

## درس اول: توابع چند جمله ای، توابع صعودی و نزولی

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه ۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع صعودی و نزولی که یکنوا نیز گفته می شوند، می پردازیم.

### قسمت اول: توابع چند جمله ای

اگر  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_0$  و  $a_1$  و  $a_2$  و ... و  $a_n$  اعداد حقیقی باشند که  $a_n \neq 0$ . در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله ای** از درجه  $n$  می نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

(الف) تابع ثابت

$$f(x) = c$$

تابع چندجمله ای از درجه صفر<sup>۱</sup>

(ب) تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$

تابع چندجمله ای از درجه یک

(ج) تابع درجه ۲ (سهمی)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

تابع چندجمله ای از درجه دو

(د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

تابع چندجمله ای از درجه سه

**مثال:** نشان دهید که تابع زیر یک تابع چند جمله ای است. سپس درجه ی آن را بنویسید.

$$f(x) = x^2(1-x)^3$$

**حل:**

$$f(x) = x^2(1-x)^3 = x^2(1-3x+3x^2-x^3) = x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5$$

این تابع چندجمله ای از درجه ۵ است.

---

1. برای تابع  $f(x) = 0$  درجه تعریف نمی شود.

**توجه :**

۱ : طبق تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی، چندجمله‌ای محسوب نمی‌شوند.

۲ : دامنه‌ی هر تابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. (مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم).

**تمرین ۱ :** تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای است. درجه‌ی توابع چندجمله‌ای را نیز مشخص کنید.

الف)  $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

ت)  $f(x) = |x - 2|$

ب)  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 5x - 1}$

ث)  $f(x) = x(2 + x)(2 - x) + 1$

پ)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$

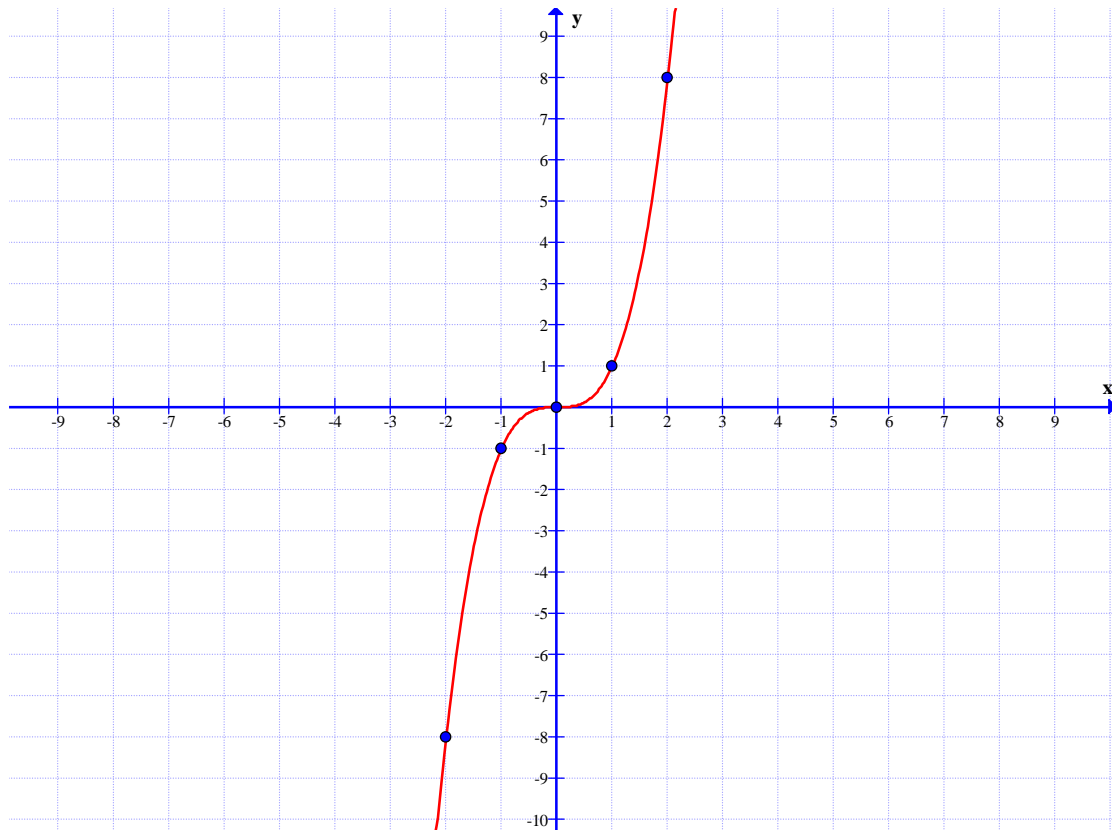
ج)  $f(x) = \sin x$

توجه داشته باشید که از ساده‌ترین تابع چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ به صورت زیر است.

