۳

فصل سوم

بـــردارهـــا

بنابه گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر هم‌راستا با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

درس اوّل

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) که $a,b\in\mathbb{R}$ مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به‌صورت زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$$

همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت $ax+by=c$ است که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ (a و b هم‌زمان صفر نیستند).

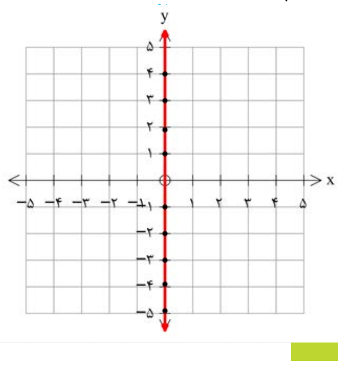
به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار G را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار G قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در $\mathbb{R}^2$ یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

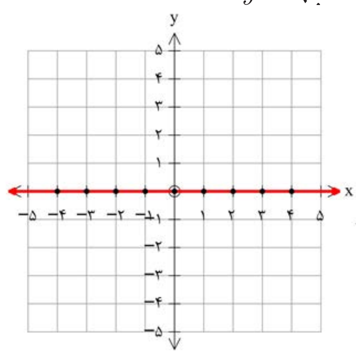
کاردرکلاس

۱ــ برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

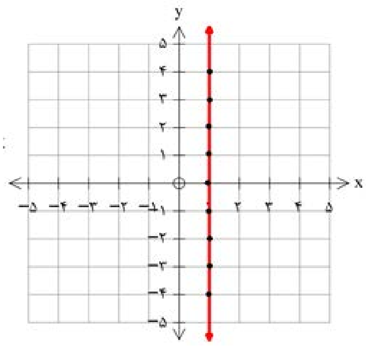
الف) $x=0$



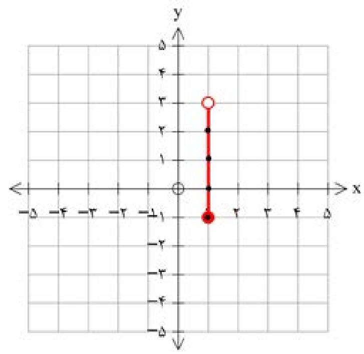
ب) $y=0$



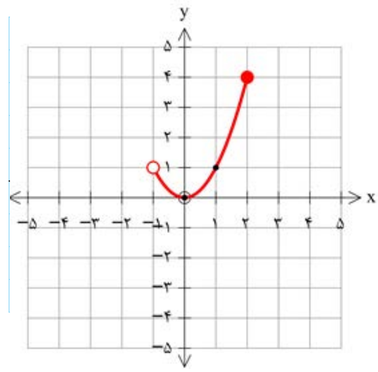
ب) $x=1$



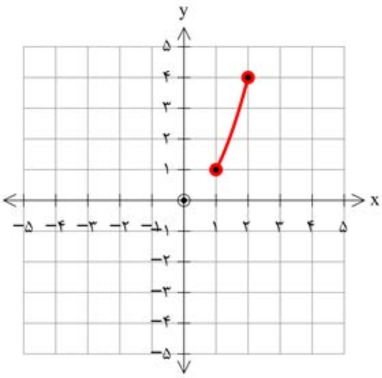
ت) $x = ۱ \quad , \quad -۱ \leq y < ۳$



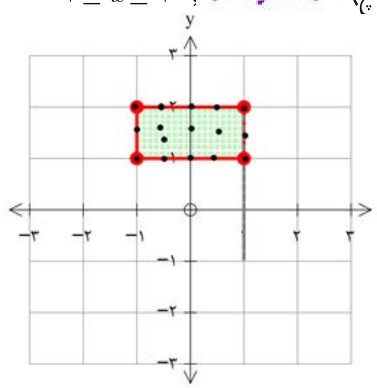
ث) $y = x^۲ \quad , \quad -۱ < x \leq ۲$



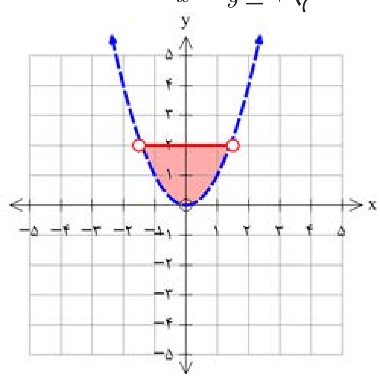
ج) $y = x^۲ \quad , \quad ۱ \leq x \leq ۲$



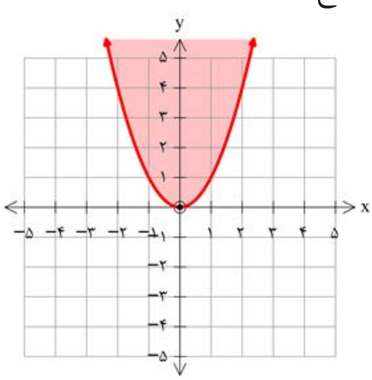
چ) $-۱ \leq x \leq ۱$ ، $۱ \leq y \leq ۲$



ح) $x^۲ < y \leq ۲$

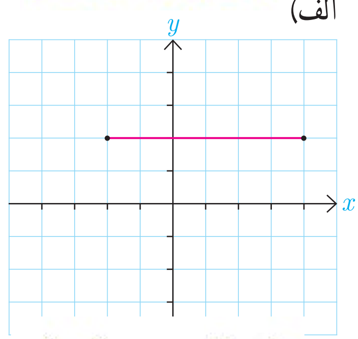


خ) $y \geq x^۲$

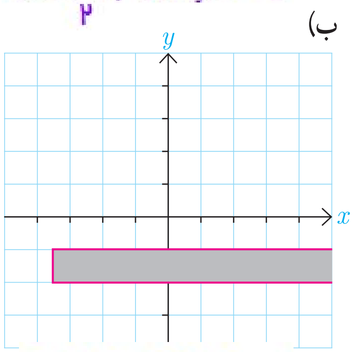


۲ــ در هر یک از شکل‌های روبه‌رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.[۱]

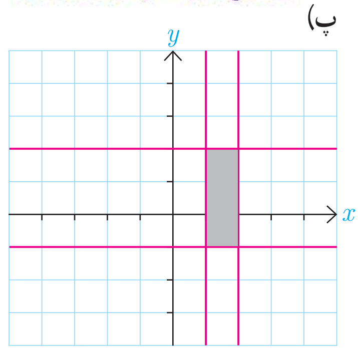
الف) $y = ۲ \;; -۲ \leq x \leq ۴$



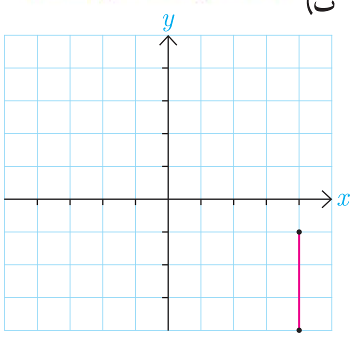
ب) $x \geq \frac{-۷}{۲} , -۲ \leq y \leq -۱$



پ) $۱ \leq x \leq ۲ \;,\; -۱ \leq y \leq ۲$



ت) $x = ۴ , -۴ \leq y \leq -۱$



۱ــ صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

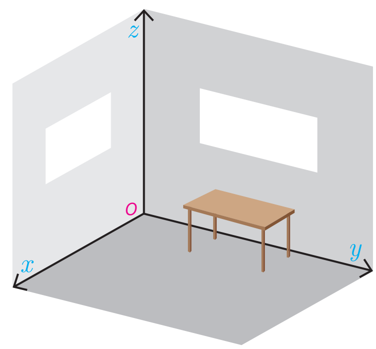
حال به سراغ فضای $\mathbb{R}^3$ می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای $\mathbb{R}^3$ و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a,b,c) که در آن $a,b,c\in\mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیرید.

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

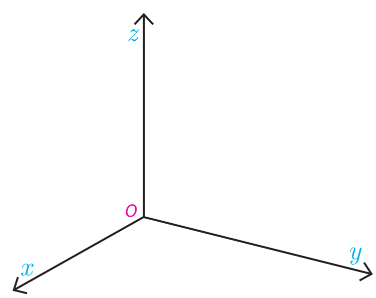
مشابه $\mathbb{R}^2$ می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x,y,z) که در آنها x,y,z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای $\mathbb{R}^3$ می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط $\mathbb{R}^2$ از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم xها و yها استفاده می‌شود. به‌طور مشابه می‌توان فضای $\mathbb{R}^3$ را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دوعمود برهم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محوردو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج[1] می‌دهند.

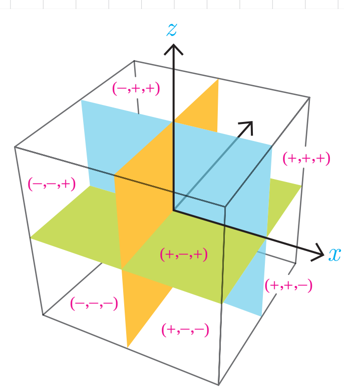


محورهای Ox ، Oy و Oz به ترتیب محور xها، محور yها و محور zها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور xها و yها، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور yها و zها، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور xها و zها هستند. جهت مثبت هریک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه O) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه $\mathbb{R}^3$ به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره‌گذاری استاندارد یک دستگاه $\mathbb{R}^2$ شماره‌گذاری می‌شوند.



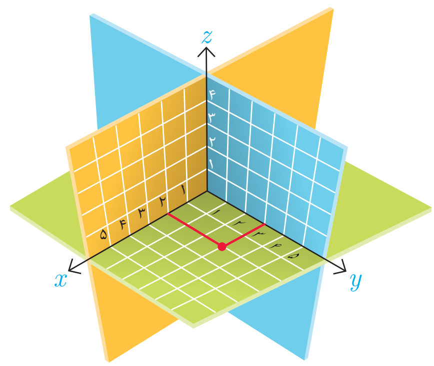
مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره‌گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

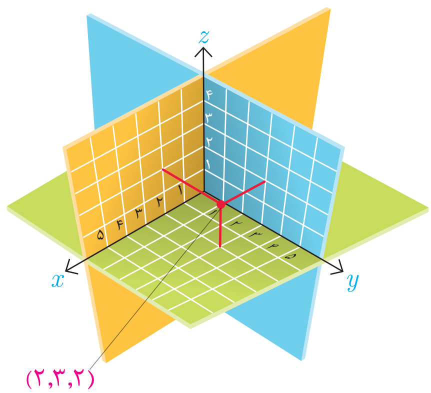


۱ــ از برخورد سه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع، یک کنج تشکیل می‌شود.

