@riazicafe

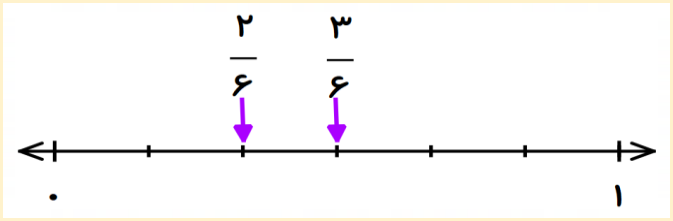
فعالیت :

می خواهیم بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چند کسر بنویسیم.به نظر شما بین این دو عدد چند کسر وجود دارد؟

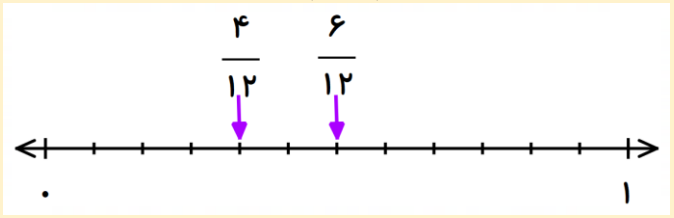
در ابتدا باید بدانیم $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است یا $\frac{۱}{۳}$؟چه راهکاری به ذهن شما می رسد؟بله ،بهترین کار یکسان کردن مخرج ها است.

$$\frac{۱_{\times ۲}}{۳_{\times ۲}}=\frac{۲}{۶} \quad \text{و} \quad \frac{۱_{\times ۳}}{۲_{\times ۳}}=\frac{۳}{۶} \quad \Rightarrow \quad \frac{۲}{۶}<\frac{۳}{۶}$$

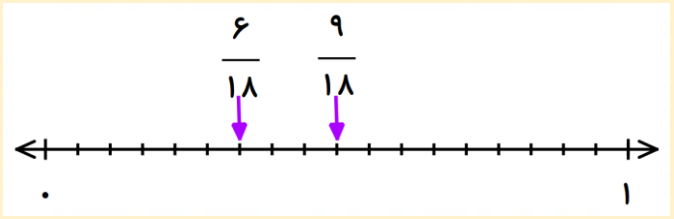
همانطور که مشاهده می کنید بین $\frac{۲}{۶}$ و $\frac{۳}{۶}$ به ظاهر عددی وجود ندارد. ولی بیایید کمی بیشتر فکر کنیم. این کسرها را روی محور در نظر بگیرید که در آن هر واحد ۶ قسمت شده است.



حالا بیایید هر واحد را روی محور به دوازده قسمت تقسیم کنیم.



اتفاق بسیار جالبی رخ داد.قسمت ها را که کوچکتر کردیم. بین دو عدد فاصله ای ایجاد شد.و کسر $\frac{۵}{۱۲}$ بین این دو عدد ظاهر شد.



در اینجا نیز مشاهده می کنید که وقتی واحد به ۱۸ قسمت تقسیم شد، باز هم فاصله بیشتر شد.و دو عدد نمایان گردید.

به نظر شما برای اینکه کسرهای بیشتری ایجاد کنیم چه کاری باید انجام دهیم؟ بله، درست حدس زدید ، باید قسمت ها را بیشتر کنیم وهرچه قسمت ها بیشتر، تعداد کسرها بیشتر.

برای درک بهتر مراحل را یک جا بیان می کنیم.

$$\frac{۱}{۳}<?<\frac{۱}{۲}$$

ابتدا هم مخرج می کنیم.

$$\frac{۱_{\times ۲}}{۳_{\times ۲}}<?<\frac{۱_{\times ۳}}{۲_{\times ۳}} \rightarrow \frac{۲}{۶}<?<\frac{۳}{۶}$$

قسمت ها را بیشتر می کنیم(با ضرب صورت و مخرج در یک عدد) $\times ۵$

$$\rightarrow \frac{۱۰}{۳۰}<?<\frac{۱۵}{۳۰}$$

هرچه عدد ضرب شده بیشتر باشد، فاصله بیشتر می گردد.

$$\frac{۱۱}{۳۰},\frac{۱۲}{۳۰},\frac{۱۳}{۳۰},\frac{۱۴}{۳۰}$$

تمرین (۱):

بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ پنج کسر بنویسید.

فعالیت :

می خواهیم بین $-\frac{۱}{۵}$ و $-\frac{۱}{۳}$ چهار کسر بنویسیم.روش کار با فعالیت قبلی هیچ تفاوتی ندارد فقط در مقایسه باید دقت کنید.

$$-\frac{۱_{\times ۳}}{۵_{\times ۳}}=-\frac{۳}{۱۵} \qquad -\frac{۱_{\times ۵}}{۳_{\times ۵}}=-\frac{۵}{۱۵} \qquad \rightarrow -\frac{۵}{۱۵}<-\frac{۳}{۱۵}$$

$$-\frac{۵}{۱۵}<?<-\frac{۳}{۱۵} \qquad \xrightarrow{\times ۴} \qquad -\frac{۲۰}{۶۰}<?<-\frac{۱۲}{۶۰}$$

$$-\frac{۱۹}{۶۰},-\frac{۱۸}{۶۰},-\frac{۱۷}{۶۰},-\frac{۱۶}{۶۰}$$

تمرین (۲):

بین $-\frac{۳}{۴}$ و $-\frac{۵}{۶}$ پنج کسر پیدا کنید.

تمرین (۳):

الف) توضیح دهید که چگونه بین دو کسر ، می توان بیشمار کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه اعداد گویا را می توان با نوشتن عضوها نشان داد؟چرا؟

فعالیت :

« مجموعه اعداد گویا به صورت نمادین : $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\}$ »

$\frac{a}{b}$ یعنی هر عددی که بتوان به صورت کسری نوشت. مانند: $-۱/۳=-۱\frac{۳}{۱۰}=-\frac{۱۳}{۱۰}$, $+۳=+\frac{۳}{۱}$, $-\frac{۲}{۵}$

$a,b\in\mathbb{Z}$ یعنی صورت مخرج عدد صحیح باشد.

