵۲$
$\simeq ۲۲$

محسن: ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد ۲/۹ را امتحان کنم.
$(۲/۹)^۳=(۲/۹)^۲\times ۲/۹$
$=۲۴/۳۸۹$
$\simeq ۲۴/۴$



دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به‌دست آورده‌اند:
روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

دبیر: ریشهٔ سوم ۲۵ تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به‌صورت تقریبی آن را برابر ۲/۹ بگیریم.

$$\sqrt[۳]{۲۵}\simeq ۲/۹$$

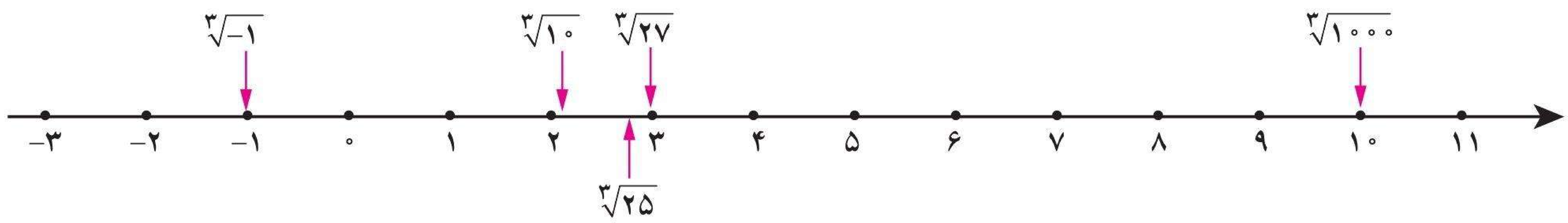
احمد: مقدار دقیق $\sqrt[۳]{۲۵}$ چقدر است؟

دبیر: $\sqrt[۳]{۲۵}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به‌دست آورید، **اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[۳]{۲۵}$ استفاده می‌کنیم.**

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشهٔ سوم ۲۵ حاصل می‌شود.

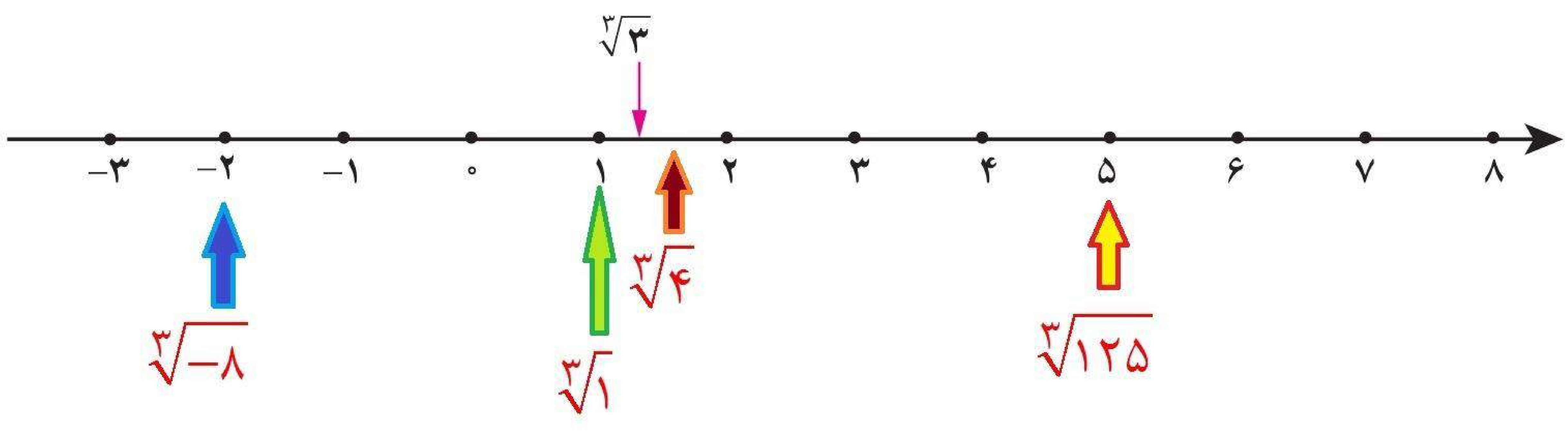
> $\sqrt[۳]{۲۵}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشهٔ سوم ۲۵ به‌کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند ۲/۹، ۲/۹۲ و ۲/۹۲۴ کار می‌کنیم.

ریشهٔ عددها را می‌توانیم به‌طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



۲ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt[۳]{-۸}=-۲$ $\quad \sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$ $\quad \sqrt[۳]{۴}\simeq ۱/۵۸۷$ $\quad \sqrt[۳]{۳}\simeq ۱/۴$ $\quad \sqrt[۳]{۱}=۱$



۳ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است :

الف) چون $۳۶ > ۳۰ > ۲۵$ پس $۶ > \sqrt{۳۰} > ۵$. همچنین چون $۸ > ۵ > ۱$ پس $۲ > \sqrt[۳]{۵} > ۱$.

ب) $\boxed{۳} > \sqrt{۷} > \boxed{۲} \Leftarrow ۹ > ۷ > ۴$

پ) $\boxed{۴} > \sqrt{۱۰} > \boxed{۳} \Leftarrow ۱۶ > ۱۰ > ۹$

ت) $\boxed{-۲} > \sqrt[۳]{-۱۷} > \boxed{-۳} \Leftarrow -۸ > -۱۷ > -۲۷$

ث) $\boxed{۳} > \sqrt[۳]{۲۰} > \boxed{۲} \Leftarrow ۲۷ > ۲۰ > ۸$

۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۵ > \sqrt{\ } > ۴$ ⇐ زیر رادیکال می توان تمام اعداد بزرگتر از ۱۶ و کوچکتر از ۲۵ را نوشت

به توان ۲

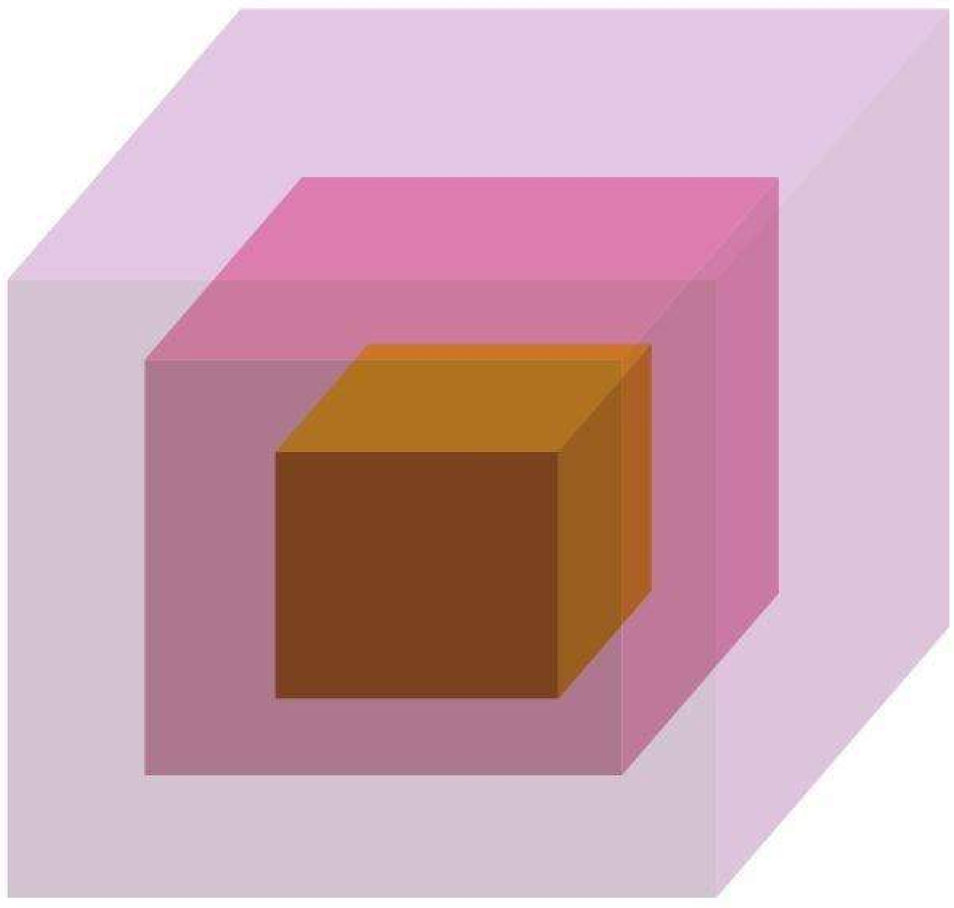
۲۵ ، ۱۶

ب) $۱۰ > \sqrt[۳]{\ } > ۹$ ⇐ زیر رادیکال می توان تمام اعداد بزرگتر از ۷۲۹ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را نوشت

به توان ۳

۱۰۰۰ ، ۷۲۹

۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)



طول ضلع مکعب بیرونی ۴ و طول ضلع مکعب داخلی ۳ می باشد . بنابراین طول ضلع مکعب میانی می تواند هر یک از اعداد بین ۳ و ۴ باشد . به طور مثال می تواند ۳/۱ یا ۳/۵ یا ۳/۹ باشد .

فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هرتساویِ توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

$۵^۴ = ۶۲۵$ ، $(-۵)^۴ = ۶۲۵$ $\Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۶۲۵ : ۵ و -۵

$۲^۴ = ۱۶$ ، $(-۲)^۴ = ۱۶$ $\Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۱۶ : ۲ و -۲

$\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی مثبت و برابر است با ریشهٔ چهارم مثبت عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$. همچنین $-\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی منفی است و برابر است با ریشهٔ چهارم منفی عدد ۶۲۵؛ یعنی $-\sqrt[۴]{۶۲۵} = -۵$.

آیا ۱۶- ریشهٔ چهارم دارد؟ خیر آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶- شود؟ خیر

اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ...دو... ریشهٔ چهارم است که ...قرینه ی... یکدیگرند.
عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

صفر فقط یک ریشه ی چهارم دارد و آن هم خود صفر می باشد .

کار در کلاس

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰،۰۰۰		۳۱۲۵		۸۱	
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	۱۰۰	-۱۰۰	$5\sqrt[4]{5}$	$-5\sqrt[4]{5}$	۳	-۳

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰	۱۹	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{19}$	۴

۳ ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟ ۱ و ۰ و -۱

۴ محاسبه کنید.

$\sqrt[5]{-32} = -2$

$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$

$\sqrt[5]{-0/00032} = -0/2$

$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ...یک... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن ...منفی... است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$-6 < -\sqrt{35} < -5$ $\quad 4 < \sqrt{20} < 5$ $\quad \sqrt{16} = 4$

$2 < \sqrt[3]{20} < 3$ $\quad \sqrt[3]{-8} = -2$ $\quad 8 < \sqrt{75} < 9$

$\sqrt[4]{16} = 2$ $\quad 6 < \sqrt[3]{250} < 7$ $\quad -5 < \sqrt[3]{-90} < -4$

$4 < \sqrt[4]{400} < 5$ $\quad -4 < -\sqrt[4]{120} < -3$ $\quad -3 < -\sqrt[4]{20} < -2$

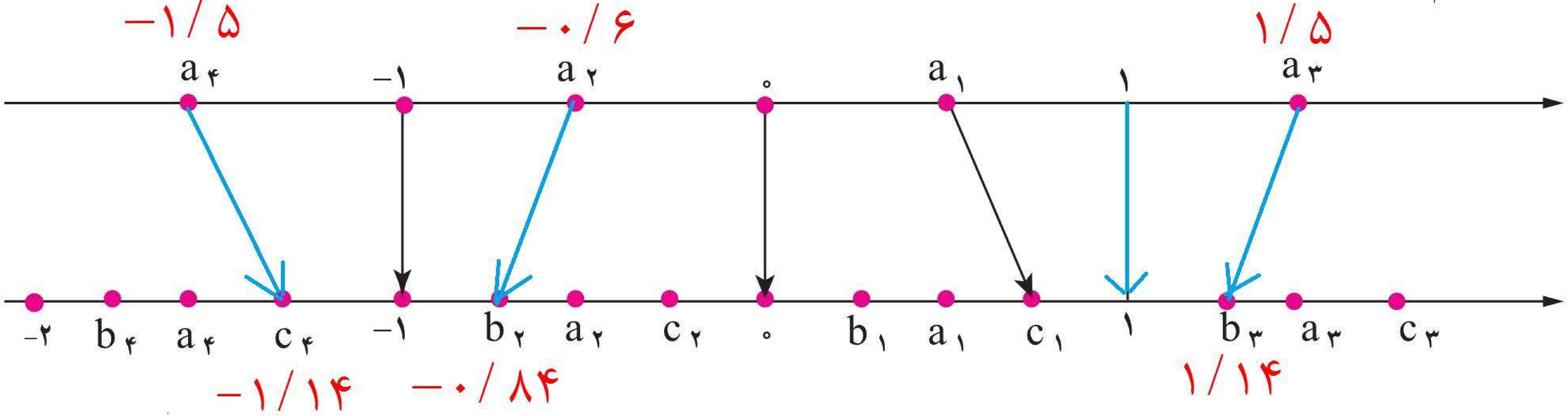
$3 < \sqrt[5]{400} < 4$ $\quad \sqrt[5]{-32} = -2$ $\quad \sqrt[5]{1} = 1$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt[3]{۷/۲۵} = ۱/۹$ $\sqrt[3]{۲۵} = ۲/۹$ $\sqrt{۱۰} = ۳/۱$

$\sqrt[4]{۹۰} = ۳/۰$ $\sqrt[5]{۶۴} = ۲/۲$ $\sqrt[5]{۱۶} = ۱/۷$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. a چه عددی می‌تواند باشد؟ می‌تواند هر عددی بین صفر و یک باشد.

ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (یا صفر یا ۱-

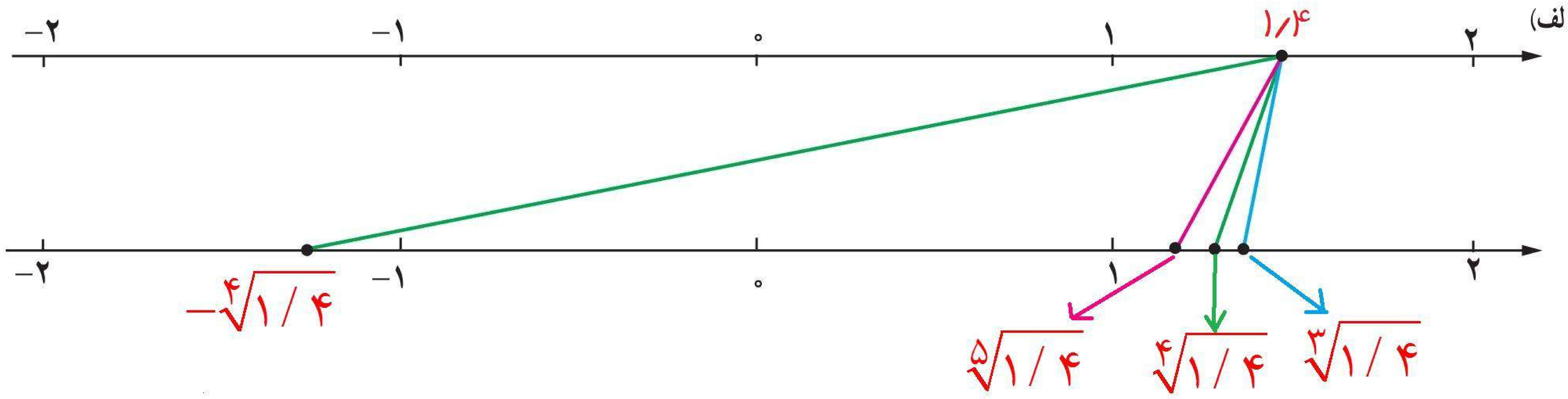
پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ حتماً عددی بزرگ‌تر از یک خواهد بود

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

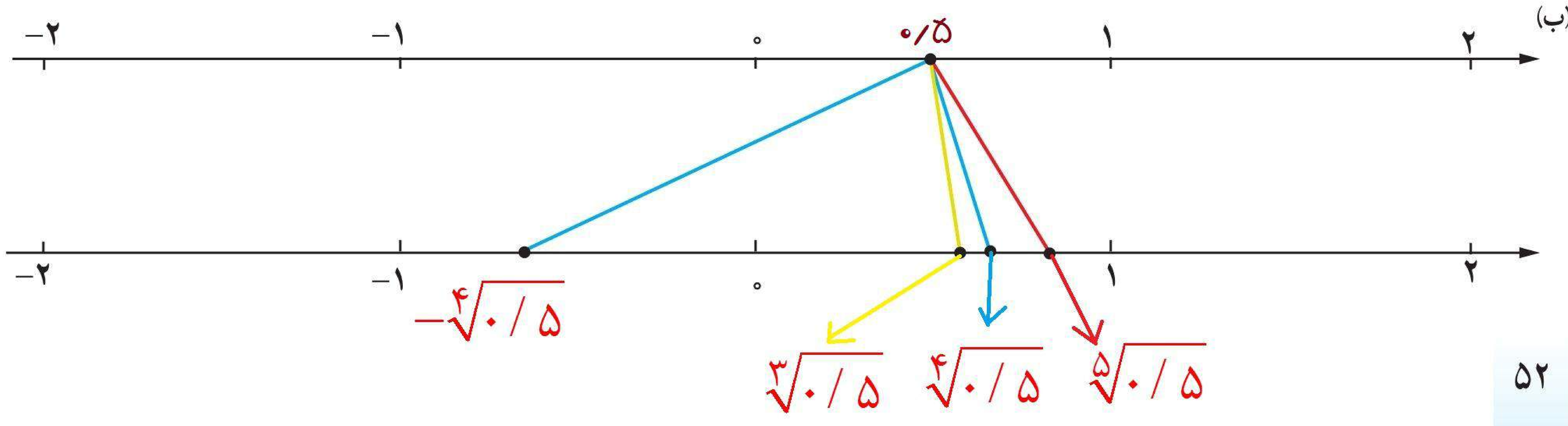
در حالت الف : حتماً آن عدد کمتر از ۱- است . در حالت پ : حتماً آن عدد بین ۱- و صفر است .