برای نمایش سه‌تایی مرتب $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ را در صفحه xy بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه $z_\circ$ در راستای موازی با محور zها (یعنی به‌طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.

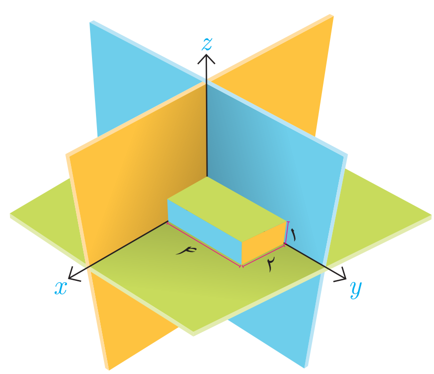


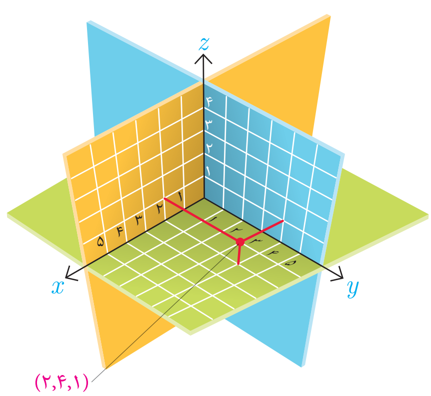
شکل شماره ۱



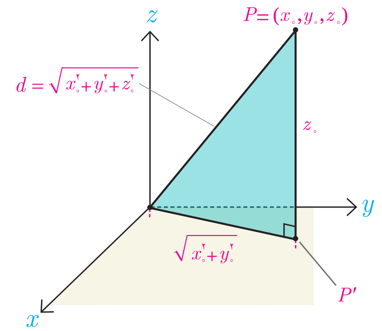
شکل شماره ۲

در واقع، می‌توان سه نقطه به طول‌های $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ به ترتیب بر روی محورهای x,y,z در نظر گرفت و سپس صفحه گذرنده از $x_\circ$ و موازی با صفحه yz، صفحه گذرنده از $y_\circ$ و موازی با صفحه xz و صفحه گذرنده از $z_\circ$ و موازی با صفحه xy را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول $x_\circ$، عرض $y_\circ$ و ارتفاع $z_\circ$ است که نمایش‌دهنده سه‌تایی مرتب $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ می باشد. مثلاً نقطه P در شکل زیر متناظر با سه‌تایی مرتب (۲,۴,۱) است.





همچنین نقطه O که مبدأ مختصات است متناظر سه تایی مرتب $(0,0,0)$ می‌باشد.
دو نقطه $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ را برهم منطبق گوییم و می‌نویسیم $P=Q$ هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x_0=x_1$, $y_0=y_1$, $z_0=z_1$.

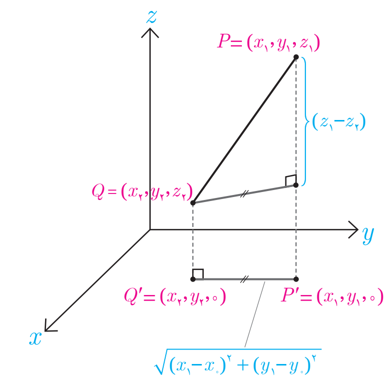


برای یافتن فاصله یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ از مبدأ مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در این‌صورت با توجه به شکل مقابل ازقضیه فیثاغورس طول پاره خط OP' به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|OP'|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه OPP' از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می‌کنیم. پس داریم :

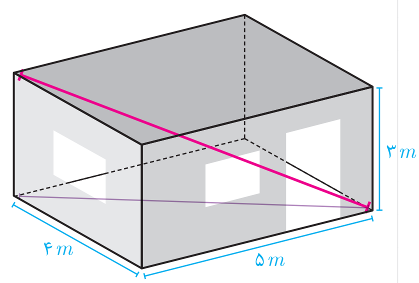
$$|OP|=\sqrt{|OP'|^2+z_0^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$



رابطه فوق را می‌توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از $\mathbb{R}^3$ مانند $P=(x_0,y_0,z_0)$ و $Q=(x_1,y_1,z_1)$ به‌صورت زیر تعمیم داد.

$$|PQ|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

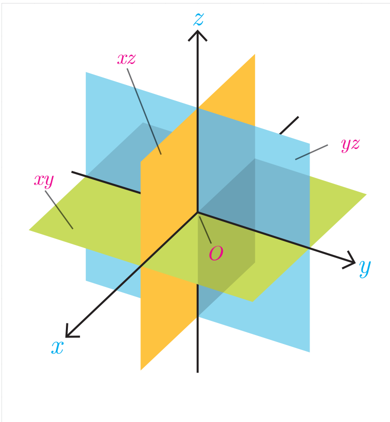
مثال : در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می‌شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟



$$\text{قطر مستطیل کف اتاق}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}\Rightarrow \text{قطر اتاق}=\sqrt{41+3^2}=5\sqrt{2}$$

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می‌پردازیم.

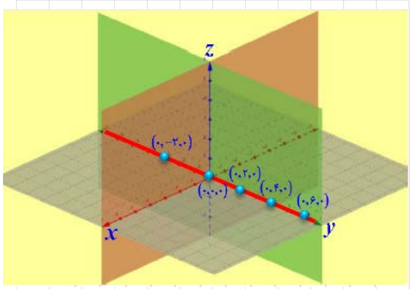
مثال : فرض کنید معادله $x=0$ داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می‌کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی x برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله $\mathbb{R}^2$ است یا $\mathbb{R}^3$.



قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در $\mathbb{R}^2$ محور yهاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از $\mathbb{R}^3$ را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت $(0,y,z)$ به طوری که $y,z\in\mathbb{R}$. همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار y و z هرچه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله $x=0$ صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر y و z آزاد هستیم. مثلاً نقاط $(0,-3,-1)$, $(0,0,0)$, $(0,1,2)$ و $(0,-1,5)$ همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادلهٔ $x=0$ صدق می‌کنند و این همان صفحهٔ yz است.

فعالیت ۱

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله $x=0$ در $\mathbb{R}^3$ تمام نقاط صفحه yz است (به عبارتی $x=0$ معادله صفحه yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و zهای دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x=0$ شرط $z=0$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها $z=0$ باشد.)



۱ــ مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲ــ نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x=0$ دارد؟

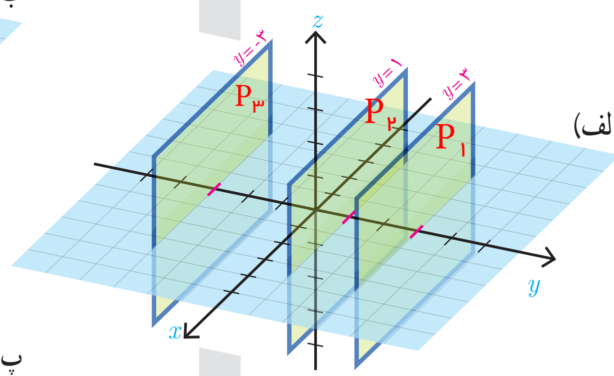
$\begin{cases}X=0\\Z=0\end{cases}$ همان محور yها ست اما x=0 همان صفحه yz است که شامل محور yها نیز می باشد

مثال : روی صفحهٔ $z=1$ نقاط $A=(1,2,1)$ و $B=(2,2,1)$ و $C=(3,2,1)$ را در نظر می‌گیریم، مؤلفهٔ دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحهٔ مزبور $(z=1)$ تمام نقاطی که مؤلفهٔ دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات $\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases}$)

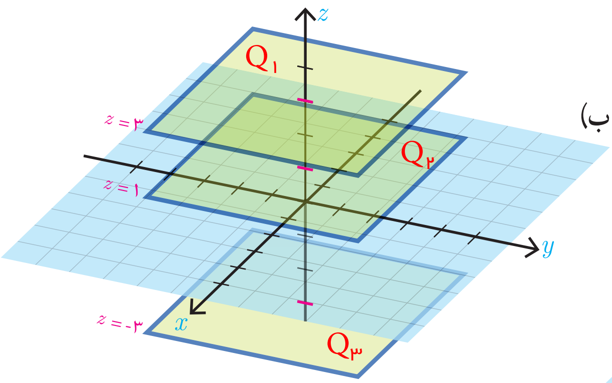
کاردرکلاس

۱ــ در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

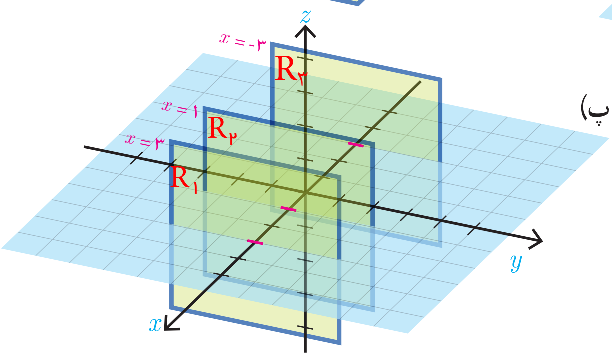
الف)

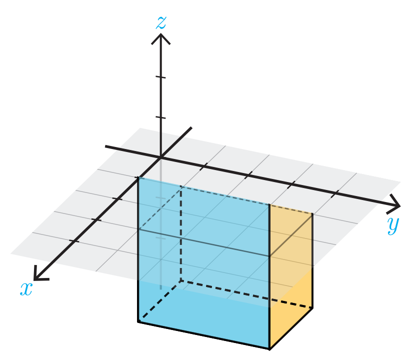


ب)



پ)





۲ــ وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=1$، $x=3$، $y=1$، $y=4$، $z=-2$ و $z=2$ هستند[1].

الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ث) روابط مشخص‌کنندهٔ یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کنندهٔ پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کنندهٔ حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعبِ داده شده باشند.

۱ــ طرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.

