ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

# ۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

**یادآوری :** در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲,۳,۵,۷\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x\in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن $P$ مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه $A$ است، می‌نویسیم $۲\in A$، از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه $A$ تعلق ندارد.

## کار در کلاس

**۱** فرض کنید $A=\{a,b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\}\in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\{a\}$ وجود ندارد

ب) $\varnothing\in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\varnothing$ وجود ندارد

پ) $\{a\}\subseteq A$ درست است زیرا $a\in A$ است .

ت) $b\subseteq A$ نادرست است زیرا b مجموعه نیست و نمی تواند زیر مجموعه باشد .

ث) $a\in A$ درست است زیرا $a$ درون مجموعه ی A است .

ج) $\{a,b\}\subseteq A$ درست است زیرا $a$, $b$ هر دو عضو مجموعه ی A هستند .

**۲** کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹ \text{ و } ۲x=۴\}$ $\quad x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$ و $۲x=۴\Rightarrow x=۲$ ، بنابراین هم زمان $x=۲$ و $x=\pm۳$ نمی تواند باشد در نتیجه مجموعه تُهی است .

ب) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$ $\quad x+۸=۸\Rightarrow x=۰$ ، بنابراین مجموعه برابر $\{۰\}$ بوده و ناتُهی است .

پ) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x\neq x\}$ وجود ندارد عددی که با خودش برابر نباشد ، بنابراین مجموعه هیچ عضوی ندارد و تُهی است .

ت) $\{x\in\mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$ $\quad x^۲=۷x\Rightarrow x=۰\vee x=۷\xrightarrow{x\in\mathbb{N}}x=۷$ ، بنابراین مجموعه به صورت $\{۷\}$ بوده و ناتُهی است .

**۳** مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$B=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳=m\}=\{-۱,۰,۱\}$

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\leq۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$D=\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$C=\{k\in\mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}=\{-۱,۱\}$

**۴** با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$B\subseteq A\longrightarrow$ درست

$B\subseteq C\cup A\xrightarrow{C\cup A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}}$ درست

$B-D\subseteq A\xrightarrow{B-D=\{-۱,۰\}}$ درست

$A\cap D\subseteq C\xrightarrow{A\cap D=\{۱,۲\}}$ نادرست

$B\in A\longrightarrow$ نادرست

$C\not\subseteq A\longrightarrow$ نادرست



ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

# تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

**فعالیت**

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید. $\varnothing , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\}$

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b , c\}$ از مجموعهٔ $A$ را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و $b$ متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های $A$ را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

| زیر مجموعه | $\varnothing$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $\{c\}$ | $\{a,b\}$ | $\{a,c\}$ | $\{b,c\}$ | $\{a,b,c\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| کُد زیر مجموعه | ۰۰۰ | ۱۰۰ | ۰۱۰ | ۰۰۱ | ۱۱۰ | ۱۰۱ | ۰۱۱ | ۱۱۱ |

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم اول ۲ ، رقم دوم ۲ ، رقم سوم ۲ $\xrightarrow{\times} ۲^۳ = ۸$

۴ فرض کنید $A=\{a_۱ , a_۲ , a_۳ , a_۴\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که $A$ چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول ۲ ، رقم دوم ۲ ، رقم سوم ۲ ، رقم چهارم ۲ $\xrightarrow{\times} ۲^۴ = ۱۶$

۵ اگر $A=\{a_۱ , a_۲ , a_۳ , \dots , a_n\}$ در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که $A$ چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول ۲ ، رقم دوم ۲ ، رقم سوم ۲ ، ... ، رقم $n$ام ۲ $\xrightarrow{\times} ۲^n$

فرض کنید $A$ یک مجموعه $n$ عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های $A$ برابر با $۲^n$ است.

**مثال :** مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های $A$ را در یک مجموعه بنویسید.

$$P(A)=\{\varnothing , \{a\} , \{\{a\}\} , \{\varnothing\} , \{a,\{a\}\} , \{a,\varnothing\} , \{\{a\},\varnothing\} , \{a,\{a\},\varnothing\}\}$$

**خواندنی**

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $A$، مجموعهٔ توانی $A$ نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه $A$ دارای $n$ عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای $۲^n$ عضو است.

اگر $A \subseteq B$ به‌طوری که $A \neq B$ آن‌گاه $A$ زیرمجموعه محض یا سرهٔ $B$ نامیده می‌شود.

**مثال :** مجموعهٔ متناهی $A$ را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای $A$ اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید $A$ چند عضوی است.