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

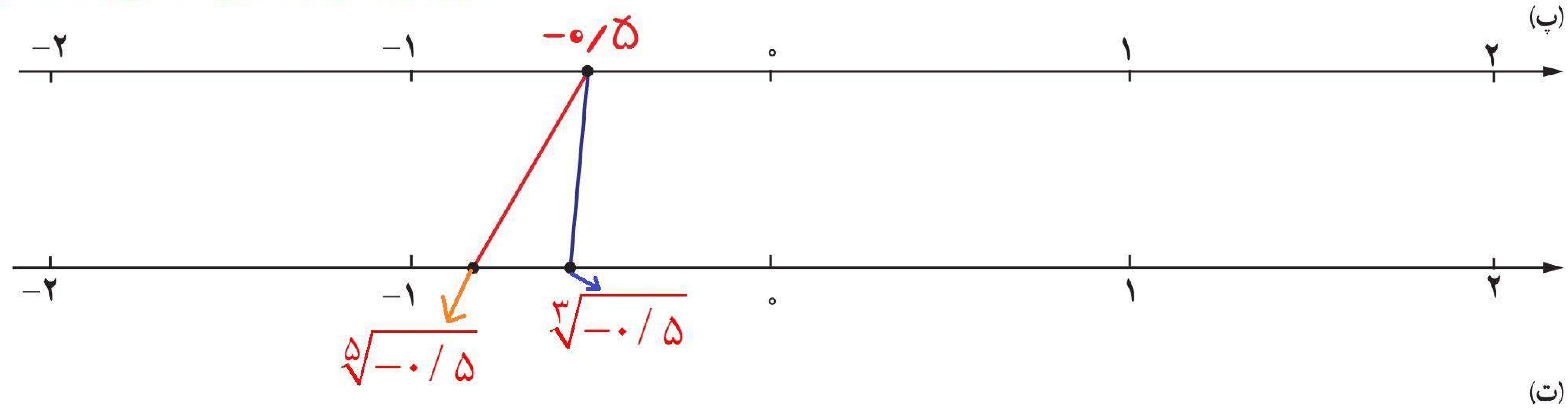
(الف)



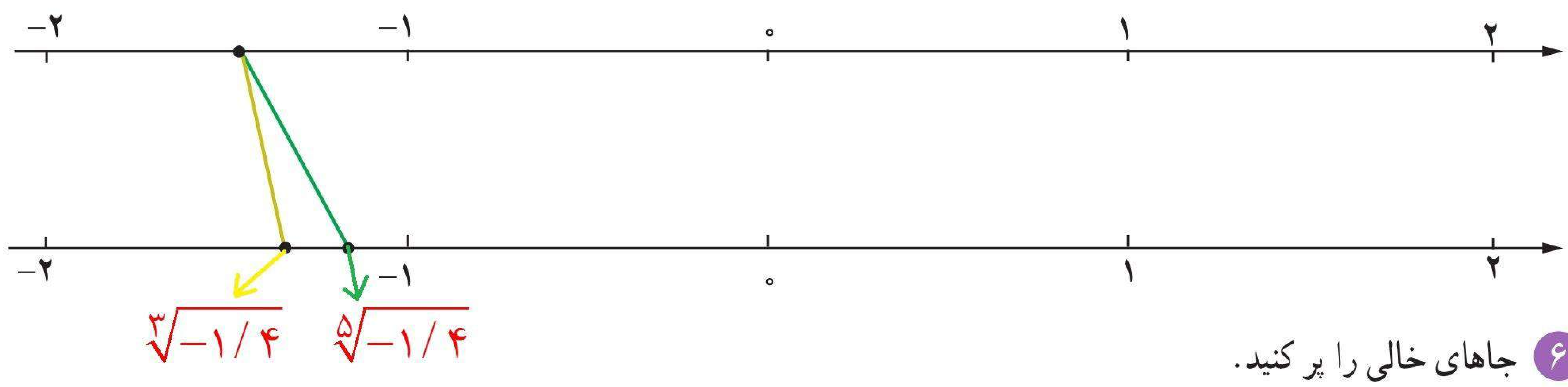
(ب)



(پ)



(ت)



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ....۳-.... ریشه‌های چهارم عدد ....۸۱.... می‌باشند.

ب) اگر $a=\sqrt[۴]{۱۶}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^۳+۵$ را بیابید. $a=۲ \Rightarrow a^۳+۵=۸+۵=۱۳$

۷ می‌دانیم $۱۱=\sqrt[۵]{۱۶۱۰۵۱}$ ، $\sqrt[۵]{۱۷۰۰۰۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ بین دو عدد ۱۱ و ۱۲ واقع است.

۸ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «$<$» ، «$>$» یا «$=$» را قرار دهید.

$۲^۵ > ۲^۲$ $\qquad (۰/۱)^۵ < (۰/۱)^۳$ $\qquad (-۰/۱)^۵ > (-۰/۱)^۳$

$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} = ۰/۱$ $\qquad (-۲)^۵ < (-۲)^۳$ $\qquad (-۲)^۵ < (-۲)^۴$

۹ قرار دهید $\square = \sqrt[۵]{a}$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید $\square^۵$ برابر چه عددی است؟ a بنابراین داریم $(\sqrt[۵]{a})^۵ = ..a..$ دربارهٔ $(\sqrt[۴]{a})^۴$ چه می‌توان گفت؟ برابر a است.

خواندنی

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.


حنا ــ نخستین بزغاله شبیه‌سازی شده خاورمیانه


بنیانا ــ نخستین گوساله شبیه‌سازی شده خاورمیانه

درس دوم: ریشه nام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$-\sqrt[8]{64}$ و $\sqrt[8]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$-\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt{64}=8$ و $-\sqrt{64}=-8$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان ......۲...... و ......۲-...... هستند؛ زیرا $64=2^6$ و $64=(-2)^6$

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ دارای یک ریشه ی هفتم و دو ریشه ی هشتم است .

به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی n ام است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ی n ام است که با هم قرینه اند .

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، دربارهٔ تعداد ریشه‌های n ام a چه می‌توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ گوییم :

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی n ام است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ی n ام است که با هم قرینه اند .

۲ جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه‌هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌ششم	ریشه پنجم	ریشه‌چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64}=-4$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان عددی زوج برسد و مساوی ۶۴- شود.

دربارهٔ ریشه‌های nام ۶۴- ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید. اگر n فرد باشد ، یک ریشه ی n دارد و در صورتی که n زوج باشد ، تعریف نشده است .

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشه nام a چه می‌توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴- گوییم :

اگر n فرد باشد ، یک ریشه ی n دارد و در صورتی که n زوج باشد ، تعریف نشده است .

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه : $b^n=a$

۳ جدول زیر را کامل کنید.

a > ۰	n زوج	a دارای دو ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	a = ۸۱ n = ۴	۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم $۳=\sqrt[۴]{۸۱}$ و $-۳=-\sqrt[۴]{۸۱}$ است
	n فرد	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است .	a = ۲۷ n = ۳	۲۷ دارای یک ریشه ی سوم $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$ است .
a < ۰	n زوج	ریشهٔ nام وجود ندارد	a = −۱ n = ۲	برای ‎−۱ ریشه ی دوم وجود ندارد .
	n فرد	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است .	a = −۳۲ n = ۵	‎−۳۲ دارای یک ریشه ی پنجم $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$ است .

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید :

$\sqrt[۸]{۲۵۶}=۲$ $\quad$ $\sqrt[۷]{۱۲۸}=۲$ $\quad$ $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$

$\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}=-\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $-\sqrt[۴]{۱۶}=-۲$ $\quad$ $\sqrt[۴]{۶۲۵}=۵$ $\quad$ $\sqrt[۹]{-۱}=-۱$

$\sqrt[۶]{۰}=۰$ $\quad$ $-\sqrt{۱}=-۱$ $\quad$ $\sqrt[۳]{-۰/۰۰۱}=-۰/۱$ $\quad$ $\sqrt[۷]{-۱۲۸}=-۲$

۲ الف) می‌دانید که $\sqrt{x^۲}=|x|$ دربارهٔ $\sqrt[۴]{x^۴}$ چه حدسی می‌زنید؟ $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|$ درستی حدس خود را دربارهٔ چند عدد آزمایش کنید.