کاردرکلاس ۱: الف)

$$_{۱}: y = ۳ \rightarrow (-۷,۳,-۴) \in p_{۱} , (۰,۳,۱) \in p_{۱}$$

$$p_{۲} : y = ۱ \rightarrow (-۱,۱,۵) \in p_{۲} , (۲,۱,۴) \in p_{۲}$$

$$p_{۳} : y = -۳ \rightarrow (۵,-۳,-۱) \in p_{۳} , (۱,-۳,۲) \in p_{۳}$$

ب)

$$Q_{۱} : z = ۳ \rightarrow (۱,۲,۳) \in Q_{۱} , (۴,-۱,۳) \in Q_{۱}$$

$$Q_{۲} : z = ۱ \rightarrow (۳,۱,۱) \in Q_{۲} , (-۵,۲,۱) \in Q_{۲}$$

$$Q_{۳} : z = -۳ \rightarrow (۷,۴,-۳) \in Q_{۳} , (-۱,۰,-۳) \in Q_{۳}$$

پ)

$$R_{۱} : x = ۳ \rightarrow (۳,-۱,۶) \in R_{۱} , (۳,۴,۱) \in R_{۱}$$

$$R_{۲} : x = ۱ \rightarrow (۱,۱,۱) \in R_{۲} , (۱,۴,۷) \in R_{۲}$$

$$R_{۳} : x = -۳ \rightarrow (-۳,۱,۲) \in R_{۳} , (-۳,۰,۵) \in R_{۳}$$

کاردکلاس ۲: الف) $(۱,۲,۱)-(۳,۳,۰)-(۲,۱,۱)-(۲,۴,۰)-(۲,۲,-۲)-(۲,۳,۲)$

ب) $(۱,۱,۰)-(۳,۴,۱)-(۱,۲,-۲)$

پ)

$$\begin{cases} x=۱ \\ y=۱ \\ -۲\le z\le ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x=۱ \\ y=۴ \\ -۲\le z\le ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x=۳ \\ y=۱ \\ -۲\le z\le ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x=۳ \\ y=۴ \\ -۲\le z\le ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=۱ \\ z=-۲ \\ ۱\le y\le ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x=۱ \\ z=۲ \\ ۱\le y\le ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x=۳ \\ z=-۲ \\ ۱\le y\le ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x=۳ \\ z=۲ \\ ۱\le y\le ۴ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=۱ \\ z=۲ \\ ۱\le x\le ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} y=۴ \\ z=۲ \\ ۱\le x\le ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} y=۴ \\ z=-۲ \\ ۱\le x\le ۳ \end{cases} \quad \begin{cases} y=۱ \\ z=-۲ \\ ۱\le x\le ۳ \end{cases}$$

ت) $(1,1,-2)$ $(3,1,2)$ $(1,4,2)$ $(3,4,2)$
$(1,1,2)$ $(3,1,-2)$ $(1,4,-2)$ $(3,4,-2)$

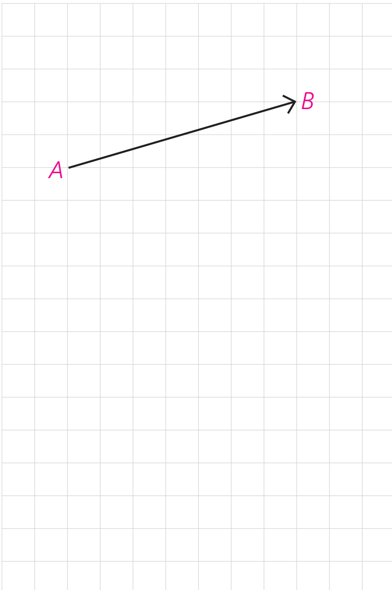
ش) $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ y = 4 \\ -2 \le z \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ y = 1 \\ -2 \le z \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ -2 \le z \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ 1 \le y \le 4 \\ -2 \le z \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ z = 2 \end{cases}$

ج) نقطه $(2,3,1)$ درون مکعب ونقطه $(1,2,0)$ روی وجه قرار دارد

چ) درون مکعب: هیچکدام از مختصات مساوی ندارد و بین دو عدد داده شده باشد

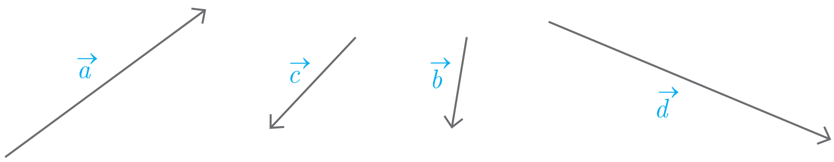
روی یک وجه: یکی از مختصات مساوی داشته باشد و دوتای مختصات دیگر بین دو عدد و دو متغیر واخ شده باشد

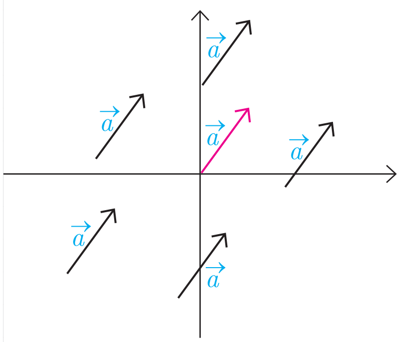
ح) $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 4 \\ -2 \le z \le 2 \end{cases}$



بردارها در $\mathbb{R}^2$

در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند AB در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با $\overrightarrow{AB}$ و اندازه آن را با $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ و اندازه طول آن را با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.





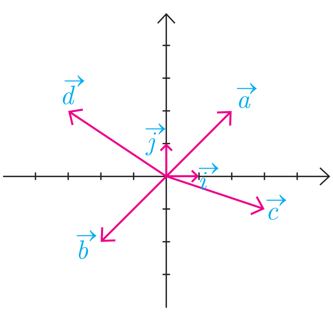
دو بردار را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چراکه جهت و اندازه آنها برابر است.

واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه درنظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود.

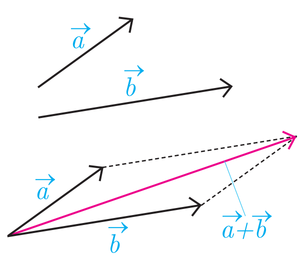
برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به‌عنوان نماینده بردارهای همسنگ درنظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ $\vec{a}$ می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این‌رو هر بردار مانند $\vec{a}$ را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی $\vec{a}=(a_1,a_2)$ که (a_1,a_2) مختصات انتهای بردار $\vec{a}$ می‌باشد.

$\vec{c}=(3,-1)$



مثال : بردارهای $\vec{a}=(2,2)$، $\vec{b}=(-2,-2)$ و $\vec{c}=(2,-1)$، $\vec{d}=(-3,2)$، $\vec{i}=(1,0)$ و $\vec{j}=(0,1)$ در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم شده‌اند.



از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ از روش متوازی‌الاضلاع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید و به آن برایند دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می‌گویند.

و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ می‌توان نوشت :

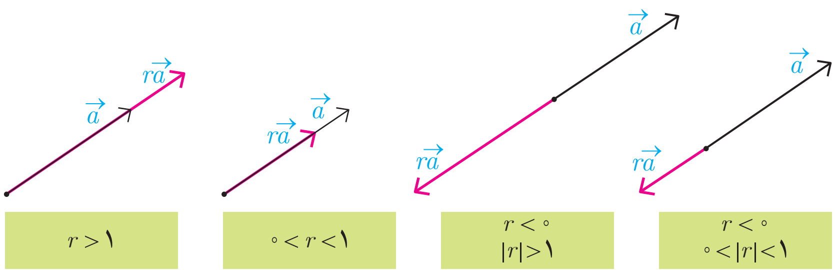
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

همچنین اگر $r\in\mathbb{R}$، و $\vec{a}$ یک بردار باشد، آنگاه بردار $r\vec{a}$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$r\vec{a}=r(a_1,a_2)=(ra_1,ra_2)$$

می‌توان نشان داد دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار $\vec{a}$ و $r\vec{a}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



به‌طور خاص وقتی $r=-1$ بردار $-\vec{a}=(-a_1,-a_2)$ حاصل می‌شود که آن را قرینه بردار $\vec{a}$ می‌نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت :

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1,a_2)+(-b_1,-b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$

به‌نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

جمع اولی با قرینه دومی

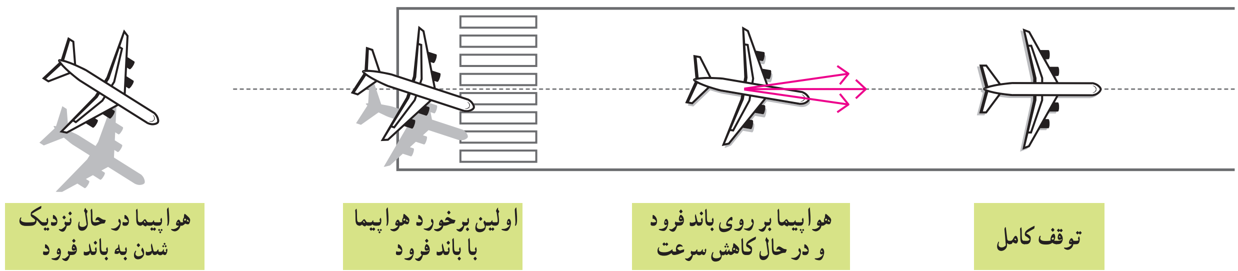
معمولاً مبدأ مختصات را به‌عنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با $\vec{O}=(0,0)$ نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار $\vec{a}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