$b\neq ۰$ یعنی مخرج کسر هیچگاه نباید صفر شود.

@riazicafe

فعالیت :

کسرهای زیر را به کمک ماشین حساب به عدد اعشاری تبدیل می کنیم.(صورت را بر مخرج تقسیم کرده ایم.)البته دقت کنید که نمایش تعداد ارقام اعشاری در هر ماشین حساب متفاوت است.بعضی ها ۸ رقم و بعضی ها ۱۲ رقم و پیشرفته ها ارقام بیشتری را نشان می دهند.

$\frac{۲}{۵}=۰/۴$ $\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۳۳۳۳...$ $\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$ $\frac{۵}{۹}=۰/۵۵۵۵۵۵...$

وقتی به نمایش اعشاری اعداد بالا نگاه می کنیم، دو نوع نمایش اعشاری مشاهده می کنیم.یک نوع تعداد ارقام اعشار مشخص است .مثلاً $\frac{۲}{۵}=۰/۴$ فقط یک رقم اعشار دارد و $\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$ فقط سه رقم اعشار دارد. این اعداد دارای نمایش اعشاری **متناهی** یا **مختوم** هستند.کلمه مختوم از ختم و اختتام می آید و معنی پایان دارد، یعنی نمایش اعشاری این اعداد کاملاً مشخص است.

ولی در نوع دوم ارقام اعشاری پایانی ندارند .مانند $\frac{۵}{۹}=۰/۵۵۵۵۵۵...$ که تعداد ارقام اعشاری آن تمام نمی شود و عدد ۵ در آن تکرار می شود. این دسته نمایش اعشاری را **متناوب** می نامند. علت این نامگذاری تکرار شدن رقم یا ارقامی در بخش اعشاری است. برای نمایش خلاصه تر معمولاً روی آن بخش تکرار شونده یک خط می کشند.

$\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۳۳۳۳...=۰/۸\overline{۳}$ $\frac{۵}{۹}=۰/۵۵۵۵۵۵...=۰/\overline{۵}$

هر عدد گویا در نمایش اعشاری ،یا مختوم است و یا متناوب و از این دو حالت خارج نیست. می توانید تعدادی کسر نوشته و خود آزمایش کنید. مثال زیر جالب است، به آن دقت کنید.

$$\frac{۵}{۷}=۰/۷۱۴۲۸۵۷۱۴...$$

آیا در بخش اعشاری آن تکراری مشاهده می کنید؟پس این عدد در کدام نوع مختوم یا متناوب قرار می گیرد؟ مطمئناً مختوم نیست ولی تکرار هم ندارد که متناوب باشد.بیایید این بار تقسیم را با ماشین حساب کامپیوتر که تعداد رقم اعشاری بیشتری را نشان می دهد انجام دهیم. $\frac{۵}{۷}=۰/۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵...$

اگر کمی دقت کنید می توانید تکرار را در آن ببینید. $\frac{۵}{۷}=۰/۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵...=۰/\overline{۷۱۴۲۸۵}$

تمرین (٤):

با استفاده از تقسیم ، نمایش اعشاری کسر های زیر نوشته و نوع آن را مشخص کنید. درصورت متناوب بودن به صورت مختصر نمایش دهید.

$\frac{۷}{۲۲}=$ $\frac{۱۱}{۶}=$ $\frac{۷}{۹}=$ $\frac{۷}{۱۶}=$ $\frac{۳}{۲۰}=$ $\frac{۵}{۱۱}=$

فعالیت :

$$\frac{۳}{۲}=۱/۵ \quad , \quad \frac{۲}{۵}=۰/۴ \quad , \quad \frac{۷}{۱۰}=۰/۷ \quad , \quad \frac{۵}{۸}=۰/۶۲۵ \quad , \quad \frac{۳}{۲۵}=۰/۱۲$$

به کسرهای بالا دقت کنید.آیا آنها ساده می شوند؟به نمایش اعشاری آنها دقت کنید.همه مختوم هستند.مخرج هر کسر را تجزیه کنید.چه عامل هایی مشاهده می کنید؟ یا ۲ یا ۵ و یا هر دو آنها.

« هرگاه مخرج کسری که به ساده ترین شکل ممکن نوشته شده باشد ،فقط عامل های ۲ یا ۵ و یا هردو را داشته باشد، نمایش اعشاری آن کسر مختوم است.»

تمرین (۵):

بدون تقسیم مشخص کنید، کسرهای زیر نمایش اعشاری مختوم یا متناوب دارند.

$$\frac{۱۷}{۲۲}= \qquad \frac{۱۱}{۱۵}= \qquad \frac{۷}{۵۰}= \qquad \frac{۱}{۶}=$$

فعالیت :

در نهایت هم چهار عمل اصلی را در اعداد گویا یادآوری می کنیم.در مثال زیر تقریباً به همه آنها اشاره شده است.

$$\frac{(-\frac{۲_{\times ۴}}{۳_{\times ۴}})+\frac{۳_{\times ۳}}{۴_{\times ۳}}}{(-\frac{۱}{۶})-(+\frac{۳}{۴})}=\frac{\frac{-۸+۹}{۱۲}}{(-\frac{۱_{\times ۲}}{۶_{\times ۲}})+(-\frac{۳_{\times ۳}}{۴_{\times ۳}})}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{-۲-۹}{۱۲}}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{-۱۱}{۱۲}}=\frac{۱}{۱۲}\div(-\frac{۱۱}{۱۲})=\frac{۱}{\cancel{۱۲}}\times(-\frac{\cancel{۱۲}}{۱۱})=-\frac{۱}{۱۱}$$

تمرین (٦):

حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{(-\frac{۳}{۴})-(-\frac{۵}{۸})}{-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}=$$

طراحی و اجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

@riazicafe

تمرین (۱): بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ پنج کسر بنویسید.