$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{(۳)^۴}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳\\ |۳|=۳\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۴]{(۳)^۴}=|۳|$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=\sqrt[۴]{۱۶}=۲\\ |-۲|=۲\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۴]{(-۲)^۴}=|-۲|$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$\sqrt[۶]{(-۲)^۶}=-۲$ غلط $\quad$ $\sqrt[۵]{۳^۵}=۳$ صحیح $\quad$ $\sqrt[۴]{(-۳)^۴}=-۳$ غلط

$\sqrt[۶]{(-۲)^۶}=۲$ صحیح $\quad$ $\sqrt[۵]{(-۳)^۵}=-۳$ صحیح $\quad$ $\sqrt[۴]{(-۳)^۴}=۳$ صحیح

پ) به‌طور کلی اگر n زوج باشد، .. $\sqrt[n]{a^n}=$ ....$|a|$ ؛ و اگر n فرد باشد .... $\sqrt[n]{a^n}=a$ ،

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$\sqrt[n]{a^n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \quad \Rightarrow \sqrt[۴]{(-۲)^۴}\neq(\sqrt[۴]{-۲})^۴$ وجود ندارد

ث) در قسمت (ت) تساوی به‌ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟ اگر a عددی مثبت باشد ، برای هر عدد طبیعی n تساوی برقرار است ، اما در صورتی که a عددی منفی باشد ، فقط به ازای n های طبیعی فرد ، تساوی برقرار است .

فعالیت

در سال نهم دیدید که :

برای هر دو عدد مثبت a و b : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $\quad$ برای هر دو عدد a و b : $\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{ab}$

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[۴]{a}\times\sqrt[۴]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید. بله در صورتی که هر دو عدد نامنفی باشند ، تساوی برقرار است .

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=۲\times۳=۶\\ \sqrt[۴]{۱۶\times۸۱}=\sqrt[۴]{۱۲۹۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۱۶\times۸۱}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b ......نامنفی... باشند.

$\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{...۱۲۹۶...}=۶$ $\qquad$ $\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=۲\times۳=....۶....$

دربارهٔ $\sqrt[۵]{ab}=\sqrt[۵]{a}\times\sqrt[۵]{b}$ چه می‌توان گفت؟ در این مورد نیز تساوی برقرار است .

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ خیر لازم نیست

مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=۲\times۳=۶\\ \sqrt[۵]{۳۲\times۲۴۳}=\sqrt[۵]{۷۷۷۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=\sqrt[۵]{۳۲\times۲۴۳}$$

به‌طور کلی داریم :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & \text{a,b>۰ و n زوج}\\ \sqrt[n]{ab} & \text{a, b دلخواه و n یک عدد طبیعی فرد}\end{cases}$$

قرارداد : به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم :

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه $\sqrt{x}$ نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x\geq۰$ است.

تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱ آیا $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^۵$ و $\sqrt[۳]{۲^۵}$ با هم برابرند؟ بله با هم برابرند . زیرا : $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^۵=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲\times۲\times۲\times۲\times۲}=\sqrt[۳]{۲^۵}$

دربارهٔ $\left(\sqrt[۴]{-۲}\right)^۴$ و $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}$ چه می‌توان گفت؟

$\left(\sqrt[۴]{-۲}\right)^۴$ تعریف نشده است . ولی : $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=|-۲|=۲$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[۵]{۲}\right)^۳=\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۲}$$
$$=\sqrt[۵]{۲^۳}$$

۳ درستی رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به m،k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$(\sqrt[۴]{۲})^۳=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۲}=\sqrt[۴]{۲\times۲\times۲}=\sqrt[۴]{۲^۳}$

$(\sqrt[۳]{۷})^۴=\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷}=\sqrt[۳]{۷\times۷\times۷\times۷}=\sqrt[۳]{۷^۴}$

$(\sqrt[۵]{-۲})^۳=\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}=\sqrt[۵]{(-۲)(-۲)(-۲)}=\sqrt[۵]{(-۲)^۳}$

$(\sqrt[۵]{-۲})^۴=\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}=\sqrt[۵]{(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)}=\sqrt[۵]{(-۲)^۴}$

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۲$	$\sqrt[۴]{۲^۴} = ۲ \qquad (۲ = \|۲\|)$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۲$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = ۲ \qquad (۲ = \|-۲\|)$
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۲$	$\sqrt[۳]{۲^۳} = ۲$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۲$	$\sqrt[۳]{(-۲)^۳} = -۲$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

در صورتی که n فرد باشد $a = \sqrt[n]{a^n}$ است. اما اگر n زوج باشد $|a| = \sqrt[n]{a^n}$ است.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۱۶$	$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۱۶$	$(\sqrt[۴]{-۱۶})^۴ \rightarrow$ تعریف‌نشده
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۸$	$(\sqrt[۳]{۸})^۳ = ۲^۳ = ۸$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۸$	$(\sqrt[۳]{-۸})^۳ = (-۲)^۳ = -۸$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟ همواره $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ است، فقط در حالتی که n زوج است، a نمی‌تواند منفی باشد.

تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های > یا < را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt{۰/۲۵}\ \boxed{<}\ \sqrt[۳]{۰/۲۵}$ ۰/۱۲۵ اصلاح شد به ۰/۲۵ $\qquad (۰/۵)^۲\ \boxed{>}\ (۰/۵)^۳$

ب) وقتی $۰<a<۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt{a}\ \boxed{<}\ \sqrt[۳]{a} \qquad a^۲\ \boxed{>}\ a^۳$

۲ فرض کنیم $a=-۱$ است، در $\square$ علامت مناسب را قرار دهید.

$\sqrt[۵]{a}\ \boxed{=}\ \sqrt[۱۱]{a} \qquad \sqrt[۳]{a}\ \boxed{=}\ \sqrt[۵]{a}$

$a^۳\ \boxed{=}\ a^۵ \qquad a^۲\ \boxed{>}\ a^۳$

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ (اگر $\sqrt[n]{a}=b$ آنگاه $b^n=a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به‌شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=b^n=a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۳]{۱}+\sqrt[۳]{۸}=۱+۲=۳\\ \sqrt[۳]{۱+۸}=\sqrt[۳]{۹}\simeq ۲/۰۸\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۳]{۱}+\sqrt[۳]{۸}\neq\sqrt[۳]{۱+۸}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{۱}+\sqrt[۴]{۸۱}=۱+۳=۴\\ \sqrt[۴]{۱+۸۱}=\sqrt[۴]{۸۲}\simeq ۳/۰۰۹\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۴]{۱}+\sqrt[۴]{۸۱}\neq\sqrt[۴]{۱+۸۱}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۵]{-۱}+\sqrt[۵]{-۳۲}=-۱+(-۲)=-۳\\ \sqrt[۵]{-۱+(-۳۲)}=\sqrt[۵]{-۳۳}\simeq -۲/۰۱\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۵]{-۱}+\sqrt[۵]{-۳۲}\neq\sqrt[۵]{-۱+(-۳۲)}$$

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$۵^{-۳}=\frac{۱}{۵^۳}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^۳ \rightarrow \sqrt[۳]{۵^{-۳}}=\frac{۱}{۵}$$

$$\frac{۱}{۱۲۸}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷\Rightarrow\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}}=\frac{۱}{۲}$$ و $$۳^{-۴}=\frac{۱}{۳^۴}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۴\Rightarrow\sqrt[۴]{۳^{-۴}}=\frac{۱}{۳}$$ و $$۲^{-۵}=\frac{۱}{۲^۵}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۵\Rightarrow\sqrt[۵]{۲^{-۵}}=\frac{۱}{۲}$$

۶ به‌جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که :

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}}=\sqrt[۳]{\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳}=\frac{۲}{۳}\\ \frac{\sqrt[۳]{۸}}{\sqrt[۳]{۲۷}}=\frac{۲}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}}=\frac{\sqrt[۳]{۸}}{\sqrt[۳]{۲۷}}$$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو ~~مثبت~~ منفی اند).

$\sqrt[۴]{\frac{-۱۶}{-۸۱}}=\sqrt[۴]{\left(\frac{-۲}{-۳}\right)^۴}=\frac{۲}{۳}$ است در حالی که $\frac{\sqrt[۴]{-۱۶}}{\sqrt[۴]{-۸۱}}$ تعریف نشده است.

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظهٔ شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت nام برابر ۲^n گرم می‌شود :

$۱ , ۲^۱ , ۲^۲ , ۲^۳ , \ldots\ldots , ۲^n$

محمد از پدرش پرسید : «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت : تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت : حدس می‌زنم وزن آنها $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{۱}{۲}$ است.

پدرش گفت : $۲^{\frac{۱}{۲}}$ چقدر است؟

محمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این‌صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^۲$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $b^۲ = ۲$؛ یعنی $b = \sqrt{۲}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجهٔ جالبی است! $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم : $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ ، $\sqrt[۴]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۴}}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $\sqrt[۳]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۳}}$. می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

> برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :
>
> $$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < ۰$ در این صورت $a^{\frac{۱}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۲}{۴}}$ تعریف نمی‌شوند.