$f(x) = x^3$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است. این نمودار را به سادگی و با نقطه‌یابی می‌توان رسم نمود.

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	-۸	-۱	۰	۱	۸



**تمرین ۲:** نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = x^3$$

**تمرین ۳:** به کمک رسم نمودار تابع  $f(x) = x^3$  و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابع زیر را

رسم کنید.

الف)  $g(x) = (x + 1)^3$

ب)  $h(x) = -x^3 + 1$

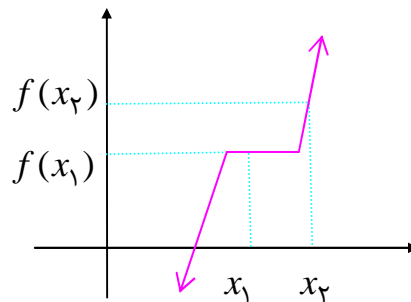
ج)  $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

\*\*\*

قسمت دوم : توابع یکنوا

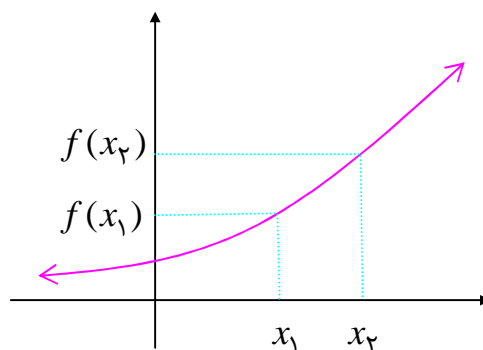
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش صعودی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



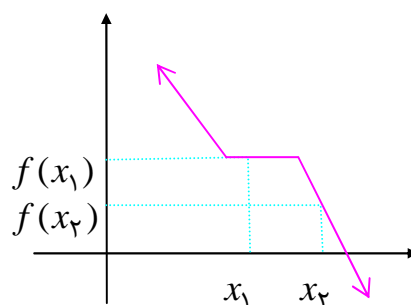
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش صعودی اکیداً (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



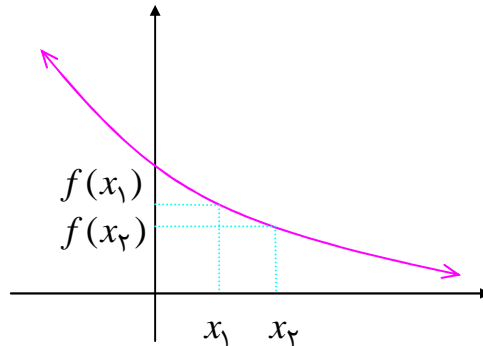
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



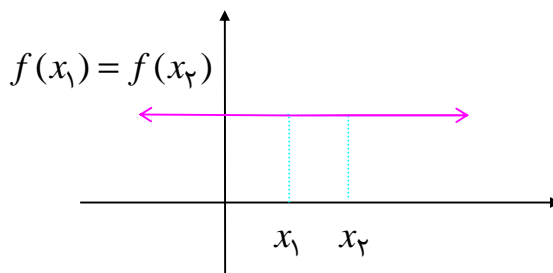
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش ثابت گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



**توجه :**

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع **اکیداً یکنوا** می نامند.

۲ : اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد، را **یکنوا** می نامند.

۳ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است یعنی **یکنوا** است ولی **اکیداً یکنوا** نیست.

۴ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

۵ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند  $I \subseteq D_f$  تعریف نمود.

**تمرین ۴ :** نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب : نزولی یا صعودی بودن تابع در فاصله های زیر را بنویسید.

