

بنا م خداوند جان آفرین که سخن در زبان آید

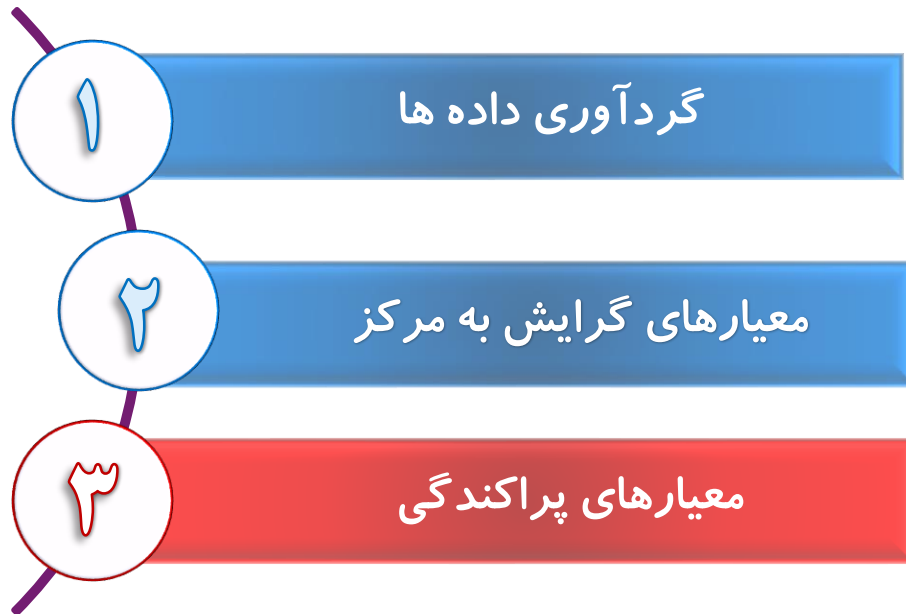


## ریاضی و آمار (۱)

پایه دهم

علوم انسانی و معارف

### فصل ۳



تهیه و تنظیم: مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵



@MATHCLASS2



Majid.ghaderi.mathclass.2

## معیارهای پراکندگی

فصل ۳

درس ۳

### اهداف

- ❑ آشنایی با مفهوم دامنه تغییرات
- ❑ آشنایی با مفهوم انحراف معیار و واریانس
- ❑ آشنایی با طریقه استفاده از انحراف معیار و واریانس
- ❑ درک مفهوم انحراف معیار و روش محاسبه آن
- ❑ آشنایی با طریقه به دست آوردن چارک ها
- ❑ آشنایی با مفهوم دامنه میان چارکی و روش محاسبه آن

## معیارهای پراکندگی (Measures of dispersion)

معیارهای پراکندگی میزان پراکندگی یا تغییراتی که در بین داده های یک توزیع وجود دارد را نشان می دهند و برای توصیف پراکندگی داده ها که به صورت کمی مطرح می شوند ضروری هستند.

(۱) دامنه تغییرات ( $R$ )

(۲) دامنه میان چارگی ( $IQR$ )

(۳) واریانس ( $Var$ )

(۴) انحراف معیار ( $\sigma$ )

(۵) ضریب تغییرات ( $C.V$ ) **بیشتر بدانیم**

معیارهایی که در این درس می خوانیم شامل :

فعالیت صفحه ۸۹ کتاب درسی

می خواهیم کلاس های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که هم زمان بین دانش آموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده اند. نمره های آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است.

الف) {۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵}

ب) {۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹}

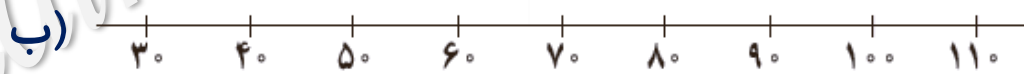
پ) {۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱}

داده های مربوط به سه کلاس دهم:

میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. میانگین هر کدام از سه کلاس مذکور برابر ۶۷ است.

به نظر شما پراکندگی نمره ها در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال،

داده ها را روی سه محور موازی نمایش دهید.



بیشترین پراکندگی



## فعالیت صفحه ۸۹ کتاب درسی

کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟ چرا؟

دبیرستان «الف» چون پراکندگی داده ها در آن کمتر از سایرین است.

اگر والدین برای ثبت نام فرزند بازیگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج، یکی از مدرسه ها را انتخاب کنند، مدرسه ای بهتر است که پراکندگی نمره ها در آن کمتر است. در مقابل، برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه ای بهتر است که پراکندگی نمره ها در آن بیشتر باشد. چرا؟

دبیرستان «الف» یکدست تر است و نمرات دانش آموزان با هم اختلاف چندانی ندارند. با این روند، نمره فرد اول و آخر به نسبت سایر مدارس به هم نزدیک تر است، پس برای فرد بازیگوش مناسب تر است.

نمرات در دبیرستان «ب» پراکنده تر است و نمره فرد اول و آخر به نسبت سایر مدارس اختلاف بیشتری دارند، پس برای فردی که می خواهد بیشتر بیاموزد، مناسب تر است.

پراکندگی بیشتر برابر است با ریسک بالاتر

## دامنه تغییرات (Range)

اختلاف بین بزرگترین ( $x_{max}$ ) و کوچکترین داده ( $x_{min}$ ) را نشان می دهد و با  $R$  نشان داده می شود.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

دامنه تغییرات ساده ترین شاخص پراکندگی است.

با تغییر تعداد و مقدار داده های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده ها باشد.