**حل :** فرض کنیم $A$ دارای $n$ عضو باشد، پس دارای $۲^n$ زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای $A$ اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های $A$، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $۲^n+۴۸$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای $A$ اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با $۲^{n+۲}$ است، بنابراین داریم :

$$۲^n+۴۸ = ۲^{n+۲}= ۲^n \times ۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲^n +۴۸=۴\times ۲^n \Rightarrow ۴\times ۲^n-۲^n =۴۸$$

$$\Rightarrow ۳\times ۲^n =۴۸ \Rightarrow ۲^n =۱۶= ۲^۴ \Rightarrow n=۴$$

در نتیجه مجموعه $A$، چهار عضوی است.

## افراز یک مجموعه

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

### فعالیت

۱ مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های $A$ به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی $A$ که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با $A$ شود. $\{c\}, \{a,b\}$

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید. $\{a\}, \{b,c\}$ همچنین دو مجموعه ی $\{b\}, \{a,c\}$

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با $A$ شود؟

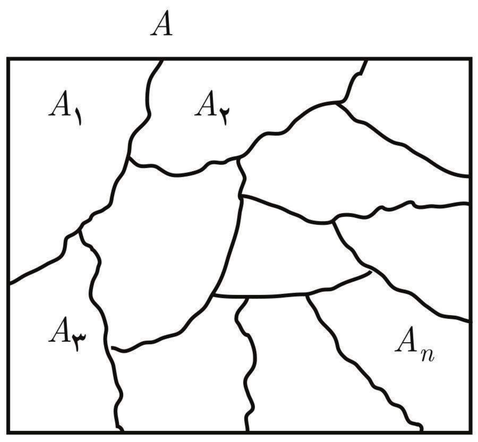
بله $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ زیر مجموعه‌های $A$ باشند. مجموعه $A$ به $n$ زیرمجموعه $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

I) $\forall\, ۱ \leq i \leq n\,;\, A_i \neq \varnothing$

II) $\forall i, j\ (i\neq j\,;\, A_i \cap A_j = \varnothing)$

III) $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$




### کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای $A$ محسوب می‌شود؟

۱ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۶\}$ و $\{۴, ۸, ۹\}$ افراز نیست زیرا ۷ درون هیچکدام قرار ندارد یعنی اجتماع آنها A نخواهد شد .

۲ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۵, ۷, ۹\}$ افراز نیست زیرا عدد ۵ به عنوان عضو مشترک می باشد و در افراز نباید عضو مشترک وجود داشته باشد .

۳ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۷, ۹\}$ شرایط افراز برقرار است بنابراین افراز می باشد .

## تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

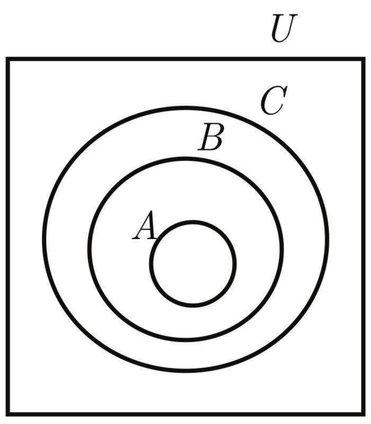
فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو $A$، عضوی از $B$ باشد در این صورت $A$ را زیرمجموعهٔ $B$ نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. چنانچه عضوی در $A$ وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعهٔ $B$ نباشد در این صورت $A$ زیرمجموعه $B$ نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\ ;\ (x\in A \wedge x\notin B)$$

## روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های $A$ و $B$ در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند $x$ از $A$ فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که $x$ در $B$ وجود دارد. از آنجا که $x$ دلخواه بوده است در واقع هر عضو $A$ در $B$ است بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.




**ویژگی ۱ــ** فرض کنید $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

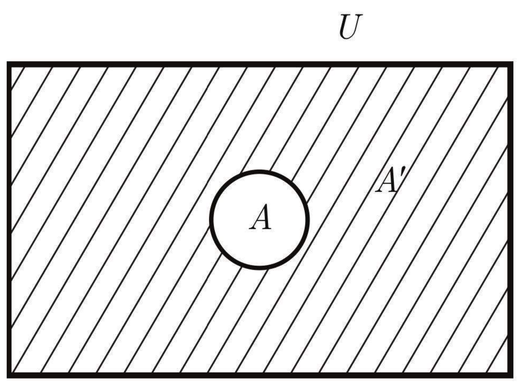
**اثبات :** برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\ ;\ x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subseteq C$$




**ویژگی ۲ــ** فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند و $A\subseteq B$، ثابت کنید $B'\subseteq A'$. ($A'$ و $B'$ به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های $A$ و $B$ هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم $A$ مجموعه‌ای با مرجع $U$ باشد، متمم مجموعه $A$ برابر با مجموعهٔ اعضایی از $U$ است که متعلق به مجموعه $A$ نباشند و آن را با $A'$ نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

**اثبات :** برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$$

**ویژگی ۳ــ** برای هر مجموعه دلخواه مانند $A$ با مجموعه مرجع $U$ ثابت کنید : $\varnothing \subseteq A$.

**اثبات :** برای اثبات $\varnothing \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x\ ;\ (x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم یعنی $x \in \varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing \subseteq A$.