۱)  $[0, 1]$

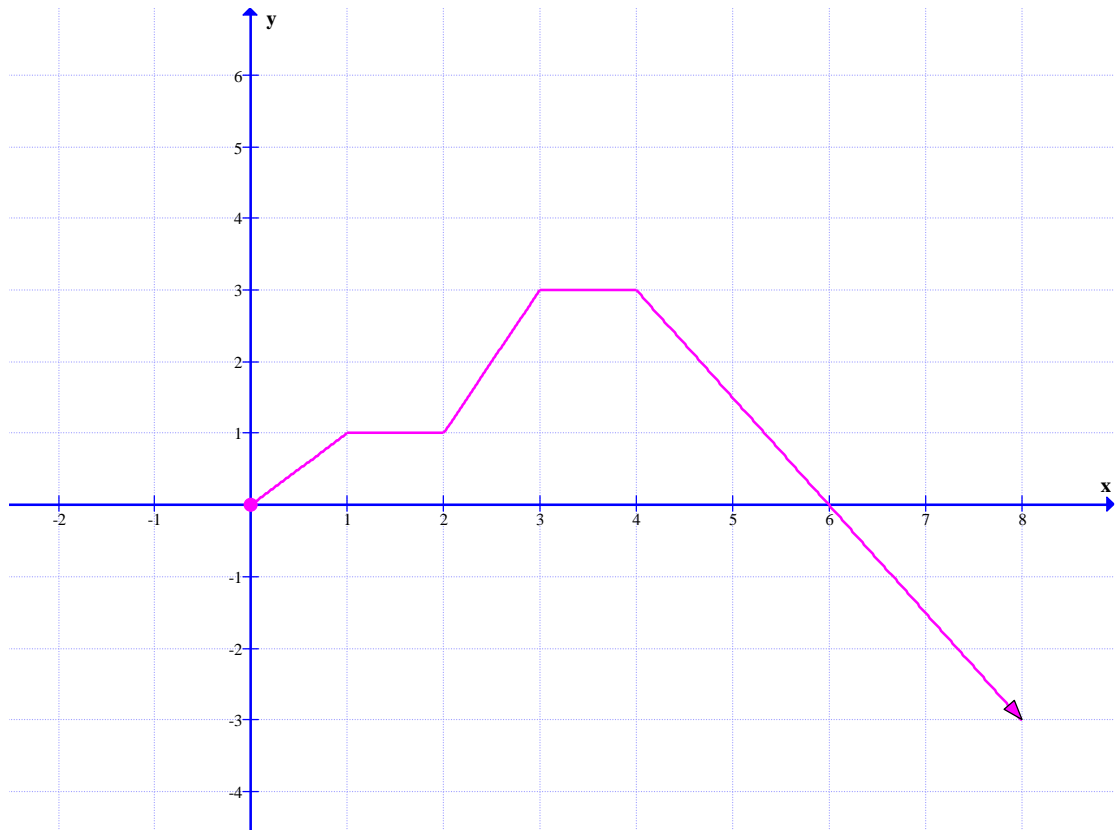
۳)  $[1, 4]$

۵)  $[3, 4]$

۲)  $[1, 2]$

۴)  $[3, 6]$

۶)  $[4, +\infty)$



**تمرین ۵:** صعودی یا نزولی بودن تابع  $f(x) = [x - 1]$  را در دامنه‌اش به کمک تعریف بررسی کنید.

**حل:**

$$f(x) = [x] - 1$$

تابع صعودی است.  $x_1 < x_2 \rightarrow [x_1] \leq [x_2] \rightarrow [x_1] - 1 \leq [x_2] - 1 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow$

**تمرین ۶:** صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کنید.

الف)  $y = 2^{x+1}$

ب)  $y = -3x + 2$

**حل:**

(الف)

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \rightarrow 2^{x_1+1} < 2^{x_2+1} \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$$

تابع صعودی اکید است.

(ب)