## تمرین تکمیلی

سوال ۱ : دامنه تغییرات داده های زیر را بدست آورید.

۵, ۱۸, ۸, ۱۷, ۱۴, ۱۰

$$R = 18 - 5 = 13$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲: نمرهٔ درس ریاضی دانش آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲

↓

$$Q_2 = 10$$

۰, ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰

↓

$$Q_2 = 10$$

الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

$$\bar{X}_A = \frac{8 + 9 + 10 + 11 + 12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\bar{X}_B = \frac{0 + 5 + 10 + 15 + 20}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

$$R_A = 12 - 8 = 4$$

$$R_B = 20 - 0 = 20$$

کلاس A زیرا پراکندگی نمرات در آن کمتر است.

## تمرین تکمیلی

سوال ۳: معلم از ۷ نفر از دانش آموزان خواست تا تعداد کتاب های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده اند، گزارش کنند.

۱۵, ۸, ۹, ۱۲, ۱۴, ۴, ۱

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

$$R = 15 - 1 = 14$$

ب) دو دانش آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنه تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

$$R = 15 - 1 = 14$$

پ) از مقایسه پاسخ «الف» و «ب» چه نتیجه ای می گیرید؟

دامنه تغییرات تنها به بزرگ ترین و کوچک ترین داده ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی تواند پیانگر خوبی برای پراکندگی داده ها باشد.



## ویژگی های دامنه تغییرات

۱) دامنه تغییرات ساده ترین شاخص پراکندگی است.

۲) تحت تاثیر دو عدد اول و آخر توزیع یعنی همان بزرگترین و کوچکترین داده است.

۳) اگر همه داده ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات برابر صفر می شود. همچنین، اگر دامنه تغییرات برابر صفر باشد، همه داده ها با هم برابر هستند.

۴) اگر همه داده های آماری با عددی جمع یا تفریق شوند، دامنه تغییرات تغییری نمی کند.

۵) اگر همه داده های آماری در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند؛ دامنه تغییرات، در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر قدرمطلق آن عدد تقسیم می شود.

## تمرین تکمیلی

سوال ۴: آزمون میان ترم درس آمار، در مقیاس ۲۰ نمره برگزار شده است. بیشترین نمره ۱۹ و نیز دامنه تغییرات ۵ می باشد. معلم کلاس تصمیم گرفته به هر دانش آموز یک نمره اضافه کند. کمترین نمره ای که در لیست نمرات وارد می شود، چه نمره ای است؟

$$R = x_{max} - x_{min} \Rightarrow x_{min} = 20 - 5 = 15$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۵: آزمون درس آمار، در مقیاس ۱۰ نمره برگزار شده است. بیشترین نمره ۹ و نیز دامنه تغییرات ۴ می باشد. کمترین نمره ای که در لیست نمرات در مقیاس ۲۰ نمره وارد می شود، چه نمره ای است؟

$$R = x_{max} - x_{min} \Rightarrow x_{min} = 18 - 8 = 10$$

## واریانس یا پراش (Variance)

میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین آنها را **واریانس** می نامند و از نماد  $\sigma^2$  یا  $Var$  برای نمایش آن استفاده می شود.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

به عبارتی دیگر باید ابتدا میانگین داده ها را محاسبه کنید سپس اختلاف هر عدد با میانگین داده ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ و در نهایت میانگین اعداد حاصل را به دست آورید.

## تمرین تکمیلی

سوال ۶: واریانس داده های ۲، ۴، ۹، ۵ را محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۴ + ۵ + ۹}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(۲ - ۵)^2 + (۴ - ۵)^2 + (۵ - ۵)^2 + (۹ - ۵)^2}{۴}$$

$$\sigma^2 = \frac{(-۳)^2 + (-۱)^2 + (۰)^2 + (۴)^2}{۴}$$

$$\sigma^2 = \frac{۹ + ۱ + ۰ + ۱۶}{۴} = \frac{۲۶}{۴} = ۶/۵$$

تمرین تکمیلی

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

سوال ۷: نمرهٔ درس ریاضی دانش آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:

واریانس نمرات درس ریاضی دانش آموزان دو کلاس A و B، را با تکمیل جداول زیر بدست آورید.

کلاس A		
$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۸	$۸ - ۱۰ = -۲$	۴
۹	$۹ - ۱۰ = -۱$	۱
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$	۰
۱۱	$۱۱ - ۱۰ = ۱$	۱
۱۲	$۱۲ - ۱۰ = ۲$	۴
مجموع	۰	۱۰

کلاس B		
$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۰	$۰ - ۱۰ = -۱۰$	۱۰۰
۵	$۵ - ۱۰ = -۵$	۲۵
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$	۰
۱۵	$۱۵ - ۱۰ = ۵$	۲۵
۲۰	$۲۰ - ۱۰ = ۱۰$	۱۰۰
مجموع	۰	۲۵۰

$$\sigma^2 = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

پراکندگی نمرات در کلاس B خیلی بیشتر از کلاس A است.

$$\sigma^2 = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

مجموع اختلافات از میانگین همواره باید صفر باشد.

دقت کنید

تمرین تکمیلی

سوال ۸: واریانس داده های زیر را بدست آورید.