فعالیت

۱ توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$۴^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۴}$ ، $۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$ ، $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$

تعریف نمی‌شود $= (-۳)^{\frac{۱}{۵}}$ ، $۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$ ، $۵^{\frac{۱}{۷}} = \sqrt[۷]{۵}$

تعریف نمی‌شود $= (-۵)^{\frac{۱}{۴}}$ ، $۸۱^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱}$ ، $۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۶}$

۲ کدام درست است؟

ب) $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$ صحیح

الف) $(-۳۲)^{\frac{۱}{۵}} = -۲$ غلط

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > ۰$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

(قاعده ضرب توان) $۲^۶ = ۲^{۲\times۳} = (۲^۲)^۳$

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم :

$۵^{\frac{۸}{۳}} = ۵^{۸\times\frac{۱}{۳}} = (۵^۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^۸}$ ، $۲^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۳}} = (۲^۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۲}$

به‌طور کلی :

هرگاه $a > ۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیرصحیحِ $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان‌دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

الف) $۵^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۵^۲}$ ، ب) $۳^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{۳^۲}$ ، پ) $۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۲]{۲^۳}$

ت) $(-۶)^{\frac{۲}{۷}}$ تعریف نشده ، ث) $۱۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶}$ ، ج) $(-۳)^{\frac{۲}{۳}}$ تعریف نشده

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > ۰$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم :

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقهٔ دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و . . . باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البتّه عملاً چنین اتّفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیای از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

کار در کلاس

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{3^5}=\sqrt[4]{3^4\times 3}=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[4]{3}=3\sqrt[4]{3}$ $\qquad$ $3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$

$4^{\frac{7}{5}}=4^{1+\frac{2}{5}}=4\times 4^{\frac{2}{5}}=4\sqrt[5]{4^2}$

روش دوم $\boxed{4^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{4^7}=\sqrt[5]{4^5\times 4^2}=\sqrt[5]{4^5}\times\sqrt[5]{4^2}=4\sqrt[5]{4^2}}$

$2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=2^{\frac{13}{6}}=2^{2+\frac{1}{6}}=2^2\times 2^{\frac{1}{6}}=4\sqrt[6]{2}$ $\qquad$ $4^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{4}$

$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$ $\qquad$ $5^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3\times 5}=\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $(4\times 2)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

$5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$ $\qquad$ $6^{\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{6^3}$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$\sqrt[3]{-1}=$ امکان پذیر نیست $\qquad$ $\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $\sqrt{2^5}=2^{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{3^2}=3^{\frac{2}{7}}$

$\sqrt[5]{2^5}=2^{\frac{5}{5}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-27}=$ امکان پذیر نیست $\qquad$ $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{19}=19^{\frac{1}{5}}$

۳ جدول‌های زیر را کامل کنید:

$a>0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$	5^0	$5^{\frac{1}{2}}$	$5^{\frac{2}{3}}$

$a<0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{6}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=-5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	$(-5)^0$	تعریف نمی‌شود	$(-5)^2=25$	تعریف نمی‌شود

فعالیت

۱ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a>0$).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

۲ دبیر: به‌خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجهٔ زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81}=3$

به‌علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به‌دست آورید.

نسترن: اگر جای توان‌ها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=\left[(-3)^4\right]^{\frac{1}{4}}=\left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4=(-3)^{\frac{1}{4}\times 4}=(-3)^1=-3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $(-3)^4$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{81}=3$$

دبیر : آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید، همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[۴]{(-۳)^۴}=|-۳|=۳$$

۳ با توجه به فعالیت ۱ در صفحهٔ قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

الف) $(۵^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=(\sqrt{۵})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۵}}=\sqrt[۳\times۲]{۵}=۵^{\frac{۱}{۶}}=۵^{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}$

ب) $(۴^{\frac{۱}{۷}})^{\frac{۱}{۵}}=(\sqrt[۷]{۴})^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{\sqrt[۷]{۴}}=\sqrt[۵\times۷]{۴}=۴^{\frac{۱}{۳۵}}=۴^{\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۷}}$

پ) اکنون برای هر عدد $a>۰$، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s=a^{rs}$ را برای $r=\frac{۱}{۴}$ و $s=\frac{۱}{۲}$، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{۱}{۴}})^{\frac{۱}{۳}}=(\sqrt[۴]{a})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{a}}=\sqrt[۱۲]{a}=a^{\frac{۱}{۱۲}}=a^{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}}$$

تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال بنویسید.

$(۴^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}}=۴^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}$ $\qquad ۴^{\frac{۳}{۷}}=\sqrt[۷]{۴^۳}$ $\qquad ۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵}$ $\qquad ۳^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{۳}{۳}}=\sqrt[۳]{۳^۳}$ $\qquad ۱۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۶}$

$۳۲^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۳۲^۲}$ $\qquad ۱۷^{-\frac{۱}{۲}}=(\frac{۱}{۱۷})^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۱۷}}$ $\qquad ۴^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴^۲}$ $\qquad ۳۲^{-\frac{۱}{۵}}=(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۱}{۵}}$ $\qquad ۳^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$ $\qquad a^{\frac{۲}{۷}}=\sqrt[۷]{a^۲}$

۲ هر یک از رادیکال‌ها را به‌صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایهٔ عدد مثبت باشد.

در این تمرین با فرض مثبت بودن a پاسخ ها نوشته شده اند.

$\sqrt[۵]{۲^{۱۰}}=a^{\frac{۱۰}{۵}}=a^۲$ $\qquad \sqrt[n]{a^۲}=a^{\frac{۲}{n}}$ $\qquad \sqrt[۴]{a^۳}=a^{\frac{۳}{۴}}$ $\qquad \sqrt[۷]{a}=a^{\frac{۱}{۷}}$ $\qquad \sqrt[۵]{a^۴}=a^{\frac{۴}{۵}}$ $\qquad \sqrt[۳]{a^۲}=a^{\frac{۲}{۳}}$

۳ می‌دانیم $\sqrt[۱۲]{a^۴}=(a^۴)^{\frac{۱}{۱۲}}=a^{\frac{۴}{۱۲}}=a^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{a}$ $\qquad \sqrt[۶]{a^۲}=a^{\frac{۲}{۶}}=a^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{a}$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است؟ $(a>۰)$ n، m و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt[۴]{۲^۲}$ و $\sqrt[۶]{۲^۳}$ برابرند.

بله این تساوی برای اعداد مثبتِ a همواره برقرار است.

$$\sqrt[۴]{۲^۲}=\sqrt[۲\times۲]{۲^{۲\times۱}}=\sqrt[۲]{۲^۱}=\sqrt{۲} \qquad \sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt[۳\times۲]{۲^{۳\times۱}}=\sqrt[۲]{۲^۱}=\sqrt{۲}$$

۴ فرض کنیم $a=۶۴$، $r=\frac{۱}{۲}$ و $s=\frac{۱}{۳}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^r}{a^s}=\frac{۱۰۲۴^{\frac{۱}{۲}}}{۱۰۲۴^{\frac{۱}{۵}}}=\frac{\sqrt{۱۰۲۴}}{\sqrt[۵]{۱۰۲۴}}=\frac{۳۲}{۴}=۸\\ a^{r-s}=۱۰۲۴^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}}=۱۰۲۴^{\frac{۳}{۱۰}}=(۲^{۱۰})^{\frac{۳}{۱۰}}=۲^۳=۸\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