$\frac{۳_{\times ۵}}{۴_{\times ۵}}=\frac{۱۵}{۲۰}$ $\frac{۴_{\times ۴}}{۵_{\times ۴}}=\frac{۱۶}{۲۰}$ $\rightarrow \frac{۱۵}{۲۰}<\frac{۱۶}{۲۰}$

می توانید در هر عددی ضرب کنید .

$\frac{۱۵}{۲۰}<?<\frac{۱۶}{۲۰}$ $\xrightarrow{\times ۱۰}$ $\frac{۱۵۰}{۲۰۰}<?<\frac{۱۶۰}{۲۰۰}$

فقط دقت کنید فاصله مناسب باشد.

$\frac{۱۵۱}{۲۰۰},\frac{۱۵۲}{۲۰۰},\frac{۱۵۳}{۲۰۰},\frac{۱۵۴}{۲۰۰},\frac{۱۵۵}{۲۰۰}$

تمرین (۲): بین $-\frac{۳}{۴}$ و $-\frac{۵}{۶}$ پنج کسر پیدا کنید.

$-\frac{۳_{\times ۳}}{۴_{\times ۳}}=-\frac{۹}{۱۲}$ $-\frac{۵_{\times ۲}}{۶_{\times ۲}}=-\frac{۱۰}{۱۲}$ $\rightarrow -\frac{۱۰}{۱۲}<-\frac{۹}{۱۲}$

$-\frac{۱۰}{۱۲}<?<-\frac{۹}{۱۲}$ $\xrightarrow{\times ۶}$ $-\frac{۶۰}{۷۲}<?<-\frac{۵۴}{۷۲}$

$-\frac{۵۹}{۷۲},-\frac{۵۸}{۷۲},-\frac{۵۷}{۷۲},-\frac{۵۶}{۷۲},-\frac{۵۵}{۷۲}$

تمرین (۳):

الف) توضیح دهید که چگونه بین دو کسر ، می توان بیشمار کسر پیدا کرد.

چون می توان بین دو کسر را به بیشمار قسمت تقسیم کرد، به همین خاطر بین دو کسر بیشمار کسر وجود دارد.

ب) آیا مجموعه اعداد گویا را می توان با نوشتن عضوها نشان داد؟چرا؟

خیر، زیرا اگر عضوی نوشته شود، مابین آنها نیز بیشمار عضو خواهد داشت.پس نوشتن اعضا غیرممکن است.

تمرین (٤):

با استفاده از تقسیم ، نمایش اعشاری کسر های زیر نوشته و نوع آن را مشخص کنید. درصورت متناوب بودن به صورت مختصر نمایش دهید.

$\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$ مختوم $\frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵۴۵۴۵...=۰/\overline{۴۵}$ متناوب

$\frac{۷}{۹}=۰/۷۷۷۷۷۷۷۷...=۰/\overline{۷}$ متناوب $\frac{۷}{۱۶}=۰/۴۳۷۵$ مختوم

$\frac{۷}{۲۲}=۰/۳۱۸۱۸۱۸۱۸...=۰/\overline{۳۱۸}$ متناوب $\frac{۱۱}{۶}=۱/۸۳۳۳۳۳۳۳...=۱/\overline{۸۳}$ متناوب

تمرین (۵):

بدون تقسیم مشخص کنید، کسرهای زیر نمایش اعشاری مختوم یا متناوب دارند.

$\frac{۱۷}{۲۲}=$ متناوب $\quad \frac{۱۱}{۱۵}=$ متناوب $\quad \frac{۷}{۵۰}=$ مختوم $\quad \frac{۱}{۶}=$ متناوب

$۲۲=۲\times۱۱$ $\quad ۱۵=۳\times۵$ $\quad ۵۰=۲\times۵\times۵$ $\quad ۶=۲\times۳$

تمرین (٦):

حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{(-\frac{۳}{۴})-(-\frac{۵}{۸})}{-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}=$$

$$\frac{(-\frac{۳}{۴})-(-\frac{۵}{۸})}{-\frac{۱_{\times۳}}{۲_{\times۳}}-\frac{۱_{\times۲}}{۳_{\times۲}}}=\frac{(-\frac{۳_{\times۲}}{۴_{\times۲}})+(+\frac{۵}{۸})}{\frac{-۳-۲}{۶}}=\frac{\frac{-۶+۵}{۸}}{\frac{-۵}{۶}}=\frac{\frac{-۱}{۸}}{\frac{-۵}{۶}}=(-\frac{۱}{۸})\div(-\frac{۵}{۶})=(-\frac{۱}{\cancel{۸}_{۴}})\times(-\frac{\cancel{۶}^{۳}}{۵})=+\frac{۳}{۲۰}$$

@riazicafe

فعالیت :

تا به حال با مجموعه اعداد زیر آشنا شده اید.

اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,.....\}$ اعداد حسابی: $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,...\}$

اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,...\}$ اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\}$

اگر کمی بیشتر به آنها دقت کنید. می فهمید که این مجموعه ها به ترتیب در حال گسترش هستند.مثلاً مجموعه اعداد حسابی ،صفر را بیشتر از مجموعه اعداد طبیعی دارد. این یعنی مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه ،مجموعه اعداد حسابی است. به نماد ریاضی یعنی $\mathbb{N}\subseteq W$ با توجه به این موضوع می توان گفت که هر عدد طبیعی ،حسابی نیز هست.آیا هر عدد حسابی ، طبیعی هم به شمار می آید؟چرا؟

تمرین (۱):

در مورد درستی عبارت های زیر توضیح دهید.