۸۵, ۶۷, ۶۲, ۶۹, ۶۴, ۶۰, ۵۰, ۷۳, ۷۵, ۶۵

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۸۵	$۸۵ - ۶۷ = ۱۸$	۳۲۴
۶۷	$۶۷ - ۶۷ = ۰$	۰
۶۲	$۶۲ - ۶۷ = -۵$	۲۵
۶۹	$۶۹ - ۶۷ = ۲$	۴
۶۴	$۶۴ - ۶۷ = -۳$	۹
۶۰	$۶۰ - ۶۷ = -۷$	۴۹
۵۰	$۵۰ - ۶۷ = -۱۷$	۲۸۹
۷۳	$۷۳ - ۶۷ = ۶$	۳۶
۷۵	$۷۵ - ۶۷ = ۸$	۶۴
۶۵	$۶۵ - ۶۷ = -۲$	۴
مجموع	۰	۸۰۴

$$\bar{x} = \frac{۶۷۰}{۱۰} = ۶۷$$

$$\sigma^2 = \frac{۸۰۴}{۱۰} = ۸۰.۴$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۹: معلم از ۷ نفر از دانش آموزان خواست تا تعداد کتاب های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده اند، گزارش کنند.

۱۵, ۸, ۹, ۱۲, ۱۴, ۴, ۱

الف) واریانس آنها را محاسبه کنید.

$$\sigma^2 = \frac{(15-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (12-9)^2 + (14-9)^2 + (4-9)^2 + (1-9)^2}{7} = \frac{160}{7} \cong 22/86$$

ب) دو دانش آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۳ اعلام کردند. مجدداً واریانس این ۹ داده را محاسبه کنید.

$$\sigma^2 = \frac{(15-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (12-9)^2 + (14-9)^2 + (4-9)^2 + (1-9)^2 + (5-9)^2 + (13-9)^2}{9}$$

$$\sigma^2 = \frac{36 + 1 + 0 + 9 + 25 + 25 + 16 + 16}{9} = \frac{192}{9} = 21/33$$

پ) از مقایسه پاسخ «الف» و «ب» چه نتیجه ای می گیرید؟

واریانس با تغییر تعداد و مقادیر داده ها تغییر می کند.

## ویژگی های واریانس

- (۱) هر چه واریانس به صفر نزدیکتر باشد، پراکندگی بین داده ها کمتر خواهد بود.
- (۲) اگر تمام داده های آماری یکسان باشند، واریانس برابر صفر است و برعکس یعنی اگر واریانس برابر صفر باشد، تمام داده ها برابر هستند.
- (۳) اگر همه داده های آماری را با عددی جمع یا تفریق کنیم، واریانس تغییر نمی کند.
- (۴) اگر همه داده های آماری را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم؛ واریانس در مجذور آن عدد ضرب، یا بر مجذور آن عدد تقسیم می شود.
- (۵) اگر واریانس داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر  $\sigma^2$  باشد، میانگین داده های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  برابر  $a^2\sigma^2$  خواهد شد.
- (۶) واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده مورد نظر (متغیر) است.  
به عنوان مثال: اگر واحد متغیر سانتی متر باشد، واحد واریانس سانتی متر مربع خواهد بود.
- (۷) داده های دور افتاده در آن تاثیر گذار هستند.



## تمرین تکمیلی

سوال ۱۰: دبیر درس ریاضی، آزمون را در مقیاس ۱۰ نمره برگزار کرده است. سپس او به ۲ برابر نمرات یک نمره اضافه و وارد لیست نمرات می کند. حداکثر نمره وارد شده در لیست ۸ می باشد. اگر واریانس نمرات وارد شده در لیست، ۸ باشد. واریانس نمرات اولیه دانش آموزان چند بوده است؟

داده ها دو برابر شده و یک واحد اضافه شده اند پس نتیجه می شود که واریانس آنها ۴ برابر شده است.

چون واریانس نمرات درون لیست برابر ۸ است پس نتیجه می شود واریانس نمرات اولیه ۸ تقسیم بر ۴ یعنی ۲ بوده است.

## روشی دیگر برای محاسبه واریانس

این دستور محاسبه واریانس معمولاً هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که مجموع مجذور داده ها برای ما مشخص باشد. در این روش برای محاسبه واریانس، میانگین مجذور داده ها را منهای مجذور میانگین داده ها می کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

### تمرین تکمیلی

سوال ۱۱: اگر مجموع ۸ داده آماری برابر ۳۲ و مجموع مجذور همان ۸ داده برابر ۴۰۰ باشد؛ واریانس

داده ها را بیابید.

$$\bar{x} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{400}{8} - (4)^2 = 50 - 16 = 34$$

صفحه ۹۰ کتاب درسی

## انحراف معیار (Standard Deviation)

به جذر واریانس؛ **انحراف معیار** می گویند و از نماد  $\sigma$  برای نمایش آن استفاده می شود.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

به عبارتی دیگر باید اختلاف هر عدد با میانگین داده ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ سپس میانگین اعداد حاصل را به دست آورید و در نهایت از آن جذر بگیرید.

در تفسیر داده ها معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می خواهیم، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز داریم، که همان **انحراف معیار** است.

اگر انحراف معیار مجموعه داده ها عدد کوچکی باشد، پدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان کم و در نتیجه داده ها به هم نزدیک تر است و اگر انحراف معیار مجموعه داده ها عددی بزرگ باشد، پدین معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان زیاد و در نتیجه داده ها از هم دورتر است.