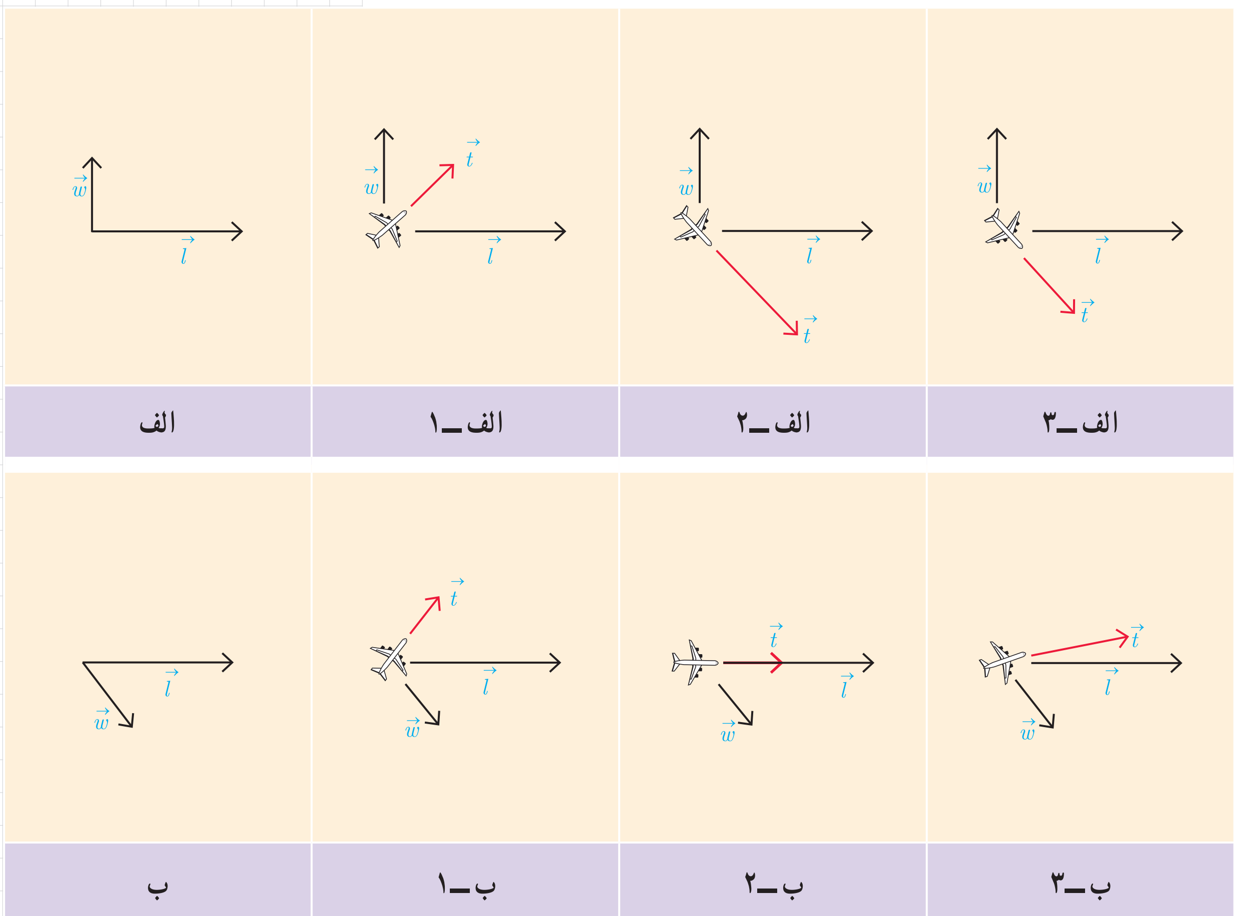
$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل‌سازی‌ها دارند. به‌طور نمونه بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برایند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار

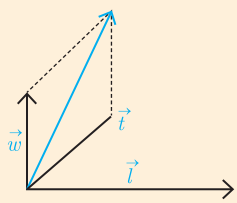
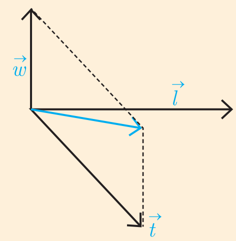
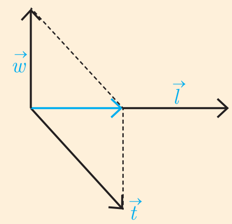
گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند. بردارها برای مدل‌سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می‌باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



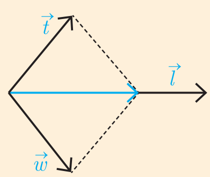
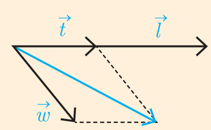
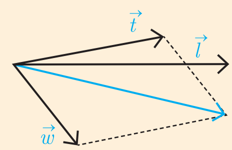
مثال : فرض کنید مسیرفرود (خط فرود) در جهت بردار $\vec{l}$ و حداکثرِ نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار $\vec{w}$ به هواپیما وارد می‌کند. در هریک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می‌تواند قرار دهد، به طوری‌که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برایند نیروی محرکه $\vec{t}$ و نیز $\vec{w}$ در جهت $\vec{l}$ باشد.

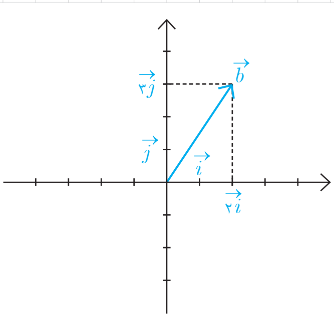


پاسخ : در مورد وضعیت الف برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) به‌صورت زیر است.

الف ــ ۱	الف ــ ۲	الف ــ ۳
		
بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از بالای باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{l}$ است. بنابراین $\vec{l}$ فرود ایمن است.

در مورد وضعیت ب برایند بردارهای $\vec{w}$ (نیروی باد) و $\vec{t}$ (نیرو محرکه هواپیما) به‌صورت زیر است.

ب ــ ۱	ب ــ ۲	ب ــ ۳
		
بردار برایند در جهت $\vec{l}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{l}$ است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)	بردار برایند در جهت $\vec{l}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می‌شود (خروج از پایین باند)



معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور xها را با $\vec{i}$ و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور yها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ و نیز بردار $\vec{b}=(۲,۳)$ به‌صورت حاصل جمع مضاربی از $\vec{i},\vec{j}$ نمایش داده شده‌اند. به‌طور کلی می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ را به‌صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲)=a_۱(۱,۰)+a_۲(۰,۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}$$

کاردرکلاس

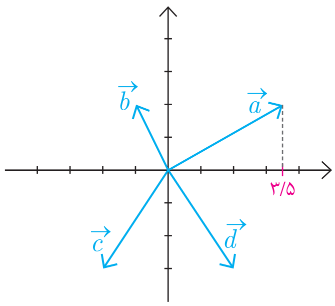
۱ــ در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده‌است.

الف) مختصات بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{b}$ را رسم کرده و مختصات آنها را به‌دست آورید.

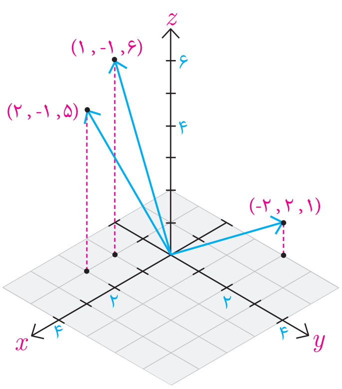
ج) مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به‌دست آورید.

د) هریک از بردارهای $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ، $\vec{a}+\vec{b}$ ، $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را برحسب بردارهای واحد $\vec{i},\vec{j}$ به‌دست آورید.



بردارها در $\mathbb{R}^۳$

مشابه بردارهای $\mathbb{R}^۲$ می‌توان به هرنقطه از $\mathbb{R}^۳$ ، برداری که از مبدأ شروع می‌شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نقطه‌ای غیر از مبدأ $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این‌صورت پاره‌خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی $O=(۰,۰,۰)$ شروع شده و در نقطه A پایان می‌یابد یک بردار در $\mathbb{R}^۳$ را مشخص می‌کند و آن را با $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نشان می‌دهیم. در بردار $\vec{a}$ مقادیر $a_۱$ ، $a_۲$ و $a_۳$ را مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ می‌گویند. همچنین قرارداد می‌کنیم که مبدأ مختصات یعنی $O=(۰,۰,۰)$ نمایشگر بردار $\vec{O}=(۰,۰,۰)$ است که بردار صفر نامیده می‌شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در $\mathbb{R}^۳$ نمایش داده شده است.



طول بردار در $\mathbb{R}^۳$

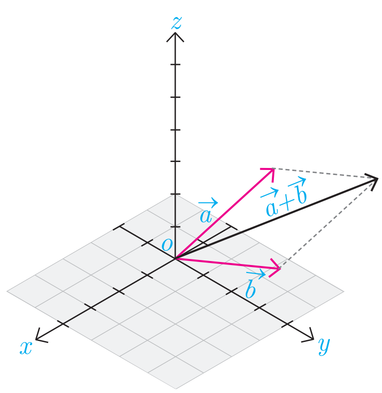
با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از $\mathbb{R}^۳$، طول هر بردار مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ در $\mathbb{R}^۳$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

حاصل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^۳$

حاصل‌جمع دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که به آن بردار برایند نیز می‌گویند.

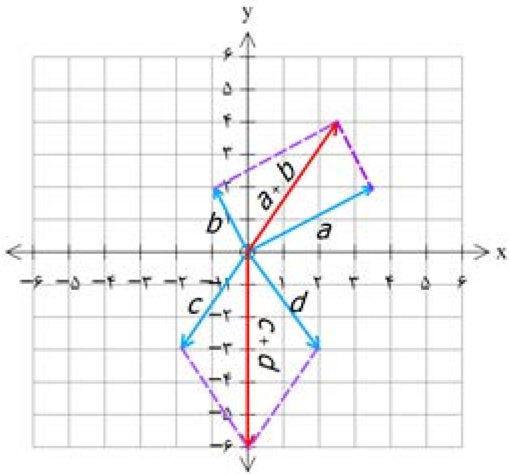
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$$



این شکل بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ را در دستگاه $\mathbb{R}^۳$ نشان می‌دهد.

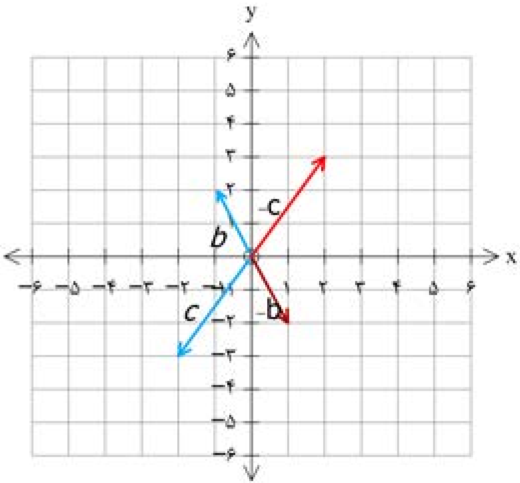
همان‌طور که از شکل روبه‌رو پیداست برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$ می‌توان روش متوازی‌الاضلاع را در صفحه‌ای که از آن دو بردار می‌گذرد به‌کار برد و بردار برایند $\vec{a}+\vec{b}$ را یافت.