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

## کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های $A$ و $B$ با مرجع $U$ ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$.

**اثبات :**

$$\forall x;\ (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین داریم : $\forall x;(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید. اولاً گزاره ی $x \in B$ می تواند درست یا نادرست باشد ولی با توجه به درستیِ گزاره ی $x \in A$ ترکیب فصلی آنها یعنی $x \in A \vee x \in B$ درست می باشد . ثانیاً در اثبات نشان داده شده که هر عضو درون $A$ عضوی از $A \cup B$ است . در نتیجه $A \subseteq A \cup B$ خواهد بود .

۲ فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ و $D$ چهار مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.

**اثبات :** جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x;[x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \ (\text{زیرا } A \subseteq B) \\ \vee \qquad\qquad\qquad \vee \\ x \in C \Rightarrow x \in D \ (\text{زیرا } C \subseteq D) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$$

بنابراین داریم :

$$\forall x;\ [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

۳ فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند ثابت کنید اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $(A \cup B) \subseteq C$.

**راهنمایی :** از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

## دو مجموعه مساوی

فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند به طوری که هر عضو $A$، عضوی از $B$ و هر عضو $B$ عضوی از $A$ باشد؛ یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$، در این صورت $A$ با $B$ مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت : $A=B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

## کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱, ۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با $A$ مساوی است؟ (با ذکردلیل).

الف) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\}$ مساوی $A$ است زیرا : $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \vee x = ۲ \Rightarrow \{۱, ۲\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \le x \le ۲\}$ مساوی $A$ نیست زیرا این مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی از ۱ تا ۲ می باشد و بی شمار عضو دارد .

پ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰\}$ مساوی $A$ نیست زیرا : $۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \vee x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \{-۱, -\frac{۱}{۲}\}$

ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid ۱ \le x \le ۲\}$ مساوی $A$ است زیرا این مجموعه شامل اعداد طبیعی از ۱ تا ۲ می باشد که خود اعداد ۱و۲ خواهد بود .

**مثال :** فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید $A\cap B=B\cap A$ . (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

**اثبات :** برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A \quad (۱) \quad ; \quad B\cap A\subseteq A\cap B \quad (۲)$$

اثبات (۱) :

$$\forall x;\ [x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A$$ (طبق خاصیت جابه‌جایی $\wedge$)

$$\Rightarrow x\in B\cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

**مثال :** فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$ .

**اثبات :**

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U \mid x\in B\wedge x\notin B\}=\varnothing$$ (زیرا $A\subseteq B$)

$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

## تمرین

**۱** مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x \mid$ یک لوزی است $x\}$ $\qquad$ $A=\{x \mid$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x \mid$ یک مربع است $x\}$ $\qquad$ $B=\{x \mid$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subseteq C$ درست ، زیرا مربع نوع خاصی از لوزی است که زوایای داخلی آن قائمه باشد .

ب) $B\subseteq D$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد تمام مستطیل ها مربعند .

پ) $A\subseteq B$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد که همه ی چهار ضلعی ها مستطیلند . ممکن است ذوزنقه یا ... باشند .

ت) $D\subseteq A$ درست ، زیرا مربعی نوعی چهار ضلعی است .

**۲** فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$ .

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، $X$ می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) $X$ و $B$ عضو مشترکی ندارند. $X=C$ یا $X=E$

ب) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$ $X=A$ یا $X=B$ یا $X=D$

پ) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ $X=D$ یا $X=E$

ت) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$ چنین مجموعه ای وجود ندارد .

**۳** درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$ نادرست ، زیرا $\{\varnothing\}$ مجموعه ای یک عضوی است ولی $\varnothing$ عضو ندارد .

ب) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ درست ، زیرا $\varnothing$ زیر مجموعه ی همه ی مجموعه هاست .

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ نادرست ، زیرا $\varnothing$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه وجود دارد .

ت) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$ درست ، زیرا $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ مجموعه ی دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه است .