$W\subseteq\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$

فعالیت :

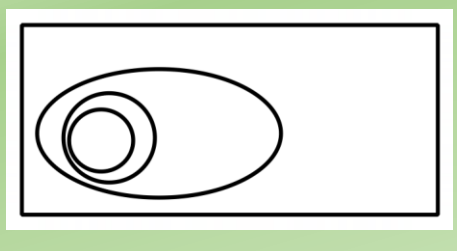
مجموعه اعداد گویا بزرگترین مجموعه ای است که تاکنون شناخته اید.این مجموعه شامل تمام اعدادی است که می توان آنها را به صورت کسر نمایش داد.به طور کلی می توان گفت: $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

در اینجا ممکن است سوالی برایتان مطرح شود که چگونه اعداد صحیح و یا طبیعی و یا حسابی هم گویا هستند. برای پاسخ به این سوال می توانید از کسرهای مساوی کمک بگیرید.به مثال مقابل توجه کنید. $-۳=-\frac{۳}{۱}=-\frac{۶}{۲}=-\frac{۹}{۳}=...$

پس هر عدد طبیعی ، حسابی یا صحیح ، عددی گویا هم هست.ولی دقت کنید که برعکس این موضوع درست نیست.

تمرین (۲):

در نمودار ون زیر مجموعه های $\mathbb{N},W,\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ را مشخص کنید.



@riazicafe

فعالیت :

حالا به یک سوال اساسی می رسیم که آیا به جز اعداد گویا ،عددی هم وجود دارد؟بیایید در مورد $\sqrt{۲}$ کمی بررسی انجام دهیم.مقدار تقریبی آن را به کمک ماشین حساب به دست می آوریم. $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷...$

آیا در بخش اعشاری که بیشمار رقم دارد ،تناوبی مشاهده می کنید؟بیایید از ماشین حساب رایانه کمک بگیریم.

$$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱۴۲۳۵۶۲۳۷۳۰۹۵۰۴۸۸۰۱۶۸۸۷۲۴۲۰۹۷...$$

همانطور که دیدید،در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۲}$ تعداد ارقام اعشاری بیشمار است و همچنین در آن نظمی یا تناوبی نیست. در درس قبل مشاهده کردید که اعداد گویا یا نمایش اعشاری مختوم دارند و یا متناوب پس نتیجه می گیریم که این عدد نمی تواند گویا باشد.

« اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ که نمایش اعشاری آنها متناوب نیست را ،عدد **گنگ (اصم)** می نامند.مجموعه ای که این اعداد در آنها قرار می گیرند را با نماد $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش می دهند.»

مثال دیگر برای اعداد گنگ ، عدد π است.در زیر این عدد تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است.

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹...$$

مثال های دیگر برای اعداد گنگ، اعداد رادیکالی ای هستند که جذر دقیق ندارند .مانند : $\sqrt{۳}$ یا $\sqrt{۵}$ دقت کنید عدد $\sqrt{۴}$ چون جذر دقیق دارد $\sqrt{۴}=۲$ ، پس عددی گویا است.

تمرین (۳):

چهار عدد گنگ رادیکالی بنویسید و با ماشین حساب بررسی کنید که نمایش اعشاری متناوب ندارند.

فعالیت :

می خواهیم بین ۲ و ۳ چند عدد گنگ بنویسیم.همانطور که در فعالیت قبل دیدید، اعداد رادیکالی که جذر دقیق ندارند ، عدد گنگ هستند، پس باید بین ۲ و ۳ چند عدد رادیکالی با این شرط پیدا کنیم.برای این کار بهتر است ۲ و ۳ را هم به صورت رادیکالی نمایش دهیم. پس باید بین $\sqrt{۴}$ و $\sqrt{۹}$ به دنبال اعداد گنگ بگردیم.به نظر شما چند عدد می توان یافت؟ $\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},\sqrt{۸}$ آیا همین چهار عدد گنگ وجود دارد؟ بله درست فکر کردید ، بیشمار عدد گنگ وجود دارد.مانند $\sqrt{۵/۱},\sqrt{۵/۵۲},\sqrt{۶/۰۹},\sqrt{۸/۲۳۵}$ و ...

فقط باید دقت کنید که اعدادی گنگ هستند که رادیکالشان جواب دقیق نداشته باشد. مثلاً $\sqrt{۶/۲۵}=۲/۵$ عددی گویا است.زیرا $۲/۵\times۲/۵=۶/۲۵$

تمرین (٤):

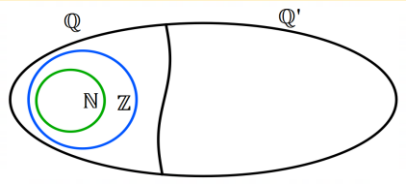
الف) بین ۵ و ۶ ، ده عدد گنگ بنویسید.

ب) بین ۳ و $\sqrt{۱۰}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

@riazicafe

فعالیت :

به طور کلی عددها یا گنگ هستند و یا گویا هستند، بدین معنی که این دو مجموعه کاملاً از هم جدا هستند و عددی را نمی توان یافت که هم گنگ و هم گویا باشد.نمودار ون زیر کاملاً مشخص کننده این موضوع است.



تمرین (۵):

با توجه به نمودار ون فعالیت قبل ، درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}' \quad$ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

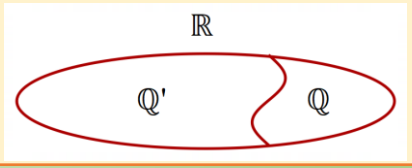
فعالیت :

مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid ۲ \le x \le ۳\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه چند عضو دارد؟ بله ، بیشمار عضو دارد.