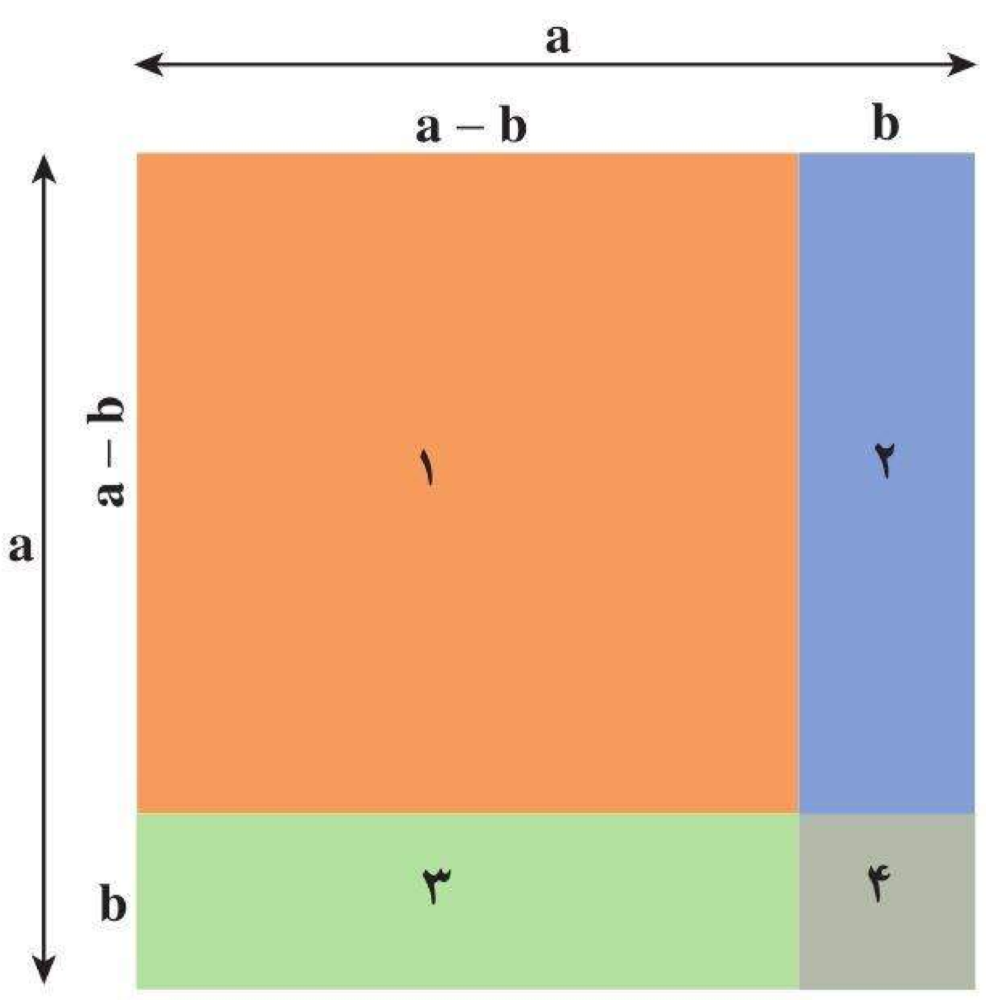
$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^r}{a^s}=\frac{۷۲۹^{\frac{۱}{۲}}}{۷۲۹^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{\sqrt{۷۲۹}}{\sqrt[۳]{۷۲۹}}=\frac{۲۷}{۹}=۳\\ a^{r-s}=۷۲۹^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}=۷۲۹^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{۷۲۹}=۳\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a^r}{a^s}=\frac{۶۴^{\frac{۱}{۲}}}{۶۴^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{\sqrt{۶۴}}{\sqrt[۳]{۶۴}}=\frac{۸}{۴}=۲\\ a^{r-s}=۶۴^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}=۶۴^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{۶۴}=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

۵ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{۸۱}}=\sqrt{۹}=۳$ $\qquad \sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=\sqrt{۴}=۲$ $\qquad \sqrt[۳]{\sqrt{۵}}=\sqrt[۶]{۵}$

درس چهارم: عبارت‌های جبری



$S_۱ = (a-b)^۲$

$S_۱ = S - S_۲ - S_۳ - S_۴$

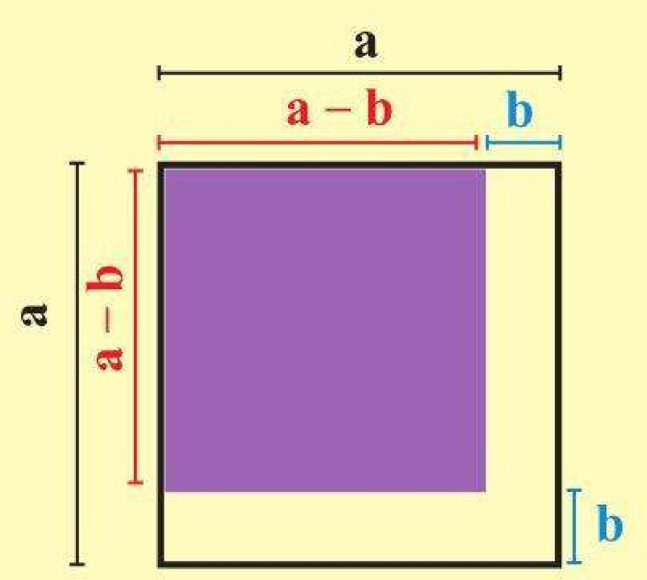
$= a^۲ - b(a-b) - b(a-b) - b^۲$

$= a^۲ - ۲ab + b^۲$

$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲ \Leftarrow (۲)$ و (۱)

$a^۲ \underline{-ab} + b^۲ \underline{-ab} = a^۲ - ۲ab + b^۲$

$=(a-b)^۲$



فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \qquad (۱)$$

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به‌دست آورد. برای مثال اگر $a=\frac{۱}{۵}$ و $b=۳$ اختیار شود.

$$(\frac{۱}{۵}+۳)^۲ = (\frac{۱}{۵})^۲ + ۲\times\frac{۱}{۵}\times ۳ + ۳^۲$$

$$(\frac{۱۶}{۵})^۲ = \frac{۱}{۲۵} + \frac{۶}{۵} + ۹ \rightarrow \frac{۲۵۶}{۲۵} = \frac{۲۵۶}{۲۵}$$

یا اگر در رابطهٔ (۱) به جای b، $-b$ قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲ \qquad (۲)$$

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲ \qquad (۳)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به‌دست آورید.

۱ با محاسبهٔ $(a+b)^۳$ اتحاد دیگری به‌دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^۳ = (a+b)^۲(a+b)$$

$$=(a^۲ + ۲a.b + b^۲)(a+b) = a^۳ + \underline{a^۲b} + \underline{۲a^۲b} + \underline{۲ab^۲} + \underline{ab^۲} + b^۳$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به‌صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به‌دست آوریم:

$$(a-b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲(-b) + ۳a(-b)^۲ + (-b)^۳$$

$$(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^۳$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شمارهٔ (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^۳=(a-b)^۲(a-b)$$
$$=(a^۲-۲ab+b^۲)(a-b)=a^۳-\underline{a^۲b}-\underline{۲a^۲b}+\underline{۲ab^۲}+\underline{ab^۲}-b^۳$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانهٔ فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳=(a-b)(a-b)(a-b) \qquad (۴)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$ را به حاصل‌ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند.

تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$(a\pm b)^۲=a^۲\pm۲ab+b^۲$

$(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+۲ab+c^۲+۲bc+۲ca$

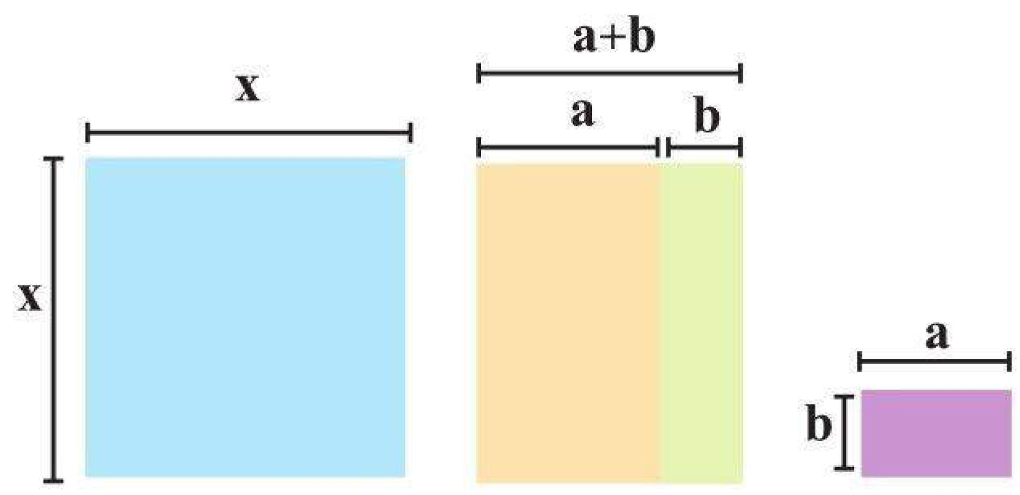
$(a+x)(a+y)=a^۲+(x+y)a+xy$

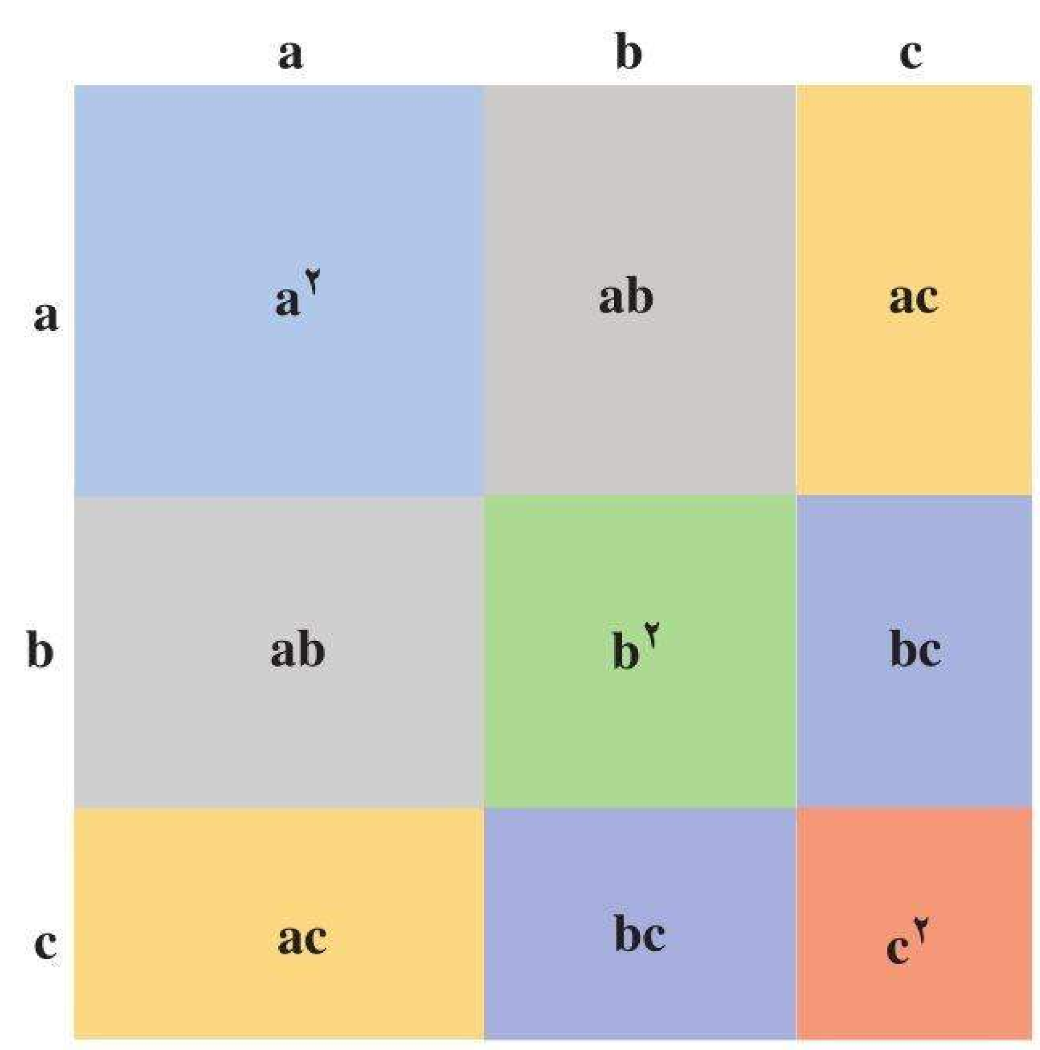
مثال ۱

عبارت $۲x^۲+۳x+۱$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم :

$$۲x^۲+۳x+۱=x^۲+۲x+۱+x^۲+x$$
$$=(x+۱)^۲+x(x+۱)$$
$$=(x+۱)(x+۱+x)=(x+۱)(۲x+۱)$$





مثال ۲

عبارت $a^۳-۲ab+a^۲b-۲b^۲$ را تجزیه کنید :

$$a^۳-۲ab+a^۲b-۲b^۲=a^۲(a+b)-۲b(a+b)$$
$$=(a+b)(a^۲-۲b)$$

کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۲-a^۲b+ab^۲+a^۲b-a^۲b+b^۳=a^۳+b^۳$$
$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳+a^۲b+ab^۲-a^۲b-ab^۲-b^۳=a^۳-b^۳$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^۳+b^۳$ و $a^۳-b^۳$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به‌دست آورید.

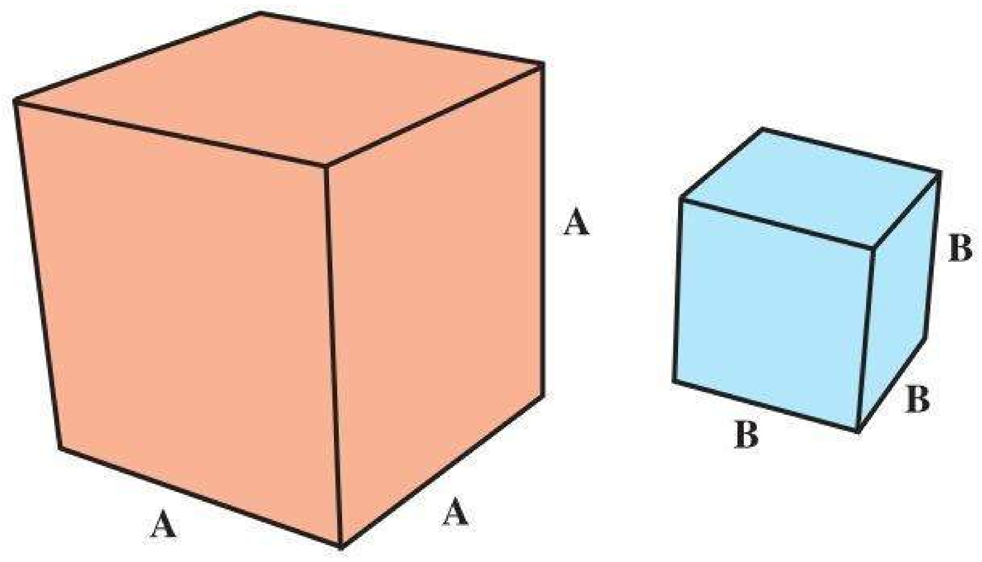
$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$
$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

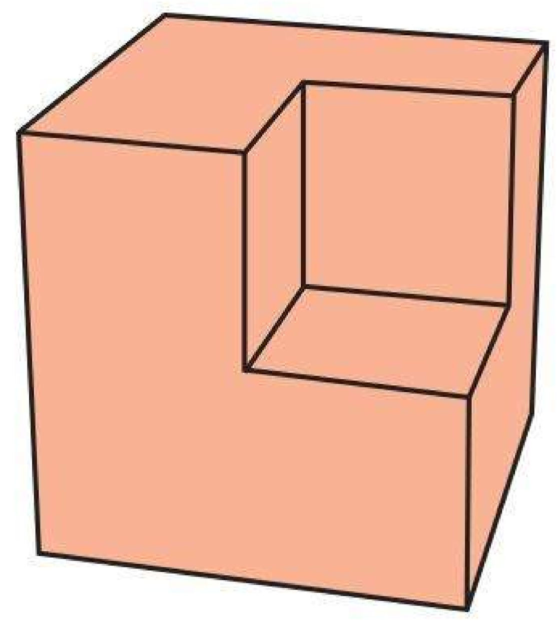
$$۸x^۳-۲۷=(۲x)^۳-۳^۳$$
$$=(۲x-۳)[(۲x)^۲+۲x\times۳+۳^۲]$$
$$=(۲x-۳)(۴x^۲+۶x+۹)$$
$$x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$$
$$x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$$
$$x^۳-۱۲۵=(x-۵)(x^۲+۵x+۲۵)$$
$$x^۶-۱=(x^۳-۱)(x^۳+۱)=(x-۱)(x^۲+x+۱)(x+۱)(x^۲-x+۱)$$