**۴** کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$A=\{m\in\mathbb{Z} \mid |m|<۲\}=\{-۱,۰,۱\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۳=x\}=\{-۱,۰,۱\}$

$C=\{y\in\mathbb{Z} \mid y^۲\leq ۲y\}=\{۰,۱,۲\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۲\leq ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳+۲m=۳m^۲\}=\{۰,۱,۲\}$

بنابراین نتیجه می شود که : $A=B=D$ و $C=E$

**۵** مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه $A$ و $B$ و $C$ بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$ $\Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$ و $C=\{\{\{۱\},۱\},۲\}$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$ $\Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$ و $C=\{\{\{۱\},۱\},\{۱\}\}$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B$ $\Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

**۶** اگر دو عضو از مجموعه $A$ حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه $A$ چند زیرمجموعه دارد؟

گیریم مجموعه ی $A$ دارای $n$ عضو باشد در نتیجه $۲^n - ۳۸۴ = ۲^{n-۲}$ ، بنابراین به حل این معادله می پردازیم :

$۲^n - ۳۸۴ = ۲^n \times \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲^n - ۲^n \times \frac{۱}{۴} = ۳۸۴ \Rightarrow \frac{۳}{۴}۲^n = ۳۸۴ \xrightarrow[\div ۳]{\times ۴} ۲^n = ۵۱۲ = ۲^۹ \Rightarrow n = ۹ \rightarrow$ مجموعه دارای ۹ عضو است .

**۷** اگر $A=\{۲ , x+۲y ,۴\}$ و $B=\{۴ ,۵ , x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر $x$ و $y$ را بیابید.

$$\begin{cases} x-y=۲ \\ x+۲y=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۳ , y=۱$$

**۸** ثابت کنید برای مجموعه‌های $A$ و $B$ با مرجع $U$ داریم : $A-B\subseteq A$ .

$\forall x : [x\in A-B] \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A$

بنابراین : $A-B\subseteq A$

**۹** فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$ اثبات : $\left.\begin{matrix} A\subseteq B \\ C\subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$ اثبات : $\forall x , x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \wedge x\in C \Rightarrow x\in B\cap C$

بنابراین : $A\cap C\subseteq B\cap C$

**۱۰** مجموعه‌های $A$ و $B$ و $C$ و $D$ با مرجع $U$ را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$ اثبات : $\forall x , x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C \xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B \wedge x\in D \Rightarrow x\in B\cap D$

بنابراین : $A\cap C\subseteq B\cap D$

ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$ اثبات : $\forall x , x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C \xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B \wedge x\in D \overset{?}{\Rightarrow} x\in B \vee x\in D$

$\Rightarrow x\in B\cup D \rightarrow$ بنابراین حکم برقرار است .

? توجه داشته باشید که : اگر $p\wedge q$ درست باشد ، آنگاه $p$ درست و $q$ نیز درست خواهد بود در نتیجه $p\vee q$ درست است . بنابراین از $p\wedge q$ می توان $p\vee q$ را نتیجه گرفت.

**۱۱** الف) فرض کنید $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید $A=\varnothing$ . ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید $A=U$ .

اثبات الف) می دانیم تُهی زیر مجموعه ی هر مجموعه است بنابراین : $\varnothing\subseteq A \wedge A\subseteq\varnothing \Rightarrow A=\varnothing$

اثبات ب) می دانیم هر مجموعه زیر مجموعه ی مرجع است بنابراین : $A\subseteq U \wedge U\subseteq A \Rightarrow A=U$

**۱۲** هرگاه $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ اثبات :

$$\left.\begin{matrix} \forall x , x\in B-A \Rightarrow x\in B \wedge x\notin A \Rightarrow x\in B \rightarrow B-A\subseteq B \\ \forall x , x\in B \xrightarrow{A\cap B=\varnothing} x\in B \wedge x\notin A \Rightarrow x\in B-A \rightarrow B\subseteq B-A \end{matrix}\right\} \Rightarrow B-A=B$$

ب) $A-B=A$ برای اثبات مشابه قسمت الف عمل می کنیم . البته می توان گفت که : این ادعا همان ادعای قسمت الف می باشد و فقط بازی با حروف صورت گرفته است .

**۱۳** فرض کنید $X=\{a ,b ,c ,d ,e ,f ,g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای $X$ محسوب می‌شود.

الف) $\{d ,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a ,c ,e\}$ افراز نمی باشد زیرا اجتماع آنها مساوی مجموعه ی $X$ نیست .

ب) $\{b ,e ,f\}$ و $\{c ,d\}$ و $\{a ,e ,g\}$ افراز نمی باشند زیرا دارای عضو مشترک هستند .

پ) $\{d ,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a ,b ,e ,g\}$ افراز است .

ت) $\{a ,b ,c ,d ,e ,f ,g\}$ افراز است .

ث) $\{e\}$ و $\{f ,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b ,c\}$ و $\{a\}$ افراز است .



ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500