آیا این مجموعه را می توان به صورت زیر روی محور نشان داد.

در نگاه اول چون بی شمار عدد بین **۲** و **۳** وجود دارد، می توان کل محدوده را عضو این مجموعه دانست. ولی بیایید کمی بیشتر دقت کنیم. می دانیم که $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است.چون $\sqrt{۵} \simeq ۲/۲۳۶۰۶۷۹۷۷۴۹...$ و همچنین مشاهده می کنید که این عدد بین **۲** و **۳** است. پس همه اعداد بین این دو عدد گویا نیستند و عددهای گنگ هم وجود دارند. نکته جالب این است که بین **۲** و **۳** بیشمار عدد گویا وجود دارد و بیشمار هم عدد گنگ وجود دارد.پس فاصله سبز رنگ بالا پر از حفره هایی می شود که عددهای گنگ هستند.در نتیجه این گونه نمایش درست نیست.

برای رفع این مشکل، مجموعه ای جدید تعریف می کنیم .که شامل همه اعداد گویا و گنگ هست و آن را **مجموعه اعداد حقیقی** می نامیم.در نتیجه تمام اعدادی که شما تا کنون شناخته اید، همه عضو این مجموعه هستند. مجموعه اعداد حقیقی را با نماد $\mathbb{R}$ نشان می دهند.



$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

تمرین (٦):

داخل جای خالی علامت مناسب $\in$ یا $\notin$ بگذارید.

$۰/۵ \square \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{۱۲} \square \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۳۶} \square \mathbb{Q}'$ $\quad -\frac{۷}{۲} \square \mathbb{Z}$ $\quad ۰/۵۲۶ \square \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۳/۵} \square \mathbb{Q}'$

تمرین (۷):

دو مجموعه زیر باهم برابرند یا تفاوت دارند. به طور کامل توضیح دهید.

$A = \{۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$ $\qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x < ۱۱\}$

@riazicafe

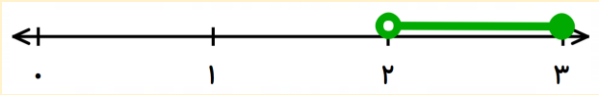
فعالیت :

با معرفی اعداد حقیقی مشکل نمایش مجموعه فعالیت قبل روی محور حل شد. یعنی می توان کل محدوده را در نظر گرفت.

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۲\le x\le ۳\}$

همانطور که مشاهده می کنید . هم **۲**و هم **۳**هردو عضو مجموعه هستند و با دایره های تو پر مشخص شده اند. این به خاطر علامت ≤است ،که می خوانیم کوچکتر یا مساوی و بدین معنی است که عددهای بیشتر از ۲ و خود ۲ هم مورد نظر است.ولی وقتی علامت < باشد، دیگر خود عدد عضو مجموعه نیست و روی محور با دایره توخالی نمایش می دهیم.

$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۲<x\le ۳\}$



گاهی هم پیش می آید که مجموعه از یک طرف محدوده ندارد و تا بینهایت ادامه پیدا می کند.

$C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\le x\}$

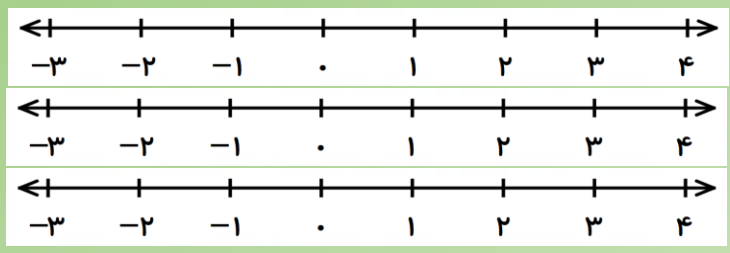
تمرین (۸):

الف) هر مجموعه را روی محور مقابلش نشان دهید.

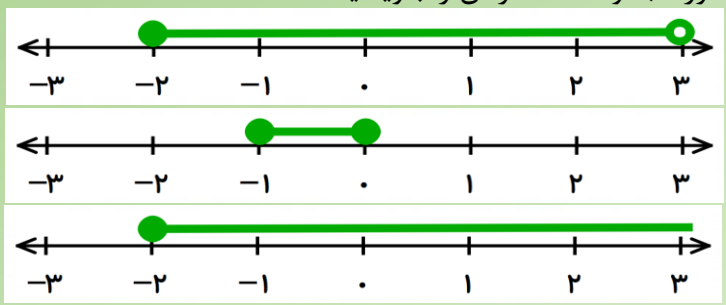
$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲<x<۱\}$

$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۳\}$

$C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳>x\}$



ب) با توجه به محور مجموعه متناظر آن را بنویسید.



تمرین (۹):

در نمایش اعشاری $\frac{۱۱}{۳}$ و $\sqrt{۱۰}$ چه تفاوتی وجود دارد.

طراحی و اجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

@riazicafe

تمرین (۱):

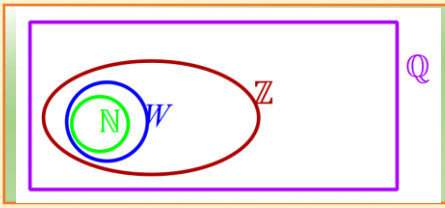
در مورد درستی عبارت های زیر توضیح دهید.

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ اعداد صحیح از اعداد مثبت و صفر و اعداد منفی تشکیل شده است ، که اعداد مثبت همان اعداد طبیعی هستند. پس هر عدد طبیعی می تواند عددی صحیح (با علامت مثبت) باشد.

$W\subseteq\mathbb{Z}$ چون صفر هم در اعداد صحیح است ،پس می توان گفت که اعداد حسابی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند.پس هر عدد حسابی یک عدد صحیح هم هست.

تمرین (۲):

در نمودار ون زیر مجموعه های $\mathbb{N},W,\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ را مشخص کنید.