## کار در کلاس ۱ صفحه ۹۰ کتاب درسی

اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیارشان برابر با صفر خواهد شد. چرا؟

اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف داده‌ها از میانگین (تفاضل داده‌ها از میانگین) برابر صفر می‌شود. در نتیجه مجموع مجذور آنها صفر خواهد بود. صفر تقسیم بر تعداد داده‌ها برابر صفر خواهد شد.

$$\sigma^2 = \frac{(x - \bar{x})^2 + (x - \bar{x})^2 + \dots + (x - \bar{x})^2}{n} \xrightarrow{x = \bar{x}} \sigma^2 = \frac{\cdot + \cdot + \dots + \cdot}{n} = \frac{\cdot}{n} = \cdot$$

کار در کلاس ۲ صفحه ۹۰ کتاب درسی

انحراف معیار نمره های آزمون جامع سه کلاس را می توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

مشاهدات (داده ها)			انحراف مشاهدات از میانگین			انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲		
الف	ب	پ	الف	ب	پ	الف	ب	پ
۶۵	۸۵	۴۳	-۲	۱۸	-۲۴	۴	۳۲۴	۵۷۶
۷۵	۷۹	۵۱	۸	۱۲	-۱۶	۶۴	۱۴۴	۲۵۶
۷۳	۵۷	۵۳	۶	-۱۰	-۱۴	۳۶	۱۰۰	۱۹۶
۵۰	۳۹	۱۱۰	-۱۷	-۲۸	۴۳	۲۸۹	۷۸۴	۱۸۴۹
۶۰	۴۵	۵۰	-۷	-۲۲	-۱۷	۴۹	۴۸۴	۲۸۹
۶۴	۷۱	۴۸	-۳	۴	-۱۹	۹	۱۶	۳۶۱
۶۹	۶۷	۸۷	۲	۰	۲۰	۴	۰	۴۰۰
۶۲	۸۷	۶۹	-۵	۲۰	۲	۲۵	۴۰۰	۴
۶۷	۹۱	۶۸	۰	۲۴	۱	۰	۵۷۶	۱
۸۵	۴۹	۹۱	۱۸	-۱۸	۲۴	۳۲۴	۳۲۴	۵۷۶
مجموع			۰	۰	۰	۸۰۴	۳۱۵۲	۴۵۰۸

$$\sigma = \sqrt{\frac{۸۰۴}{۱۰}} \cong ۸/۹۷$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۳۱۵۲}{۱۰}} \cong ۱۷/۷۵$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۴۵۰۸}{۱۰}} \cong ۲۱/۲۳$$

## صفحه ۹۱ کتاب درسی

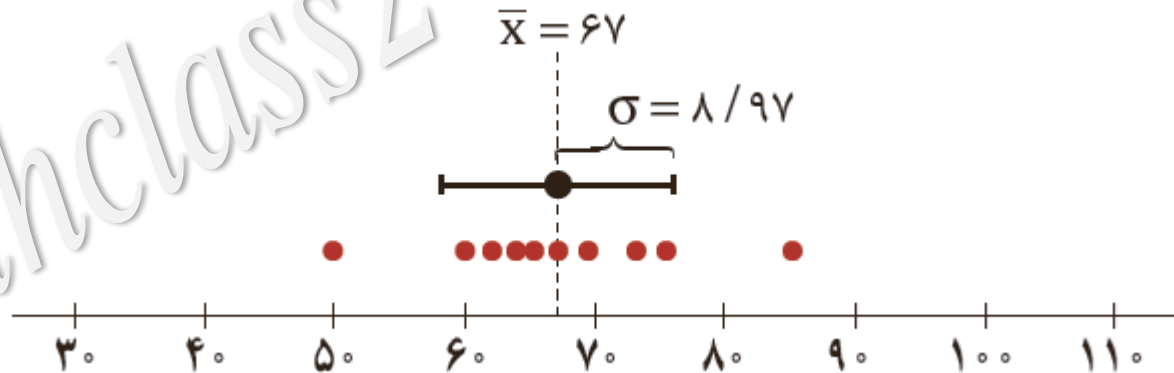
انحراف معیار داده های زیر را بدست آورید و آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\{۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵\}$$

$$\bar{x} = \frac{۶۷۰}{۱۰} = ۶۷$$

$$\sigma^2 = \frac{۸۰۴}{۱۰} = ۸۰/۴$$

$$\sigma = \sqrt{۸۰/۴} \cong ۸/۹۷$$



## صفحه ۹۱ کتاب درسی

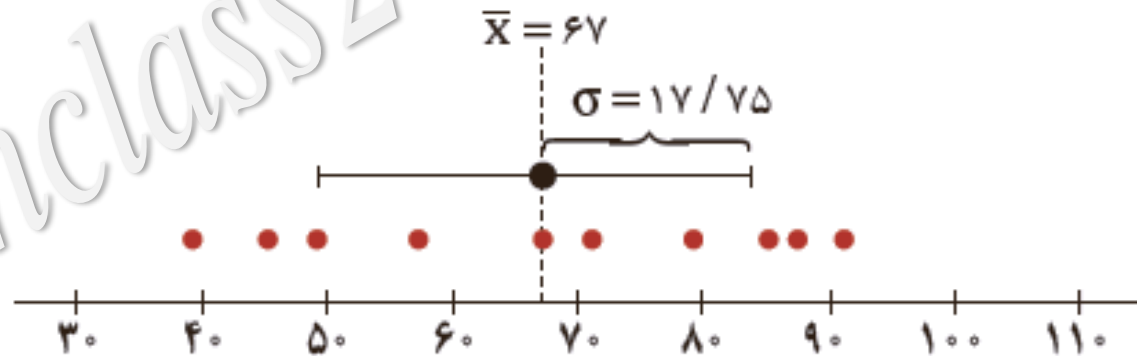
انحراف معیار داده های زیر را بدست آورید و آنها را با هم مقایسه کنید.

{۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹}

$$\bar{x} = \frac{670}{10} = 67$$

$$\sigma^2 = \frac{3152}{10} = 315.2$$

$$\sigma = \sqrt{315.2} \approx 17.75$$



## صفحه ۹۱ کتاب درسی

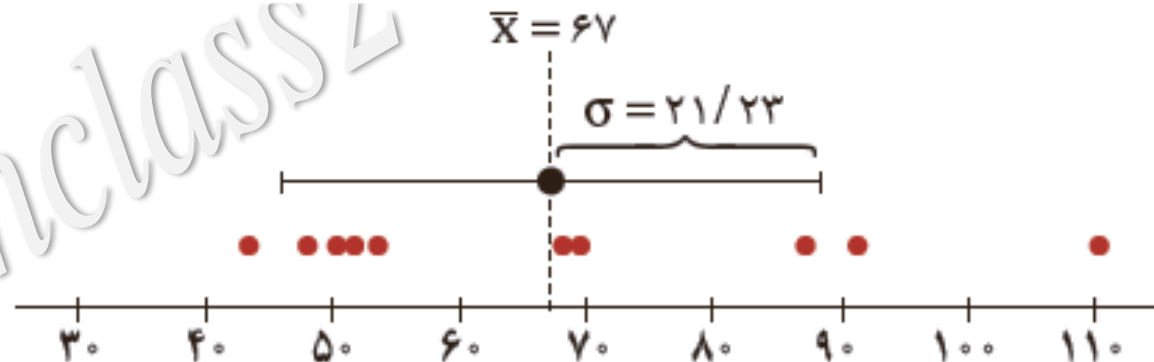
انحراف معیار داده های زیر را بدست آورید و آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\{۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱\}$$

$$\bar{x} = \frac{۶۷۰}{۱۰} = ۶۷$$

$$\sigma^2 = \frac{۴۵۰۸}{۱۰} = ۴۵۰٫۸$$

$$\sigma = \sqrt{۴۵۰٫۸} \cong ۲۱٫۲۳$$





## ویژگی های انحراف معیار

(۱) اگر همه داده های آماری یکسان باشند، انحراف معیار برابر صفر است و برعکس، یعنی اگر انحراف معیار برابر صفر باشد، تمام داده ها با یکدیگر برابر هستند.

(۲) اگر همه داده های آماری را با عددی جمع یا تفریق کنیم، انحراف معیار تغییر نمی کند.

(۳) اگر همه داده های آماری را در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنیم؛ انحراف معیار در اندازه آن عدد ضرب، یا بر اندازه آن عدد تقسیم می شود.

(۴) اگر انحراف معیار داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر  $\sigma$  باشد، میانگین داده های  $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$  برابر  $|a|\sigma$  خواهد شد.

(۵) واحد انحراف معیار از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر) است.

به عنوان مثال: اگر واحد متغیر سانتیمتر باشد، واحد انحراف معیار نیز سانتیمتر خواهد بود.

(۶) داده های دورافتاده در آن تاثیر گذارند.

## تمرین تکمیلی

سوال ۱۲: دبیر درس ریاضی، آزمونی را در مقیاس ۰ انمره برگزار کرده است. سپس او به ۲ برابر نمرات ۲ نمره اضافه و وارد لیست نمرات می کند. حداکثر نمره وارد شده در لیست ۲۰ می باشد. اگر واریانس نمرات وارد شده در لیست، ۲۵ باشد. انحراف معیار نمرات اولیه دانش آموزان چند بوده است؟

داده ها دو برابر شده و ۲ واحد اضافه شده اند پس نتیجه می شود که انحراف معیار ۲ برابر شده است. چون واریانس نمرات درون لیست برابر ۲۵ است پس انحراف معیار نمرات درون لیست برابر ۵ می شود. پس نتیجه می شود که انحراف معیار نمرات اولیه ۵ تقسیم بر ۲ یعنی ۲٫۵ بوده است.

## بیشتر بدانیم

## ضریب تغییرات (Coefficient of variation)

یکی از شاخص های پراکندگی که فقط برای داده های مثبت تعریف می شود و از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می آید، ضریب تغییرات نام دارد و آن را با  $C.V$  نشان می دهند.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

فقط برای داده های مثبت تعریف می شود.

## تمرین تکمیلی

سوال ۱۳: ضریب تغییرات داده های زیر را بدست آورید.

۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۵, ۵, ۵, ۵, ۶, ۸

$$\bar{x} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{4(2-4)^2 + 2(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + (6-4)^2 + (8-4)^2}{12} = \frac{42}{12} = 3.5$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{3.5} = 1.87$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow C.V = \frac{1.87}{4} = 46.75$$

## تمرین تکمیلی

سوال ۱۴: موجودی حساب پس انداز علی و محمد و امید در ابتدای یک سال به ترتیب  $A$ ،  $B$  و  $C$  ریال است. ( $A$ ،  $B$  و  $C$  دو به دو متمایزند). اگر این سه نفر سه ماهانه صد هزار تومان به حساب خود واریز کرده و هیچ مبلغی برداشت نکنند، ضریب تغییرات موجودی های آنها در پایان سال نسبت به ابتدای سال چه تغییری خواهد کرد؟ افزایش می یابد یا کاهش؟ چرا؟

کاهش می یابد. زیرا، با اضافه کردن یک مقدار مثبت به همه داده ها، انحراف معیار تغییری نمی کند؛ اما آن مقدار مثبت به میانگین اضافه می شود، در نتیجه نسبت انحراف معیار به میانگین کاهش می یابد.