کاردرکلاس صفحه ۷۳ الف



$$\vec{a}+\vec{b}=(۳/۵,۲)+(-۱,۲)=(۲/۵,۴)$$

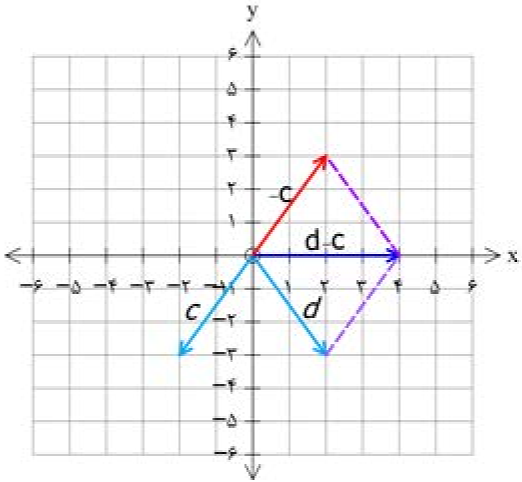
ب

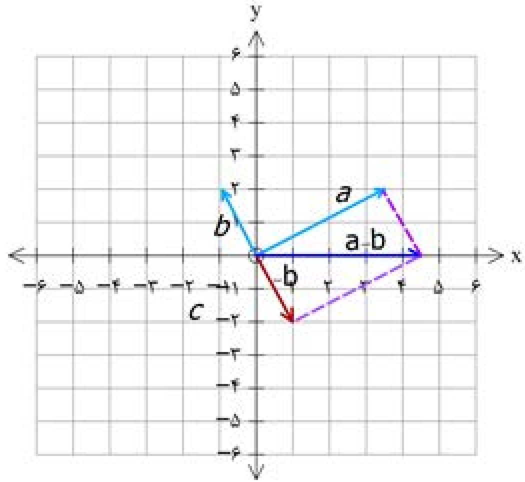


$$\vec{c}=(-۲,-۳)\Rightarrow -\vec{c}=(+۲,+۳)$$

$$\vec{b}=(-۱,+۲)\Rightarrow -\vec{b}=(+۱,-۲)$$

ج)





$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\left(۳/۵,۲\right)+\left(۱,-۲\right)=\left(۴/۵,۰\right)\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=۴/۵$$

$$\vec{d}-\vec{c}=\vec{a}+\left(-\vec{c}\right)=\left(+۲,-۳\right)+\left(+۲,+۳\right)=\left(۴,۰\right)\Rightarrow\left|\vec{d}-\vec{c}\right|=۴$$

و)

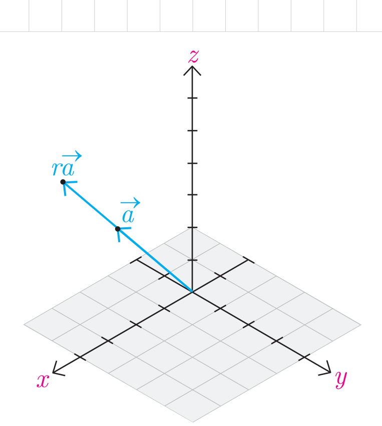
$$\vec{a}=(۳/۵,۲)=۳/۵\vec{i}+۲\vec{j} \qquad \vec{b}=(-۱,۲)=-\vec{i}+۲\vec{j} \qquad \vec{c}=(-۲,-۳)=-۲\vec{i}-۳\vec{j}$$

$$\vec{d}=(+۲,-۳)=۲\vec{i}-۳\vec{j} \qquad \vec{a}+\vec{b}=(۲/۵,۴)=۲/۵\vec{i}+۴\vec{j} \qquad \vec{a}-\vec{b}=(۴/۵,۰)=۴/۵\vec{i}$$

$$\vec{d}-\vec{c}=(۴,۰)=۴\vec{i}$$

برای هر عدد حقیقی r، حاصل‌ضرب r در بردار $\vec{a}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند.

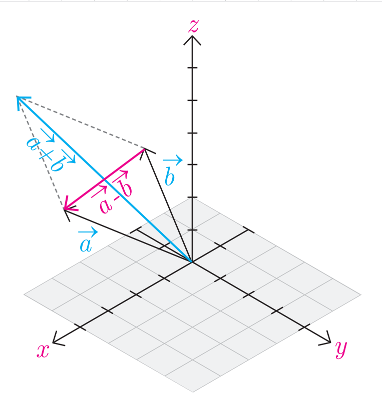
$r\vec{a}=r(a_۱,a_۲,a_۳)$



این شکل دو بردار $\vec{a},r\vec{a}$ که در آن $r>۱$ را نشان می‌دهد.
آیا راستای $\vec{a},r\vec{a}$ با هم متفاوت‌اند؟

به‌طور خاص بردار $-۱\vec{a}$ را که با $-\vec{a}$ نشان می‌دهند قرینه $\vec{a}$ می‌گویند یعنی $-\vec{a}=(-a_۱,a_۲,a_۳)$. این بردار هم اندازه با $\vec{a}$ (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می‌باشد. اکنون تفاضل بردار $\vec{b}$ از $\vec{a}$ یعنی $\vec{a}-\vec{b}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

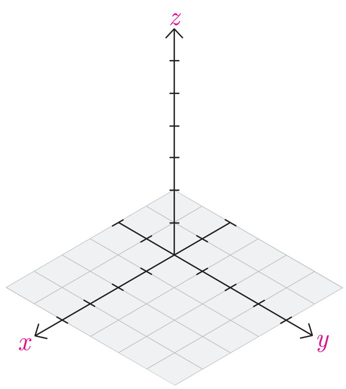
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲,a_۳-b_۳)$

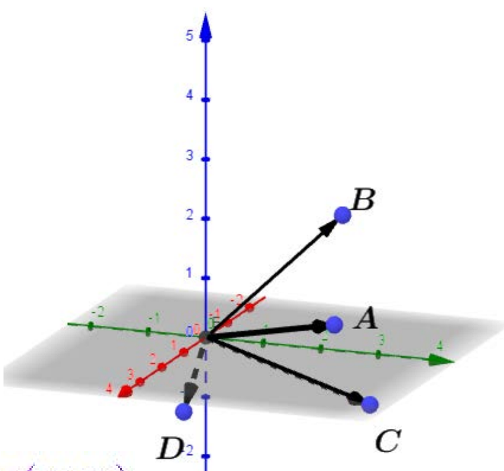


در شکل بردارهای $\vec{a},\vec{b}$ و قرینه آن و نیز $\vec{a}-\vec{b}$ نمایش داده شده‌اند.

کاردرکلاس

نقاط $A=(۲,۳,۱)$, $B=(-۱,۲,۲)$ و $C=(۳,۴,۰)$ و $D=(۱,۰,-۱)$ را در یک دستگاه $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید، اگر $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^۳$ با نقاط انتهایی به ترتیب A,B,C,D باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را به‌دست آورید.





$\vec{a}+۲\vec{b}=(۲,۳,۱)+(-۲,۴,۴)=(۰,۷,۵)$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(۲,۳,۱)+[(-۱,۲,۲)+(۳,۴,۰)]=(۲,۳,۱)+(۲,۶,۲)=(۴,۹,۳)$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=[(۲,۳,۱)+(-۱,۲,۲)]+(۳,۴,۰)=(۱,۵,۳)+(۳,۴,۰)=(۴,۹,۳)$

$-۲(\vec{b}+\vec{c})=-۲[(-۱,۲,۲)+(۳,۴,۰)]=-۲(۲,۶,۲)=(-۴,-۱۲,-۴)$

$-۲\vec{b}-۲\vec{c}=-۲(-۱,۲,۲)-۲(۳,۴,۰)=(۲,-۴,-۴)+(-۶,-۸,۰)=(-۴,-۱۲,-۴)$

خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم.
به‌طور کلی اگر $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{O}=(۰,۰,۰)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

۱ــ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)

۲ــ $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (خاصیت شرکت‌پذیری در جمع)

۳ــ $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{O}$ (عضو قرینه)

۴ــ $\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a}$ (عضو خنثی)

۵ــ $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۶ــ $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷ــ $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

۸ــ اگر $\vec{b}=r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}|=|r||\vec{a}|$ ($|r|$ قدر مطلق r است)

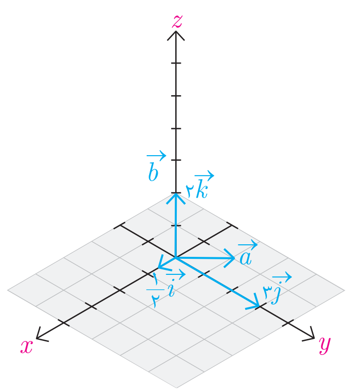
بردارهای یکه

با بردارهای یکه $\vec{i},\vec{j}$ در صفحه $\mathbb{R}^۲$ به ترتیب در جهت محور xها و yها آشنا شدید.
به‌طور مشابه در $\mathbb{R}^۳$ بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات $\mathbb{R}^۳$ در نظر می‌گیرند.

$$\vec{i}=(۱,۰,۰),\ \vec{j}=(۰,۱,۰),\ \vec{k}=(۰,۰,۱)$$

به این ترتیب $\vec{i}$ بردار یکه در جهت محور طول‌ها، $\vec{j}$ بردار یکه در جهت محور عرض‌ها و $\vec{k}$ بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها می‌باشند.
همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ به‌صورت ترکیبی از بردارهای یکه $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ قابل بیان است. در واقع داریم :

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)=a_۱(۱,۰,۰)+a_۲(۰,۱,۰)+a_۳(۰,۰,۱)=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$



مثال : بردار $\vec{a}=(\frac{۱}{۲},۳,۲)$ را برحسب بردارهای یکه $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ نشان دهید.