تمرین (۳):

چهار عدد گنگ رادیکالی بنویسید و با ماشین حساب بررسی کنید که نمایش اعشاری متناوب ندارند.

$\sqrt{۸}\simeq۲/۸۲۸۴۲۷۲۱۴۷۴...$ $\sqrt{۷}\simeq۲/۶۴۵۷۵۱۳۱۱۰۶...$

$\sqrt{۱۰۱}\simeq۱۰/۰۴۹۸۷۵۶۲۱۱...$ $\sqrt{۱۵}\simeq۳/۸۷۲۹۸۳۳۴۶۲...$

البته هدف مشاهده عدم تناوب در بخش اعشاری است. پس می توان اعداد دیگری هم مثال زد.

تمرین (٤):

الف) بین ۵و۶ ، ده عدد گنگ بنویسید. $\sqrt{۲۵}<?<\sqrt{۳۶}$

$\sqrt{۲۶},\sqrt{۲۷},\sqrt{۲۸},\sqrt{۲۹},\sqrt{۳۰},\sqrt{۳۱},\sqrt{۳۲},\sqrt{۳۳},\sqrt{۳۴},\sqrt{۳۵}$

ب) بین ۳ و $\sqrt{۱۰}$ چهار عدد گنگ بنویسید. $\sqrt{۹}<?<\sqrt{۱۰}$

(سوال، دارای پاسخ باز است و می شود اعداد دیگری هم نوشت.) $\sqrt{۹/۱},\sqrt{۹/۲},\sqrt{۹/۳},\sqrt{۹/۴}$

تمرین (۵):

با توجه به نمودار ون فعالیت قبل ، درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$ درست $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}'$ نادرست $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}$ درست

تمرین (٦):

داخل جای خالی علامت مناسب $\in$ یا $\notin$ بگذارید.

$۰/۵\boxed{\in}\ \mathbb{Q}$ $\sqrt{۱۲}\boxed{\in}\ \mathbb{R}$ $\sqrt{۳۶}\boxed{\notin}\ \mathbb{Q}'$ $-\frac{۷}{۲}\boxed{\notin}\ \mathbb{Z}$ $۰/۵۲۶\boxed{\in}\ \mathbb{R}$ $\sqrt{۳/۵}\boxed{\in}\ \mathbb{Q}'$

@riazicafe

تمرین (۷):

دو مجموعه زیر باهم برابرند یا تفاوت دارند. به طور کامل توضیح دهید.

$$A=\{۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\} \qquad B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳<x<۱۱\}$$

مجموعه A مجموعه اعداد طبیعی بین ۳ و ۱۱ است که دقیقاً ۷ عضو دارد.ولی مجموعه B مجموعه اعداد حقیقی بین ۳ و ۱۱ است که بیشمار عضو دارد.

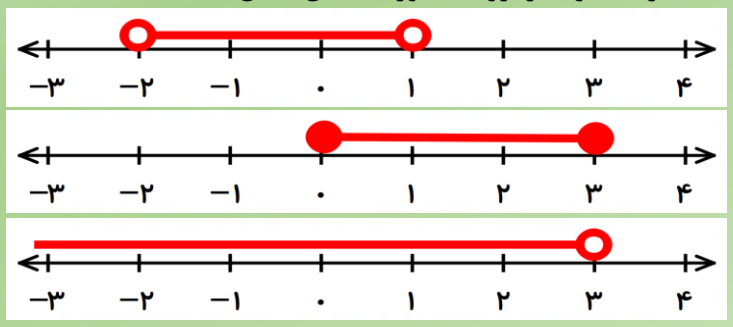
تمرین (۸):

الف) هر مجموعه را روی محور مقابلش نشان دهید.

$$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲<x<۱\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۳\}$$

$$C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳>x\}$$

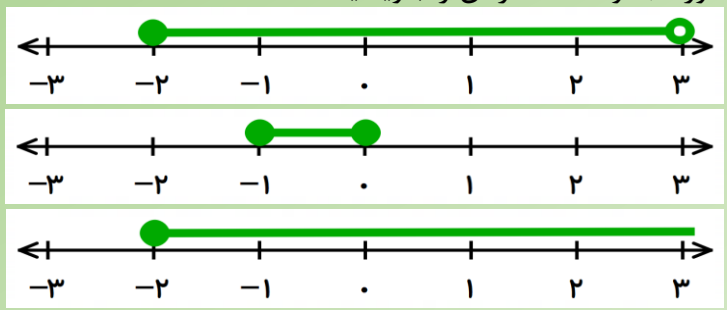


ب) با توجه به محور مجموعه متناظر آن را بنویسید.

$$D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲\le x<۳\}$$

$$E=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۱\le x\le ۰\}$$

$$F=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۲\le x\}$$



تمرین (۹):

در نمایش اعشاری $\frac{۱۱}{۳}$ و $\sqrt{۱۰}$ چه تفاوتی وجود دارد.

$$\sqrt{۱۰}\simeq ۳/۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶....$$

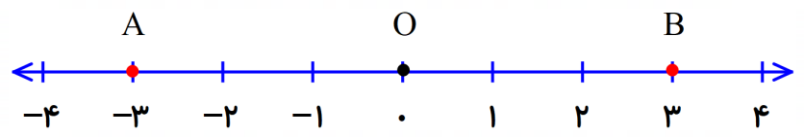
$$\frac{۱۱}{۳}=۳/۶۶۶۶۶۶...=۳/\overline{۶}$$

عدد $\frac{۱۱}{۳}$ در نمایش اعشاری دارای تناوب است و به همین خاطر عددی گویا است ولی عدد $\sqrt{۱۰}$ در نمایش اعشاری تناوب مشخص ندارد و به همین خاطر عددی گنگ است.