## بیشتر بدانیم

## ویژگی های ضریب تغییرات

- ۱) ضریب تغییرات، تنها شاخص پراکندگی بدون واحد است. بنابراین، برای مقایسه پراکندگی بین دو جامعه آماری متفاوت که واحد سنجش متغیر آنها یکسان نیست، از ضریب تغییرات استفاده می کنیم.
- ۲) اگر همه داده های آماری با هم برابر باشند، ضریب تغییرات برابر صفر است و برعکس یعنی اگر ضریب تغییرات برابر صفر باشد، تمام داده های آماری با هم برابر هستند.
- ۳) اگر همه داده های آماری را در یک عدد مثبت ضرب و یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم، ضریب تغییرات تغییری نمی کند.
- ۴) اگر به همه داده ها یک مقدار مثبت اضافه کنیم، ضریب تغییرات کوچک می شود. زیرا، با اضافه کردن یک مقدار مثبت به همه داده ها، انحراف معیار تغییری نمی کند؛ اما، آن مقدار مثبت به میانگین اضافه می شود.

فعالیت صفحه ۹۲ کتاب درسی



$250 \pm 10$  گرم

حتماً بر روی قوطی ها یا پاکت های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده اید. به نظر شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می دهند؟

عدد  $250$  وزن خالص ماده غذایی است که قرار است به دست مصرف کننده برسد؛ ولی معمولاً این چنین نیست و عدد  $10$  دو برابر انحراف معیار ماده غذایی در بسته بندی است.

اگر ما  $100$  قوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل  $96$  تا از آنها وزنی بین  $240$  و  $260$  گرم داشته باشند. چگونه به عدد  $96$  رسیده اند؟

برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می کنیم: تقریباً  $96$  درصد از داده ها در فاصله «دو انحراف معیار از میانگین» هستند.

کار در کلاس صفحه ۹۳ کتاب درسی

جدول زیر را تکمیل کنید.

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	تقریباً $99/9$ درصد از مشاهدات در فاصله سه انحراف از میانگین هستند.
$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً $96$ درصد از مشاهدات در فاصله دو انحراف معیار از میانگین هستند.
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً $68$ درصد از مشاهدات در فاصله یک انحراف از میانگین هستند.

فعالیت صفحه ۹۳ و ۹۴ کتاب درسی

فرض کنید درآمد ماهانه حضار در انجمن خیریه یک دبیرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر باشد:

درآمد (میلیون ریال)	نجیمه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵

انحراف معیار درآمد اعضاء را محاسبه کنید.

مشاهدات (داده ها)	انحراف مشاهدات از میانگین	انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲
۴۰	۱۳	۱۶۹
۱۲	-۱۵	۲۲۵
۲۸	۱	۱
۳۲	۵	۲۵
۳۰	۳	۹
۲۲	-۵	۲۵
۲۵	-۲	۴
مجموع	۰	۴۵۸

$$\bar{x} = \frac{189}{7} = 27$$

$$\sigma^2 = \frac{458}{7} \cong 65.43$$

$$\sigma = \sqrt{65.43} \cong 8.08$$

فعالیت صفحه ۹۳ و ۹۴ کتاب درسی

اگر یک میلیاردر با درآمد ماهانه یک میلیارد ریال، به انجمن خیریه دبیرستان بیاید، انحراف معیار درآمد حضار چه تغییری می کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می گویند. آمارشناسان او را دور افتاده می نامند).

انحراف معیار درآمد اعضاء را محاسبه کنید.

مشاهدات (داده ها)	انحراف مشاهدات از میانگین	انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲
۴۰	-۱۰۸/۶۲۵	۱۱۷۹۹/۴
۱۲	-۱۳۶/۶۲۵	۱۸۶۶۶/۴
۲۸	-۱۲۰/۶۲۵	۱۴۵۵۰/۴
۳۲	-۱۱۶/۶۲۵	۱۳۶۰۱/۴
۳۰	-۱۱۸/۶۲۵	۱۴۰۷۱/۹
۲۲	-۱۲۶/۶۲۵	۱۶۰۳۳/۹
۲۵	-۱۲۳/۶۲۵	۱۵۲۸۳/۱۴
۱۰۰۰	۸۵۱/۳۷۵	۷۲۴۸۳۹/۴
مجموع	.	۸۲۸۸۴۵

$$\bar{x} = \frac{1189}{8} = 148.625$$

$$\sigma^2 = \frac{828845}{8} \approx 103605.625$$

$$\sigma = \sqrt{103605.625} \approx 321.88$$

خیلی زیاده !! چه کنیم؟  

زمانی که با داده دورافتاده مواجه ایم، معیار پراکندگی ای که تعریف می شود، انحراف معیار نیست.

از چه معیاری استفاده می شود؟؟؟

معیار مورد استفاده را دامنه میان چارکی می نامیم و با IQR نشان می دهیم.



صفحه ۹۴ کتاب درسی

دامنه میان چارکی یا انحراف چارکی ( $IQR$ )

اگر برای داده های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، چارک اول یا  $Q_1$  را یافته ایم و به همین صورت میانه داده های بعد از میانه، چارک سوم یا  $Q_3$  خواهد بود.