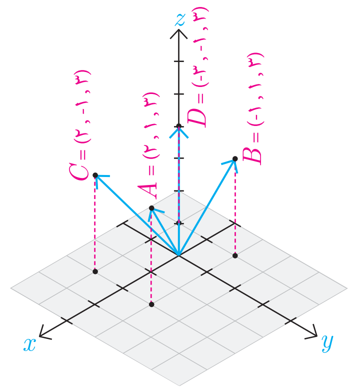
$$\vec{a}=\frac{۱}{۲}\vec{i}+۳\vec{j}+۲\vec{k}$$

تمرین

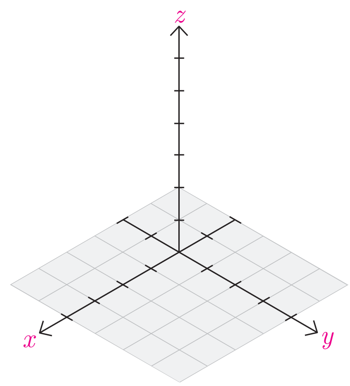
۱ــ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند. ABDC

الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید. ABDC



۲ــ نقاط با مختصات $P=(۱,۰,۱)$، $Q=(۰,-۱,-۲)$، $R=(۳,۰,-۱)$ و $S=(-۲,-۲,-۲)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.



۳ــ در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

۴ــ فرض کنید $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$. مختصات نقطه M وسط پاره‌خط PQ را بیابید.

۵ــ در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{۱}{۳},۰,۲)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{۲},۱,۱)$ ، $r=۳$ ، $r\vec{a}-\vec{b}=?$

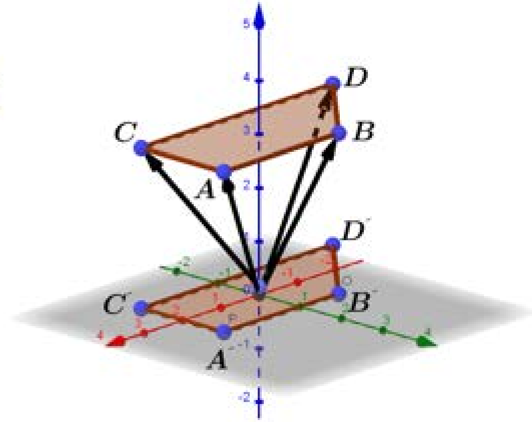
ب) $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ ، $r=-۱$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{۲}\,\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=۳\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{a}+\vec{b}=?$

د) $\vec{a}=۵\vec{k}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$ ، $r=\frac{۱}{۵}$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

۶ــ طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

تمرین ۱:



الف)

$A=(۲,۱,۳)\quad B=(-۱,۱,۳)\quad C=(۲,-۱,۳)\quad D=(-۳,-۱,۳)$

$$AB=\begin{cases}-۱\leq x\leq ۲\\ y=۱\\ z=۳\end{cases}\qquad BD=\begin{cases}-۳\leq x\leq -۱\\ y=x+۲\\ z=۳\end{cases}$$

$$DC=\begin{cases}-۳\leq x\leq ۲\\ y=-۱\\ z=۳\end{cases}\qquad CA:\begin{cases}x=۲\\ -۱\leq y\leq ۱\\ z=۳\end{cases}$$

ب)

$A'=(۲,۱,۰)\quad B'=(-۱,۱,۰)\quad C'=(۲,-۱,۰)\quad D'=(-۳,-۱,۰)$

$$A'B'=\begin{cases}-۱\leq x\leq ۲\\ y=۱\\ z=۰\end{cases}\qquad B'D'=\begin{cases}-۳\leq x\leq -۱\\ y=x+۲\\ z=۰\end{cases}$$

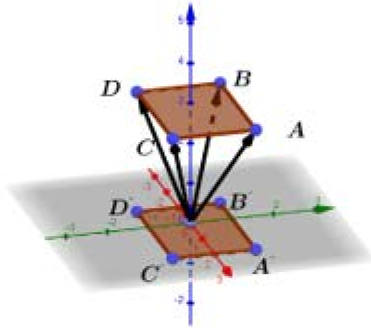
$$D'C'=\begin{cases}-۳\leq x\leq ۲\\ y=-۱\\ z=۰\end{cases}\qquad C'A':\begin{cases}x=۲\\ -۱\leq y\leq ۱\\ z=۰\end{cases}$$

پاسخ تمرین ۱ اگرمختصات نقطه D را تغییر دهیم یعنی به صورت $D=(-۱,-۱,۳)$ باشد

$$A=(۲,۱,۳)\quad B=(-۱,۱,۳)\quad C=(۲,-۱,۳)\quad D=(-۱,-۱,۳)$$

$$AB=\begin{cases}-۱\le x\le ۲\\ y=۱\\ z=۳\end{cases}\quad BD=\begin{cases}x=-۱\\ -۱\le y\le ۱\\ z=۳\end{cases}$$

$$CD=\begin{cases}-۱\le x\le ۲\\ y=-۱\\ z=۳\end{cases}\quad AC:\begin{cases}x=۲\\ -۱\le y\le ۱\\ z=۳\end{cases}\Rightarrow ABCD=\begin{cases}-۱\le x\le ۲\\ -۱\le y\le ۱\\ z=۳\end{cases}$$

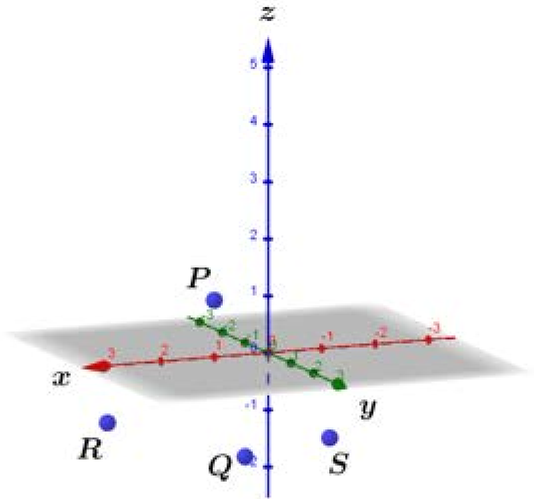


$$A'=(۲,۱,۰)\quad B'=(-۱,۱,۰)\quad C'=(۲,-۱,۰)\quad D'=(-۱,-۱,۰)$$

$$A'B'=\begin{cases}-۱\le x\le ۲\\ y=۱\\ z=۰\end{cases}\quad B'D'=\begin{cases}x=-۱\\ -۱\le y\le ۱\\ z=۰\end{cases}$$

$$C'D'=\begin{cases}-۱\le x\le ۲\\ y=-۱\\ z=۰\end{cases}\quad A'C':\begin{cases}x=۲\\ -۱\le y\le ۱\\ z=۰\end{cases}\Rightarrow A'B'C'D'=\begin{cases}-۱\le x\le ۲\\ -۱\le y\le ۱\\ z=۰\end{cases}$$

تمرین ۲:



تمرین ۳:

$$PQ=\sqrt{(x_Q-x_P)^{۲}+(y_Q-y_P)^{۲}+(z_Q-z_p)^{۲}}=\sqrt{(۰-۱)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}+(-۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۱+۱+۹}=\sqrt{۱۱}$$

$$RQ=\sqrt{(x_Q-x_R)^{۲}+(y_Q-y_R)^{۲}+(z_Q-z_R)^{۲}}=\sqrt{(۰-۳)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}+(-۲+۱)^{۲}}=\sqrt{۹+۱+۱}=\sqrt{۱۱}$$

$$PS=\sqrt{(x_S-x_P)^{۲}+(y_S-y_P)^{۲}+(z_S-z_p)^{۲}}=\sqrt{(-۲-۱)^{۲}+(-۲-۰)^{۲}+(-۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۹+۴+۹}=\sqrt{۲۲}$$

تمرین ۴:

$$x_M=\frac{x_P+x_Q}{۲},\ y_M=\frac{y_P+y_Q}{۲},\ z_M=\frac{z_P+z_Q}{۲}\Rightarrow M=\left(\frac{x_P+x_Q}{۲},\frac{y_P+y_Q}{۲},\frac{z_P+z_Q}{۲}\right)$$

تمرین ۵: الف) $r\vec{a}-\vec{b}=۳\left(\frac{-۱}{۳},۰,۲\right)-\left(\sqrt{۲},۱,۱\right)=\left(-۱,۰,۶\right)-\left(\sqrt{۲},۱,۱\right)=\left(\sqrt{۲}-۱,-۱,۵\right)$

ب) $r\vec{a}+\vec{b}=-۱(۳,۲,-۱)+(۳,۱,-۱)=(-۳,-۲,۱)+(۳,۱,-۱)=(۰,-۱,۰)$

ج) $\vec{a}+\vec{b}=\left(\sqrt{۲},۰,-۱\right)+(۰,۳,۱)=\left(\sqrt{۲},۳,۰\right)$

د) $r\vec{a}+\vec{b}=\frac{۱}{۵}(۰,۱,۵)+(۱,۰,-۱)=\left(۰,\frac{۱}{۵},۱\right)+(۱,۰,-۱)=\left(۱,\frac{۱}{۵},۰\right)$

تمرین ۶: الف)

$$\vec{a}=\left(\frac{-1}{3},0,2\right)\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}+0^{2}+2^{2}}=\sqrt{\frac{1+36}{9}}=\sqrt{\frac{37}{9}}=\frac{\sqrt{37}}{3}$$

ب)

$$\vec{a}=(3,2,-1)\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^{2}+2^{2}+(-1)^{2}}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

ج)

$$\vec{a}=\left(\sqrt{2},0,-1\right)\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^{2}+0^{2}+(-1)^{2}}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

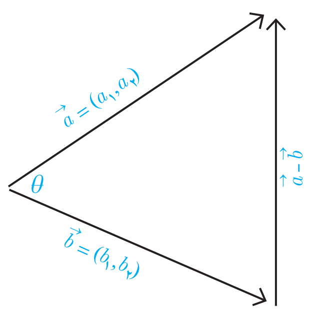
د)

$$\vec{a}=(0,1,5)\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{0^{2}+1^{2}+5^{2}}=\sqrt{0+1+25}=\sqrt{26}$$

درس دوم

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

فرض کنید دوبردار $\vec{a}=(a_1,a_2)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2)$ همانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار (θ) را پیدا کنیم.