طراحی و اجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

@riazicafe

فعالیت :



به محور مقابل دقت کنید.

نقاط A و B هر کدام چه عددی را نشان می دهند؟ $A=-۳$ $B=۳$

فاصله نقطه های A و B از مبدا که با حرف O مشخص شده است، چقدر است؟ $\overline{OB}=۳$ $\overline{OA}=۳$

مشاهده می کنید که فاصله این دو نقطه تا مبدا یکسان است.

« فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدا، **قدرمطلق** a می نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدرمطلق a) نمایش می دهیم.»

با توجه به محور بالا می توان تساوی های مقابل را نوشت. $|۳|=۳$ $|-۳|=۳$

تمرین (۱):

تساوی های زیر را کامل کنید.

$|۰|=$ $\left|\frac{۳}{۴}\right|=$ $|-۱۰/۵|=$ $|+۹|=$ $|-۱۵|=$

فعالیت :

در مبحث قدر مطلق ، علامت بسیار مهم و تاثیرگذار است ، به همین خاطر در این فعالیت کمی درباره علامت ها و تبدیل آنها به زبان کلامی صحبت می کنیم.

$a>۰$ یعنی عدد a بیشتر از صفر است . ⟵ عدد a مثبت است.

$a\geq ۰$ یعنی عدد a یا صفر است و یا بیشتر از صفر است. ⟵ عدد a نامنفی است.(منفی نیست)

تمرین (۲):

جاهای خالی را با کلمات مناسب کامل کنید.

$a<۰$ یعنی عدد a ..... از صفر است . ⟵ عدد a ..... است.

$a\leq ۰$ یعنی عدد a یا صفر است و یا ..... از صفر است. ⟵ عدد a نا..... است.(.....)

فعالیت :

اگر $a>۰$ و $b<۰$ باشد. یعنی عدد a مثبت است و عدد b منفی است.در این صورت می توان گفت که $ab<۰$ یعنی حاصلضرب این دو عدد دارای علامت منفی است.

آیا می توان در باره علامت عبارت $a+b$ هم نظر داد؟خیر،با چند مثال می توانید دلیل نامشخص بودن علامت حاصل را ببینید.

$(+۱۰)+(-۶)=(+۴)$, $(+۲)+(-۵)=(-۳)$

@riazicafe

تمرین (۳):

هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است.عبارات مناسب را به هم وصل کنید.

۱) $ab=۰$ — الف) $a>۰\ ,\ b>۰$

۲) $ab>۰\ ,\ (a+b)<۰$ — ب) $a<۰\ ,\ b=۰$

۳) $ab>۰\ ,\ (a+b)>۰$ — د) $a<۰\ ,\ b<۰$

فعالیت :

حالا می توانیم قدر مطلق را با استفاده از نمادها بیان کنیم.(a عددی حقیقی است.)

۱) قدرمطلق صفر، برابر صفر است. $a=۰ \Rightarrow |a|=۰$

۲) قدرمطلق اعداد مثبت ،برابر خودشان است. $a>۰ \Rightarrow |a|=a$

۳) قدر مطلق اعداد منفی، برابر قرینه آنها است. $a<۰ \Rightarrow |a|=-a$

نکته ای که در قدر مطلق بسیار باید به آن دقت شود در زمانی است که علامت عدد منفی است.در این صورت عدد قرینه می شود ، به همین خاطر پاسخ قدرمطلق همواره عددی نا منفی است. $|-۳|=-(-۳)=۳$

قدرمطلق را می توان با نمادها و علامت ها هم نشان داد.به مثال زیر دقت کنید.

$a<۰\ ,\ b>۰ \Rightarrow ab<۰$ $\qquad |ab|=-(ab)$

تمرین (٤): پاسخ قدر مطلق را به صورت جبری بنویسید.

$a<۰\ ,\ b<۰ \Rightarrow \quad |ab|=$

$a<۰\ ,\ b<۰ \Rightarrow \quad |a+b|=$

فعالیت :

در اولویت محاسبات عددی ، قدر مطلق همانند پرانتز عمل می کند.به مثال های زیر دقت کنید.

$|-۵+۳-۴|-|۲\times(-۵)|=|-۶|-|-۱۰|=۶-۱۰=-۴$ (-۶، -۱۰)

$|۳+(-۷)|+|۵|=|-۴|+|۵|=۴+۵=۹$ (-۴)

تمرین (۵):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$|(-۵)+۱۰|-|۲\times(-۳)|=$ $\qquad |(-۳)\times(-۴)|=$ $\qquad |-۲+۳-۸|=$

تمرین (٦):

اگر $a=۳$ و $b=-۵$ و $c=+۱$باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.(راهنمایی اول به جای حروف، عددها را جایگذاری کنید ، سپس مانند تمرین قبل محاسبه کنید.)

$$|a+b|+۲|a-b-c|=$$

فعالیت :

می خواهیم در مورد عبارت $|۲-\sqrt{۵}|$ کمی بررسی انجام دهیم.اولین چیزی که باید متوجه شویم این است که داخل قدر مطلق چه علامتی دارد، یعنی باید در مورد مثبت یا منفی بودن درون قدرمطلق بررسی انجام دهیم.برای این کار دو روش وجود دارد:

روش نخست: به کمک ماشین حساب مقدار تقریبی $\sqrt{۵}\simeq ۲/۲۳۶۰$را به دست می آوریم. مشاهده می کنید که $\sqrt{۵}$از دو بیشتر است و چون منفی است ، در نتیجه پاسخ منفی خواهد شد. $۲-\sqrt{۵}<۰$

روش دوم: هر دو عدد را به صورت رادیکالی می نویسیم و مقایسه می کنیم. $۲-\sqrt{۵}=\sqrt{۴}-\sqrt{۵}$

باز هم مشاهده می کنید که $\sqrt{۵}$بزرگتر است و چون علامتش منفی است ، حاصل هم مطمئناً منفی خواهد شد.