دامنه میان چارکی برابر است با تفاضل چارک اول از چارک سوم است.  $IQR = Q_3 - Q_1$

داده های دور افتاده در آن تاثیری ندارند به همین علت کارایی بیشتری نسبت به دامنه تغییرات دارد.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵: دامنه میان چارکی داده های زیر را تعیین کنید.

$$1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 5 - 5 - 8 - 8 - 10 - 13 - 13 - 15$$

$$Q_1 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

$$Q_2 = 5$$

$$Q_3 = \frac{10 + 13}{2} = 11.5$$

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

$$IQR = 11.5 - 2.5 = 9$$

صفحه ۹۴ کتاب درسی

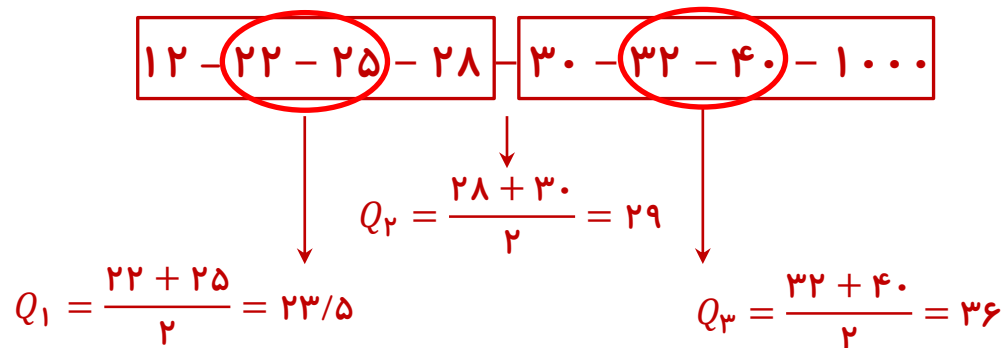
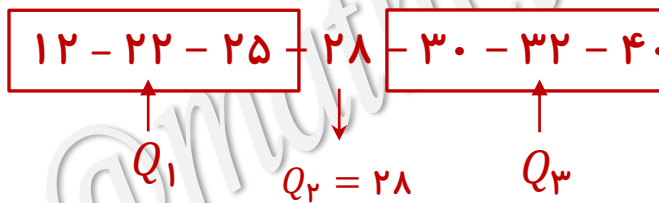
فرض کنید درآمد ماهانه حضار در انجمن خیریه یک دبیرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به

صورت زیر باشد:

درآمد (میلیون ریال)	نجیمه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵	

اگر یک میلیارد ریال با درآمد ماهانه یک میلیارد ریال، به انجمن خیریه دبیرستان بیاید، با کامل کردن جدول زیر نشان دهید دامنه میان چارکی درآمد حضار چه تغییری می کند؟

$\sigma$	$IQR$	$Q_3$	$Q_2$	$Q_1$	
۸/۰۸	۱۰	۳۲	۲۸	۲۲	درآمد ماهانه اعضای انجمن
۳۲۱/۸۸	۱۲/۵	۳۶	۲۹	۲۳/۵	درآمد ماهانه اعضای انجمن بعد از ورود میلیارد ریال



صفحه ۹۵ کتاب درسی

## آمار توصیفی

آمار توصیفی به خلاصه سازی داده ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می پردازد.



### می توان گفت

آماره ای که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین ها و میانه ها، انحرافات معیار و دامنه های میان چارکی به کار می رود، آمار توصیفی نام دارد.

آمارتوصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده های جمع آوری شده فراهم می آورد.

# جمع بن ددی

دامنه تغییرات	دامنه میان چارگی	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات
تغییر نمی کند	تغییر نمی کند	تغییر نمی کند	تغییر نمی کند	اگر به همه داده ها یک مقدار مثبت اضافه کنیم، ضریب تغییرات کوچک می شود.
در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر قدرمطلق آن عدد تقسیم می شود.	در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر قدرمطلق آن عدد تقسیم می شود.	در مجذور آن عدد ضرب، یا بر مجذور آن عدد تقسیم می شود.	در اندازه آن عدد ضرب، یا بر اندازه آن عدد تقسیم می شود.	تغییر نمی کند.
بله	خیر	بله	بله	بله
نسبت به داده دور افتاده تاثیر پذیر است؟				
واحد اندازه گیری	از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر)	توان دوم واحد داده مورد نظر (متغیر)	از نوع واحد داده مورد نظر (متغیر)	بدون واحد

## نکته ها

معيار پراكنندگي كه معمولا با ميانگين بيان مي شود، انحراف معيار است.

معيار پراكنندگي كه معمولا با ميانه بيان مي شود، دامنه ميانه چاركي نام دارد.

وقتي با داده دور افتاده مواجه هستيد، دامنه ميانه چاركي معمولا بازتاب بهتري از داده ها مي دهد تا انحراف معيار.

زمانی که تعداد داده ها زیاد باشد، می توانید از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکنندگی نتیجه بگیرید که داده دور افتاده وجود داشته است.

مزیت های میانه و دامنه میانه چارکی به نسبت میانگین و انحراف معیار:

الف) تفسیر سریع و ساده تر ب) ثبات بالاتر و عدم تاثیر پذیری نسبت به داده های دور افتاده

## کار در کلاس صفحه ۹۵ کتاب درسی

جمله های زیر را کامل کنید:

- ۱) میانگین ها و میانه ها برای توصیف مجموعه داده ها مفیدند. **میانگین** و **میانه** انواعی از معیارهای گرایش به مرکز هستند.
- ۲) شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار، **انحراف معیار** است.
- ۳) معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می شود، **انحراف معیار** است.
- ۴) معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می شود، **دامنه میان چارکی** نام دارد.
- ۵) **میانه** و **دامنه میان چارکی** اطلاعات سریعی درباره داده ها بدون نیاز به هر گونه محاسبه می دهند.
- ۶) آماره ای که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین ها و میانه ها، انحرافات معیار و دامنه های میان چارکی به کار می رود، **آمار توصیفی** نام دارد.