برای این منظور بردار تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلثی به طول اضلاع زیر به‌دست آید.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به‌صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)=\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2)=a_1b_1+a_2b_2$$

پس عبارت (۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $0 \le \theta \le \pi$ به‌دست می‌آید.

کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می‌دهند و به آن حاصل‌ضرب داخلی یا حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ می‌گویند. بنابراین می‌توان نوشت.

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

به‌طور مشابه حاصل‌ضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^3$ نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند؛ در این‌صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می‌توان نشان داد که اگر $0 \le \theta \le \pi$ زاویه بین دو بردار ناصفر $\vec{a},\vec{b}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دوبردار $\vec{a},\vec{b}$ صفر باشند آنگاه $\vec{a}.\vec{b}=0$ هر چند که در این حالت زاویه θ بین دو بردار تعریف نمی‌شود.

مثال : زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را پیدا می‌کنیم.

حل : ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{a}.\vec{b}=(2\times1)+(-1\times-1)+(2\times0)=3$$

از طرفی اگر $0 \le \theta \le \pi$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت :

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow 3=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

خواص ضرب داخلی

۱ــ $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ خاصیت جابه‌جایی

اثبات : $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\vec{b}.\vec{a}$

۲ــ $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$

اثبات : $\vec{a}.\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2$

۳ــ $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ خاصیت شرکت‌پذیری

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$$
$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$$
$$=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}$$

۴ــ برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$: a و b برهم عمود هستند $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

$$\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0 \underset{|\vec{b}|\neq 0}{\overset{|\vec{a}|\neq 0}{\Leftrightarrow}} \cos\theta=0 \overset{0\le\theta\le\pi}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{\pi}{2}$$

۵ــ $\vec{a}.\vec{o}=0\ ,\ \vec{o}.\vec{a}=0$

۶ــ $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز) منظور از $|\vec{a}.\vec{b}|$ قدر مطلق مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ است.

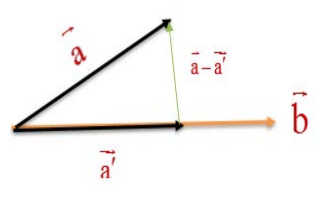
$$|\vec{a}.\vec{b}|=\Big||\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Big|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از $|\cos\theta|\le 1$ استفاده شده است.

$$|(a_1,a_2,a_3).(b_1,b_2,b_3)|$$
$$=|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$
$$\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$
$$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

دو بردار غیرصفر $\vec{a},\vec{b}$ را که زاویه بین آنها θ است با فرض $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a}'$ نمایش داده‌ایم به‌دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a}'=r\vec{b}$.



با توجه به اینکه بردار تفاضل $\vec{a}$ از $\vec{a}'$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. خواهیم داشت :

$$(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=0 \Rightarrow (\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}-r\vec{b}.\vec{b}=0 \Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

بنابراین بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\vec{a}'=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{2}}\vec{b}$$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(1,-1,0)$ بیابید.

$$\vec{a}.\vec{b}=2\times1+(-1)(-1)+(2)(0)=3$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(1)^{2}+(-1)^{2}+0^{2}}=\sqrt{2}$$

$$a'=\frac{a.b}{|b|^{2}}b=\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}(1,-1,0)=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0)$$

کاردرکلاس

۱ــ تصویر بردار $\vec{i}=(1,0,0)$ بر امتداد بردار $\vec{j}=(0,1,0)$ را بیابید.

$$\vec{i}.\vec{j}=1\times0+0\times1+0\times0=0 \quad \vec{j}^{2}=0^{2}+1^{2}+0^{2}=1$$

$$P_{\vec{j}}\vec{i}=\frac{\vec{i}.\vec{j}}{\vec{j}^{2}}\vec{j}=\frac{0}{1}(0,1,0)=(0,0,0)=\vec{0}$$

۲ــ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می‌شود.

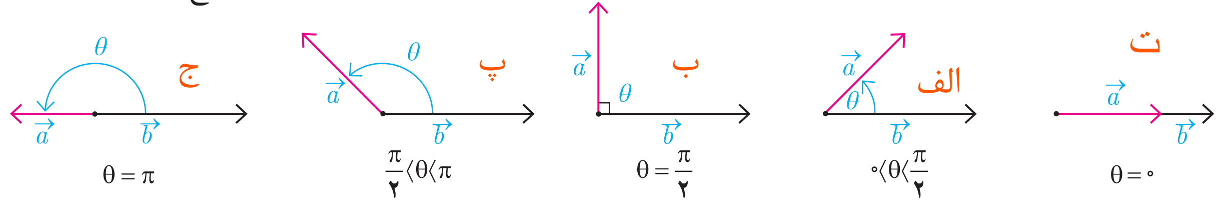
$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^{\circ}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$$

$$P_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{2}}\vec{b}=\frac{0}{|\vec{b}|^{2}}\vec{b}=0(b_{1},b_{2},b_{3})=\vec{0}$$

۳ــ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۴ــ هر یک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $\vec{a}.\vec{b}>0$ ب) $\vec{a}.\vec{b}=0$ پ) $\vec{a}.\vec{b}<0$ ت) $\vec{a}.\vec{b}=|a||b|$ ج) $\vec{a}.\vec{b}=-|a||b|$



الف) هرگاه a,b موازی وهم جهت باشند پس $\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \times 1 = |\vec{a}||\vec{b}|$$

$$P_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = |\vec{a}|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \xrightarrow{\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=1} P_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| = \vec{a}$$

بردار $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برداری به طول ۱ می باشد که هم جهت با $\vec{b}$ است

ب) هرگاه a,b موازی ودرخلاف جهت هم باشند پس $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \times (-1) = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$P_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{-|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = |\vec{a}|\frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|} \xrightarrow{\frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}=1} P_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| = \vec{a}$$

بردار $\frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$ برداری به طول ۱ می باشد که درخلاف جهت با $\vec{b}$ است

ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل‌ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف: فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند.
ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

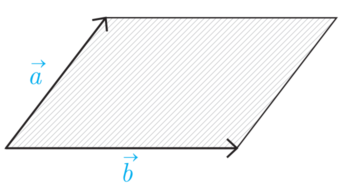
$$=(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد
اندازه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ می‌شود:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1)|^2$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_1^2b_3^2-2a_1a_3b_1b_3+$$
$$a_3^2b_1^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_3)^2=|a|^2|b|^2-(a.b)^2$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=$$
$$(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2$$

بنابراین　$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

از هندسه سال قبل می‌دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ است.



مثال: بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i}\times\vec{j}$ و $\vec{j}\times\vec{i}$ را به‌دست آورید.

$$\vec{i}\times\vec{j}=(1,0,0)\times(0,1,0)$$
$$=((0)(0)-(0)(1),(0)(0)-(1)(0),(1)(1)-(0)(0))=(0,0,1)=\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=(0,1,0)\times(1,0,0)$$
$$=\big((1)(0)-(0)(0),(0)(1)-(0)(0),(0)(0)-(1)(1)\big)=(0,0,-1)=-\vec{k}$$

همان‌طور که مشاهده شد حاصل‌ضرب خارجی دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برابر با بردار $\vec{k}$ شد که بر هر دوی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ عمود می‌باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می‌باشد.

خاصیت ۱ : فرض کنید $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0 \qquad , \qquad \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به‌دست آمده است می‌توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می‌توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است.

اثبات این خاصیت در ادامه می‌آید.

اثبات :

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

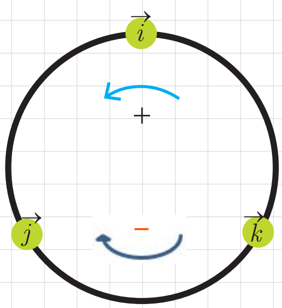
$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

می‌توان نشان داد که برای سه برداری که $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روابط زیر برقرار است :

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ,\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\ ,\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\ ,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به‌صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می‌دهند.



خاصیت ۲ : $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

خاصیت ۳ : $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$.

خاصیت ۴ : اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه : $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$.

خاصیت ۵ : برای سه بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ داریم :

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

خاصیت ۶ : دو بردار غیر صفر $\vec{a},\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

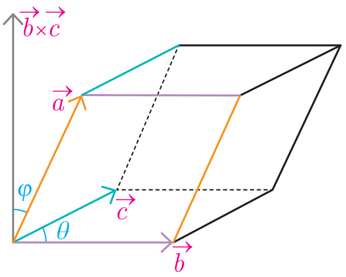
$$|\vec{a}|,|\vec{b}|\neq 0$$

اثبات :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0\Leftrightarrow\sin=0\Leftrightarrow\theta=0 \text{ یا } \theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\|\vec{b}$$

حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می توان به کمک آنها متوازی‌السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.



همان‌طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی‌السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}(\vec{b}\times\vec{c})$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b}\times\vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می‌توان مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ به صورت زیر به دست آورد :

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$$

بهتر است به این شکل نوشته شود

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=\text{مساحت قاعده}\times\text{اندازه ارتفاع}=\ |\vec{b}\times\vec{c}|\left|\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}(\vec{b}\times\vec{c})\right|=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی‌السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی‌السطوح برابر است با $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$. حجم متوازی‌السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ، $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می‌آید.

$$K=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم}=V=|K|$$

یا $K=a.(b\times c)$.

اگر $K=0$ در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ سه بردار در یک صفحه واقعند

مثال : حجم متوازی‌السطوحی را به‌دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{c}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(0,1,1)$ تولید می‌شود.

حل : با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به‌دست می‌آید.

$$\vec{b}\times\vec{c}=(1,1,-1)$$

بنابراین حجم متوازی‌السطوح به‌دست می‌آید.

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|(1,1,0).(1,1,-1)|=|1+1+0|=2$$

پیش‌تر اشاره شد که اگر سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح و نیز $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

(۱,۹,-۱۱)

مثال : آیا بردارهای $\vec{a}=(۲,۳,-۱), \vec{b}=(۱,-۱,۳), \vec{c}=(۱,۹,-۱)$ در یک صفحه‌اند؟

حل : برای این منظور کافی است $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را به‌دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی‌السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$\vec{b}\times\vec{c}=(-۱۶,۱۴,۱۰) \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-۳۲+۴۲-۱۰=۰ \Rightarrow$ سه بردار در یک صفحه هستند.