متوجه شدیم که عبارت داخل قدرمطلق منفی است. طبق قانون قدرمطلق، در این صورت باید قرینه کنیم.پس :

$$\underbrace{|۲-\sqrt{۵}|}=-(۲-\sqrt{۵})=-۲+\sqrt{۵}$$

به نظر شما اگر داخل قدرمطلق مثبت باشد، پاسخ چگونه است؟به قانون قدرمطلق مراجعه کنید.

تمرین (۷):

عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|= \qquad |۴-\sqrt{۱۵}|= \qquad |-۵+\sqrt{۱۰}|= \qquad |۳-\sqrt{۱۲}|=$$

فعالیت :

به مثال های زیر دقت کنید.

$$\sqrt{(-۷)^۲}=\sqrt{۴۹}=۷ \qquad \sqrt{۱۰^۲}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰ \qquad \sqrt{(-۳)^۲}=\sqrt{۹}=۳ \qquad \sqrt{۵^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

با توجه به مثال های بالا و مفهوم قدر مطلق می توانیم بنویسیم: $\sqrt{a^۲}=|a|$

تمرین (۸): حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$\sqrt{(-۴+\sqrt{۵})^۲}= \qquad \sqrt{(-۵۵۲)^۲}= \qquad \sqrt{(۲۳۵۶)^۲}=$$

طراحی و اجرا: فرامرز انتظاری ویراستار: مرضیه موحدی،قدرت الله کشیری

@riazicafe

تمرین (۱):

تساوی های زیر را کامل کنید.

$|۰| = ۰$ $\left|\frac{۳}{۴}\right| = \frac{۳}{۴}$ $|-۱۰/۵| = ۱۰/۵$ $|+۹| = ۹$ $|-۱۵| = ۱۵$

تمرین (۲):

جاهای خالی را با کلمات مناسب کامل کنید.

$a < ۰$ یعنی عدد a کوچکتر از صفر است . ⟸ عدد a منفی است.

$a \leq ۰$ یعنی عدد a یا صفر است و یا کوچکتر از صفر است. ⟸ عدد a نا مثبت است.(مثبت نیست)

تمرین (۳):

هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است.عبارات مناسب را به هم وصل کنید.

الف) $a > ۰ \ , \ b > ۰$

ب) $a < ۰ \ , \ b = ۰$

د) $a < ۰ \ , \ b < ۰$

۱) $ab = ۰$

۲) $ab > ۰ \ , \ (a+b) < ۰$

۳) $ab > ۰ \ , \ (a+b) > ۰$

تمرین (٤):

پاسخ قدر مطلق را به صورت جبری بنویسید.

$a < ۰ \ , \ b < ۰ \Rightarrow ab > ۰$ $\quad |ab| = ab$

$a < ۰ \ , \ b < ۰ \Rightarrow a+b < ۰$ $\quad |a+b| = -(a+b) = -a-b$

تمرین (۵):

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$\overbrace{|(-۳)\times(-۴)|}^{+۱۲} = |+۱۲| = ۱۲$

$\overbrace{|-۲+۳-۸|}^{-۱۰+۳=-۷} = |-۷| = ۷$

$\overbrace{|(-۵)+۱۰|}^{+۵} - \overbrace{|۲\times(-۳)|}^{-۶} = |+۵| - |-۶| = ۵-۶ = -۱$

@riazicafe

تمرین (٦):

اگر $a=۳$ و $b=-۵$ و $c=+۱$باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.(راهنمایی اول به جای حروف، عددها را جاگذاری کنید ، سپس مانند تمرین قبل محاسبه کنید.)

$$|a+b|+۲|a-b-c|=$$

$$|a+b|+۲|a-b-c|=\overbrace{|۳+(-۵)|}^{-۲}+۲\overbrace{|۳-(-۵)-(+۱)|}^{۳+۵-۱=۷}=|-۲|+۲|۷|=۲+۲\times۷=۲+۱۴=۱۶$$

تمرین (۷):

عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$۳-\sqrt{۱۲}=\sqrt{۹}-\sqrt{۱۲} \quad \rightarrow \quad ۳-\sqrt{۱۲}<۰ \quad \rightarrow \quad \underbrace{|۳-\sqrt{۱۲}|}_{-}=-(۳-\sqrt{۱۲})=-۳+\sqrt{۱۲}$$

$$-۵+\sqrt{۱۰}=-\sqrt{۲۵}+\sqrt{۱۰} \quad \rightarrow \quad -۵+\sqrt{۱۰}<۰ \quad \rightarrow \quad \underbrace{|-۵+\sqrt{۱۰}|}_{-}=-(-۵+\sqrt{۱۰})=۵-\sqrt{۱۰}$$

$$۴-\sqrt{۱۵}=\sqrt{۱۶}-\sqrt{۱۵} \quad \rightarrow \quad ۴-\sqrt{۱۵}>۰ \quad \rightarrow \quad \underbrace{|۴-\sqrt{۱۵}|}_{+}=۴-\sqrt{۱۵}$$

$$\sqrt{۷}-\sqrt{۸}<۰ \quad \rightarrow \quad \underbrace{|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|}_{-}=-(\sqrt{۷}-\sqrt{۸})=-\sqrt{۷}+\sqrt{۸}$$

تمرین (۸): حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$\sqrt{(۲۳۵۶)^۲}=|۲۳۵۶|=۲۳۵۶ \qquad \sqrt{(-۵۵۲)^۲}=|-۵۵۲|=۵۵۲$$

$$\sqrt{(-۴+\sqrt{۵})^۲}=\underbrace{|-۴+\sqrt{۵}|}_{-}=-(-۴+\sqrt{۵})=۴-\sqrt{۵}$$