## کار در کلاس صفحه ۹۵ کتاب درسی

جمله های زیر را کامل کنید:

(۷) ۵۰ درصد داده ها قبل از میانه و ۵۰ درصد داده ها بعد از میانه قرار دارند.

(۸) ۷۵ درصد داده ها قبل از چارک سوم یا بعد از چارک اول قرار دارند.

(۹) ۲۵ درصد داده ها قبل از چارک اول یا بعد از چارک سوم قرار دارند.

(۱۰) ۵۰ درصد داده ها بین چارک اول و چارک سوم قرار دارند.

(۱۱) تقریباً ۹۶ درصد از مشاهدات در فاصله دو انحراف معیار از میانگین هستند.

(۱۲) تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصله یک انحراف معیار از میانگین هستند.

تمرین ۱ تا ۸ صفحه ۱۱۲ و ۱۱۳ کتاب درسی مربوط به درس ۱ می باشد،  
لذا در اسلایدهای درس ۱ قرار داده شده اند.

تمرین ۹ و ۱۰ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی مربوط به درس ۲ می باشد، لذا در  
اسلایدهای درس ۲ قرار داده شده اند.

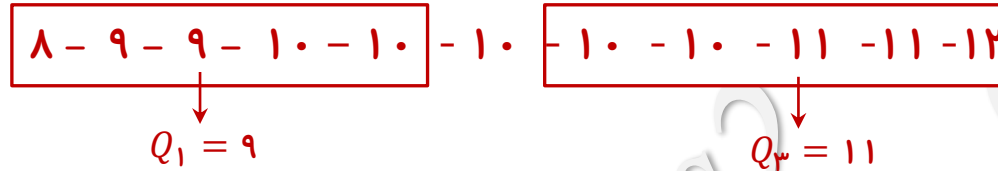
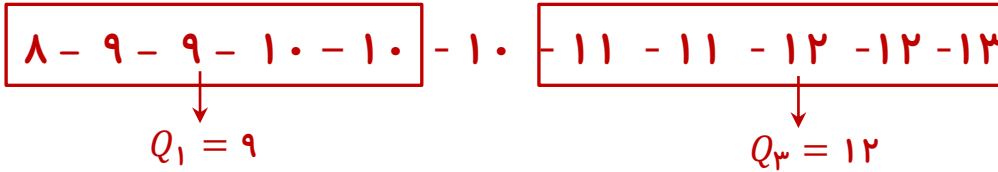
@mathclass2



تمرین ۱۱ صفحه ۹۸ کتاب درسی

دو دسته داده زیر، قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه بر حسب هزار ریال نشان می دهد.

۸	۱۳	۹	۱۲	۱۰	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۱۱	۱۰	بازار الف
۱۰	۱۳	۸	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	بازار ب



الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

بازار الف  $IQR = 12 - 9 = 3$

بازار ب  $IQR = 11 - 9 = 2$

بازار «الف» پراکندگی بیشتری دارد

ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

بازار الف  $R = 13 - 8 = 5$

بازار ب  $R = 13 - 8 = 5$

پ) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در «الف» همخوانی دارد؟

بله در این حالت دامنه تغییرات پراکندگی را یکسان نشان می دهد.

ت) ترجیح می دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟

«بازار ب» پراکندگی کمتری دارد؛ بنابراین خرید از این بازار را ترجیح می دهیم.

ث) اگر داده ها را در اختیار نداشته باشید، فقط به صرف داشتن دامنه تغییرات می توانید تصمیم گیری کنید؟

خیر فقط با داشتن دامنه تغییرات نمی توان تصمیم گیری درستی انجام داد.

تمرین تکمیلی

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

سوال ۱۶: جدول مقابل، پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی

پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می دهد.

الف) میانگین و میانه پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

پ) برنامه ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده تر است یا مریم؟

$$\bar{x}_{\text{مینا}} = \frac{۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷}{۵} = ۲۵$$

۲۳ , ۲۴ , ۲۵ , ۲۶ , ۲۷

$$\downarrow$$

$$Q_2 = ۲۵$$

$$\bar{x}_{\text{مریم}} = \frac{۱۵ + ۲۰ + ۲۵ + ۳۰ + ۳۵}{۵} = ۲۵$$

۱۵ , ۲۰ , ۲۵ , ۳۰ , ۳۵

$$\downarrow$$

$$Q_2 = ۲۵$$

$$\sigma^2_{\text{مینا}} = \frac{(۲۳ - ۲۵)^2 + (۲۴ - ۲۵)^2 + (۲۵ - ۲۵)^2 + (۲۶ - ۲۵)^2 + (۲۷ - ۲۵)^2}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \rightarrow \sigma = \sqrt{۲}$$

$$\sigma^2_{\text{مریم}} = \frac{(۱۵ - ۲۵)^2 + (۲۰ - ۲۵)^2 + (۲۵ - ۲۵)^2 + (۳۰ - ۲۵)^2 + (۳۵ - ۲۵)^2}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰ \rightarrow \sigma = \sqrt{۵۰}$$

پ) دوستان مینا به علت پراکندگی کمتر پول توی جیبی آنها

# پایان درس سوم