تمرین

۱ــ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ ، $\vec{b}=i$

ب) $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ ، $\vec{\ }=(۳,۲,۱)$

ج) $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,۴)$

۲ــ فرض کنید $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=۰$ را محاسبه کنید.

۳ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۴ــ اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$, $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

۵ــ برداری عمود بر دو $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$, $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ بردار پیدا کنید.

۶ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷ــ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}|=۳$ ، $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$. مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

C B

۸ــ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(۳,۵,۷)$, $b=(۵,۵,۰)$, $A=(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

تمرین۱: الف)

$$\begin{matrix}\vec{a}=(2,-1,2)\\ \vec{b}=(1,0,0)\end{matrix}\xrightarrow[\vec{b}^2=1^2+0^2+0^2=1]{\vec{a}.\vec{b}=2\times 1+(-1)\times 0+2\times 0=2}P_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{2}{1}(1,0,0)=(2,0,0)$$

ب)

$$\begin{matrix}\vec{a}=(2,3,1)\\ \vec{b}=(3,2,1)\end{matrix}\xrightarrow[\vec{b}^2=3^2+2^2+1^2=14]{\vec{a}.\vec{b}=2\times 3+3\times 2+1\times 1=13}P_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{13}{14}(3,2,1)=\left(\frac{39}{14},\frac{13}{7},\frac{13}{14}\right)$$

ج)

$$\begin{matrix}\vec{a}=(1,1,0)\\ \vec{b}=(-1,2,4)\end{matrix}\xrightarrow[\vec{b}^2=(-1)^2+2^2+4^2=21]{\vec{a}.\vec{b}=2\times(-1)+1\times 2+0\times 4=1}P_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{1}{21}(-1,2,4)=\left(\frac{-1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21}\right)$$

تمرین ۲) روش اول

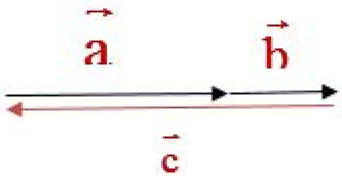
$$|\vec{a}| = 2 ,\ |\vec{b}| = 1 ,\ |\vec{c}| = 3$$

$$\left.\begin{array}{l}
\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \xrightarrow{(.\vec{a})} \vec{a}^{2}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=\vec{0} \\
\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \xrightarrow{(.\vec{b})} \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^{2}+\vec{b}.\vec{c}=\vec{0} \\
\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0} \xrightarrow{(.\vec{c})} \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}^{2}=\vec{0}
\end{array}\right\} \vec{a}^{2}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^{2}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}^{2}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}+\vec{c}^{2}+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{a}.\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \underbrace{2^{2}+1^{2}+3^{2}}_{14}+2\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}\right)=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=-7$$

روش دوم تمرین ۲:

$$\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 1,\ \left|\vec{c}\right| = 3$$



$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 0 = 2\times 1\times 1 = 2$$

$$\Rightarrow \vec{b}.\vec{c} = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos \pi = 1\times 3\times(-1) = -3 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c} = 2 + (-3) + (-6) = -7$$

$$\vec{a}.\vec{c} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos \pi = 2\times 3\times(-1) = -6$$

روش سوم تمرین ۲:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{o}.\vec{o} \Rightarrow \vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{c} = \vec{o}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{a}.\vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \underbrace{2^2 + 1^2 + 3^2}_{14} + 2\left(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c}\right) = \vec{o} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{c} = -7$$

تمرین ۳:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}&=\vec{i}\\ \vec{b}&=\vec{j}\\ \vec{c}&=\vec{k}\end{aligned}\right\}\quad \underbrace{\vec{i}.\vec{j}}_{\circ}=\underbrace{\vec{i}.\vec{k}}_{\circ}\not\Rightarrow \vec{j}=\vec{k}$$

تمرین ۴:

$$\vec{m}=\vec{b}+\vec{c}=(۳-۱,-۴+۱,۲+۴)=(۲,-۳,۶)$$

$$\vec{m}.\vec{a}=(۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۴)(۶)=۲+۹+۲۴=۳۵$$

$$|\vec{m}|^{۲}=۲^{۲}+(-۳)^{۲}+۶^{۲}=۴+۹+۳۶=۴۹$$

$$P_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}=P_{\vec{m}}\vec{a}=\frac{\vec{m}.\vec{a}}{|\vec{m}|^{۲}}\vec{m}=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۵}{۷}(۲,-۳,۶)=\left(\frac{۱۰}{۷},-\frac{۱۵}{۷},\frac{۳۰}{۷}\right)$$

تمرین ۵:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۳ & ۲ \\ -۲ & ۱ & -۵ \end{vmatrix}=۱۳\vec{i}+۱\vec{j}-۵\vec{k}\Rightarrow\vec{c}=(۱۳,۱,-۵),\vec{c}\perp\vec{b},\vec{c}\perp\vec{a}$$

تمرین ۶:

$$\vec{a}=(۱,۱,۱)\quad\vec{b}=(۲,۲,۲)\quad\vec{c}=(۳,۳,۳)$$

$$\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{o}}=\underbrace{\vec{a}\times\vec{c}}_{\vec{o}}=\vec{o}\not\Rightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

با توجه به مثال نقض بالا ،قاعده حذف همواره برقرار نیست

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{o}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}-\vec{c}\right|\sin\theta=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اگر بخواهیم } \vec{b}=\vec{c} \text{ در نظر بگیریم}}\begin{cases}\left|\vec{a}\right|\neq۰\\ \sin\theta\neq۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}\neq\vec{o}\\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}-\vec{c}\end{cases}$$

تمرین ۷:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow ۷۲ = ۳\times ۲۶\times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۷۲}{۸۴} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\theta = ۱-\sin^۲\theta = ۱-\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۳\times ۲۶\times\left(\pm\frac{۵}{۱۳}\right) = \pm ۳۰$$

تمرین ۸:

$$\overrightarrow{AB} = (۲,۰,-۷) \qquad \overrightarrow{AC} = (-۷,-۵,-۳)$$

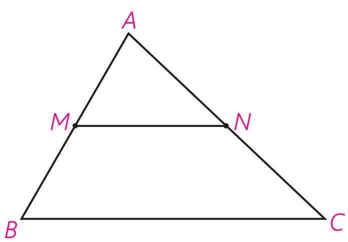
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۰ & -۷ \\ -۷ & -۵ & -۳ \end{vmatrix} = -۳۵i + ۵۵j - ۱۰k \Rightarrow |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-۳۵)^۲ + ۵۵^۲ + (-۱۰)^۲} = \sqrt{۴۳۵۰}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{۱}{۲}\times\sqrt{۴۳۵۰} = \frac{۵\sqrt{۱۷۴}}{۲}$$

در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال‌های گذشته با آنها آشنا شده‌اید می‌توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت‌تر می‌کنند. در ادامه چند مثال از این‌گونه مسائل آورده شده است که مطالعهٔ آنها به علاقه‌مندان پیشنهاد می‌گردد.

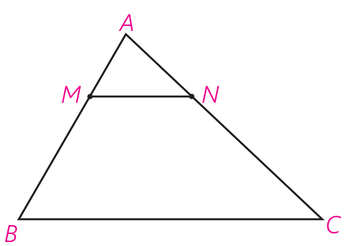
مثال ۱ : ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

اثبات :



$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$
$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$
$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$
$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$$

پس طول BC دو برابر طول MN است و چون $\overrightarrow{BC}$ مضربی از $\overrightarrow{MN}$ است لذا BC موازی MN است.



مثال ۲ : در مثلث ABC، $MN \| BC$ ثابت کنید :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

(قضیهٔ تالس)

اثبات : فرض کنیم $BA=K.MA$ و $AC=K'.AN$ و $BC=K''.MN$

بنابراین :

$$\overrightarrow{BA}=K.\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{AC}=K'.\overrightarrow{AN}\ ,\ \overrightarrow{BC}=K''.\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MN}\ ,\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow$$

$$K.\overrightarrow{MA}+K'.\overrightarrow{AN}=K''.\overrightarrow{MN}=K''(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})=$$

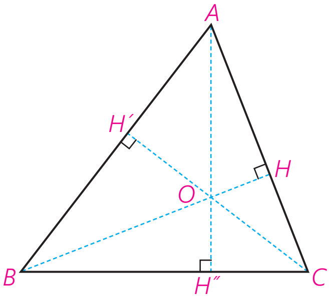
$$K''.\overrightarrow{MA}+K''.\overrightarrow{AN}\Rightarrow(K-K'')\overrightarrow{MA}+(K'-K'').\overrightarrow{AN}=\vec{0}$$

ولی $a\overrightarrow{MA}$ و $b\overrightarrow{AN}$ بردارهایی در راستا و جهت‌های مختلف‌اند، پس مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود مگر آنکه :

$$K-K''=K'-K''=0$$

و در نتیجه : $K=K'=K''$ و از آنجا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۳ : ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه همرس‌اند.



اثبات : فرض کنیم ارتفاع‌های BH و CH' همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند.

در این صورت داریم :

$$BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0,\ \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{CH'}.\overrightarrow{AB}=0,\ \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}=0$$

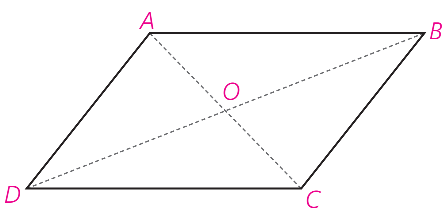
$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$$

$$=(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AC}}_{0}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$$

$$-\underbrace{\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0$$

بنابراین $AO \perp BC$ و لذا امتداد AO هم بر BC عمود است و ارتفاع رأس A هم از O می‌گذرد.

مثال ۴ : ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



اثبات : در شکل مقابل، با فرض اینکه $AB = CD$ و $AB \parallel CD$ نتیجه می‌شود :

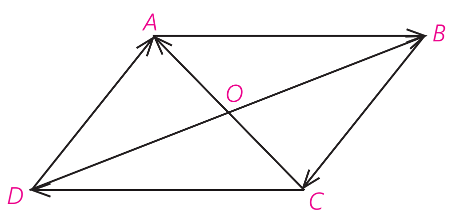
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و در نتیجه :

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$$

و بنابراین : $CB \parallel DA$ و $CB = DA$ و $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۵ : ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

اثبات :



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}\end{array}\right\}+$$

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.