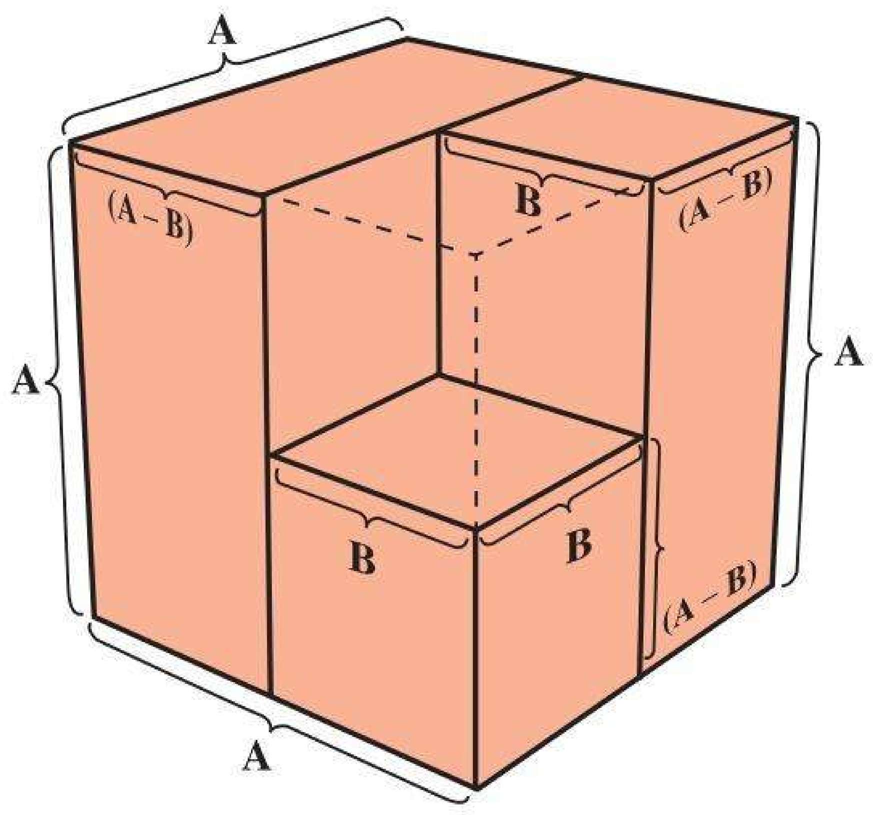
اتحادهای چاق و لاغر

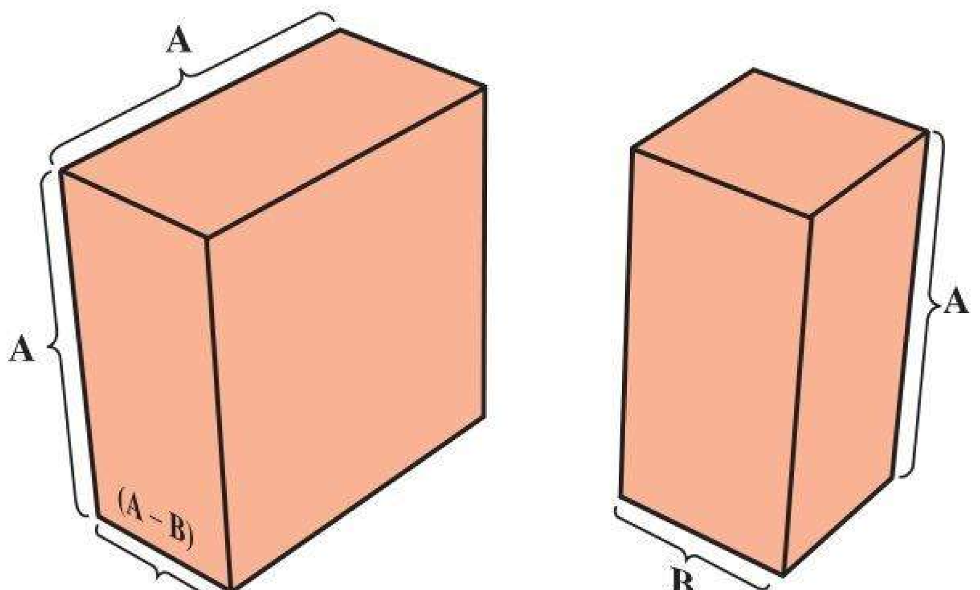
$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$$
$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$$

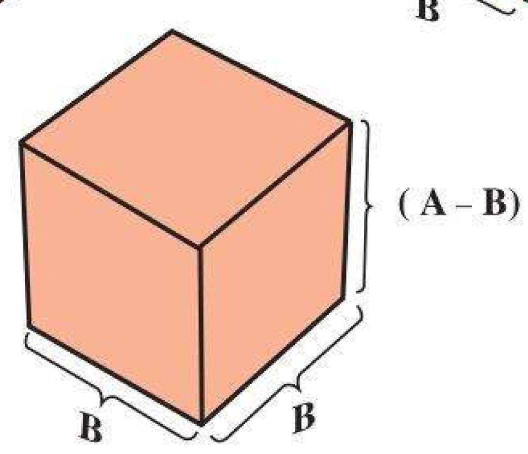


$A^۳-B^۳$









فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید :

$$۱۲=۳\times۴$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک **شمارندهٔ** عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و ... .

مشابه این در اتحاد مزدوج $a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارندهٔ $a^۲-b^۲$ است. همچنین $a^۲-b^۲$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به‌دست می‌آیند :

بعضی از مضرب‌های $a+b$: $a+b$ و $۲(a+b)$ و $(a+b)(a+b)$ و $-۴(a+b)^۲$ و $(a+b)(a-b)$ و...

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

$$۳(a-b),(a-b)(a^۲+ab+۷),(a-b)(x+y-z),\cdots$$

۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

در این مورد می توان دو اتحاد را مثال زد :

اتحاد چاق و لاغر: $a^۳-b^۳$ اتحاد مربع دو جمله ای : $(a-b)^۲$

۳ عبارت $۲۷a^۳-۱$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-۱$ ب) $۳a-۱$ پ) $۹a^۲+۳a+۱$ ت) $۳a+۱$

با توجه به تجزیه ی آن -طبق اتحاد چاق و لاغر- یعنی : $(۳a-۱)(۹a^۲+۳a+۱)$

هر دو گزینه ی ب و پ صحیح هستند.

نکته : عبارت $\sqrt{۳}(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟ یاد آوری : به طور کلی هر عبارت گویا ، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند . (ریاضی نُهم صفحه ی۱۱۴)

گزینه های الف و ب عبارت گویا هستند ولی گزینه های پ و ت گویا نیستند .

الف) $\dfrac{3x-\sqrt{7}}{x^2}$ ب) $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ پ) $\sqrt[3]{x}-1$ ت) $\sqrt[3]{x^2}+x-1$

نکته : یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$$

$x-1=0\Rightarrow x=1$ و $x+1=0\Rightarrow x=-1$ و $x^2+4=0\Rightarrow x^2=-4\rightarrow$ جواب ندارد

بنابراین به ازای ۱- و ۱ تعریف نمی شود .

۶ حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

الف) با توجه به این که می دانیم $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=x-1$ ، عبارت $x-1$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم .

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1+2(\sqrt{x}-1)+3}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$$

ب) با توجه به این که می دانیم $(x-1)(x+1)=x^2-1$ ، عبارت $(x^2-1)(x^2+1)$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم .

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+1)+(x-1)(x^2+1)-(x^2+1)+(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x^3+x+\cancel{x^2}+\cancel{1}+x^3+x-\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-1+\cancel{x^2}-1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2x^3+2x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{((\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1)}+\frac{1}{x-1}=\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}+1}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-1^3}+\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{((\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1)+(x+1)}{(x^2-1)}=\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+x+2}{x^2-1}$$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

ب) $\dfrac{x^3-1}{(x-1)^3}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-1)^{\cancel{3}\,2}}=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

الف) $\dfrac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}=\dfrac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$

پ) $\dfrac{x^2+1}{x^4-1}=\dfrac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}=\dfrac{1}{x^2-1}$

ت) $\dfrac{y^7-y}{y^3+y^2+y}=\dfrac{\cancel{y}(y^6-1)}{\cancel{y}(y^2+y+1)}=\dfrac{(y^3-1)(y^3+1)}{y^2+y+1}=\dfrac{(y-1)\cancel{(y^2+y+1)}(y^3+1)}{\cancel{y^2+y+1}}=(y-1)(y^3+1)$

ث) $\dfrac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y}=\dfrac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)}=\dfrac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)}=\dfrac{\cancel{y}(y-2)\cancel{(y+2)}(y^2+3)}{8\cancel{y}\cancel{(y+2)}}=\dfrac{(y-2)(y^2+3)}{8}$

۲ در اتحاد $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$ قرار دهید $a=\sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید :

$$(\sqrt[3]{x^2})^3+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)$$

$$x^2+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)$$

۳ **گویا کردن مخرج‌های گنگ** : صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت‌هایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{(\sqrt[3]{x^2}+1)((\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1)}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

تمرین

۱ هر یک از عبارت‌ها را تا حد ممکن (به‌عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^6-y^6=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

ب) $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

پ) x^2+y^2 تجزیه پذیر نیست

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}-\frac{5x}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}+\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}-\frac{5x}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$

۳ بعضی از ضرب‌های عددی را با استفاده از اتحادها می‌توان به‌صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب‌ها را ذهنی انجام دهید.

الف) $16\times14=(15+1)(15-1)=15^2-1=224$

ب) $105^2=(100+5)^2=100^2+2\times100\times5+5^2=10000+1000+25=11025$

پ) $1007^2=(1000+7)^2=1000^2+2\times1000\times7+7^2=1000000+14000+49=1014049$

ت) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2=10000-200+1=9801$

۴ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$

ابتدا تک تک کسرها را گویا کرده سپس جایگزین می کنیم :

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}\times\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}\times\frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[8]{x}+1}=\frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1}\times\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$\Rightarrow$ عبارت $=\frac{1+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

۵ عبارت $a^6-2b^6+2a^3b^3$ را تجزیه کنید. با اجازه ی مولف سوال را به شکل زیر اصلاح کرده و تجزیه می کنم:

$$a^6-3b^6+2a^3b^3=\underline{a^6-a^3b^3}+\underline{3a^3b^3-3b^6}=a^3(a^3-b^3)+3b^3(a^3-b^3)=(a^3-b^3)(a^3+3b^3)$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3+3b^3)$$

خواندنی

❊ سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$5^2=4^2+3^2$

یک سه تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

❊ (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد :

$(1/01)^{365}=37/8$

$(0/99)^{365}=0/03$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/01)^{730}$ و $(0/99)^{730}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

❊ (مثلث خیا

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

ضرایب موجود در بسط $(a+b)^n$ همان اعداد داده شده در سطر $n+1$ مثلث خیام است .

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$

$$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$