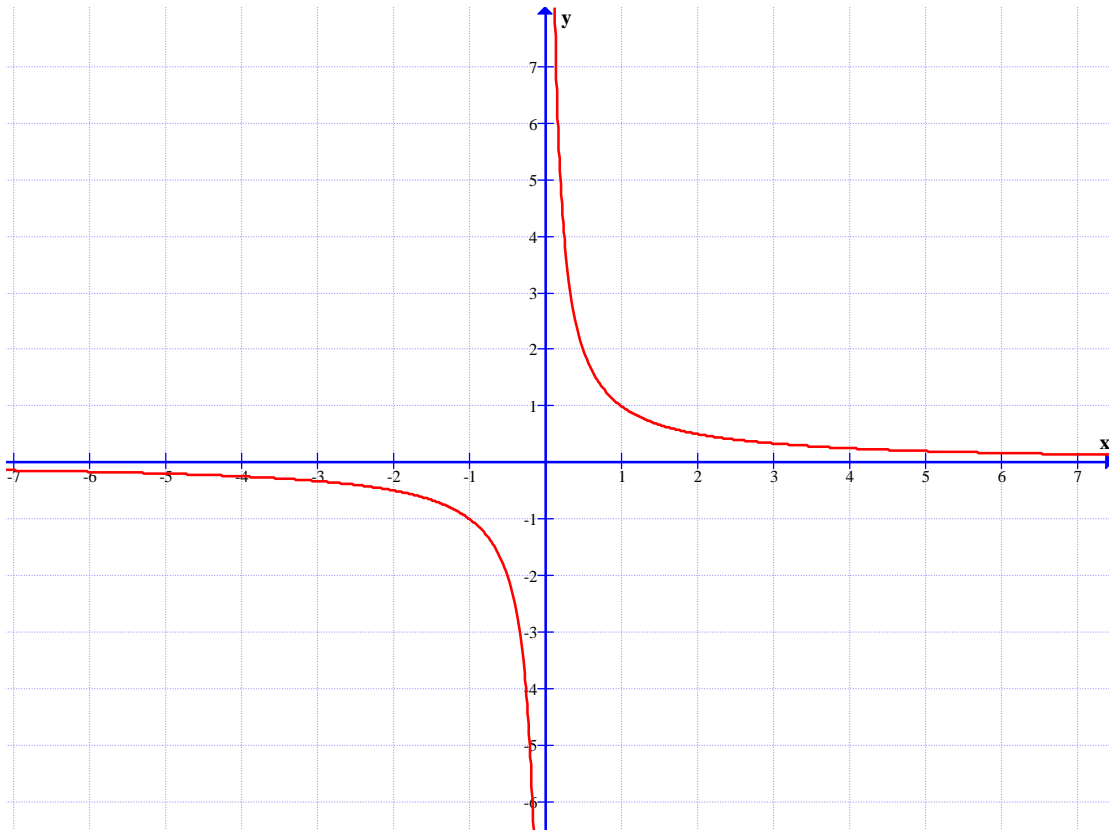
$$x_1 < x_2 \rightarrow -3x_1 > -3x_2 \rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$$

تابع نزولی اکید است.

**توجه :** اگر تابعی در یک فاصله شامل نقاط خارج از دامنه باشد، یکنوایی آن (صعودی و نزولی بودن) آن بررسی نمی شود.

**مثال :** تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نظر بگیرید. واضح است که دامنه‌ی این تابع  $R - \{0\}$  است. همچنین این

تابع نموداری به شکل زیر دارد.



بنابراین:

الف : تابع در فاصله‌ی  $(-\infty, 0)$  نزولی اکید است.

ب : تابع در فاصله‌ی  $(0, +\infty)$  نزولی اکید است.

ج : تابع در فاصله‌ی  $\{0\} - [-1, 1]$  ، نه صعودی و نه نزولی است.

د : صعودی و نزولی بودن تابع در یک فاصله شامل صفر، مثلاً  $[-1, 1]$  بررسی نمی شود.

**تمرین ۷ :** ثابت کنید تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.

**مثال :** تابع  $y = 2^{x+1}$  صعودی اکید و تابع  $y = -3x + 2$  نزولی اکید است لذا یک به یک هستند.

**تذکر:** طبق تعریف توابع یکنوا، برای حالتی که تابع به صورت زوج مرتب یک نمودار آن به صورت نقاط غیر متصل، نمایش داده شده باشد. نیز قابل بررسی است.

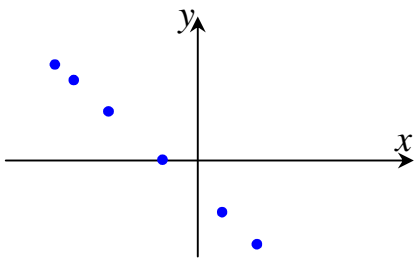
برای مثال:

تابع  $f = \{(1,5), (2,6), (7,9)\}$  یک تابع صعودی اکید است.

تابع  $g = \{(1,5), (2,6), (7,6)\}$  یک تابع صعودی است.

تابع  $h = \{(1,5), (2,6), (4,0)\}$  نه صعودی و نه نزولی است.

تابع زیر یک نیز یک تابع نزولی اکید است.



\*\*\*

### تمرین برای حل:

**۸:** نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله ای صعودی، در

چه فاصله ای نزولی و در چه فاصله ای ثابت است؟

الف)  $f_1(x) = |x + 2| - 3$

ج)  $f_3(x) = \sqrt{1-x}$

ب)  $f_2(x) = -x^2 - 6x + 10$

د)  $f_4(x) = |1+x| + |1-x|$

**۹:** نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید این تابع در چه فاصله ای صعودی و در چه

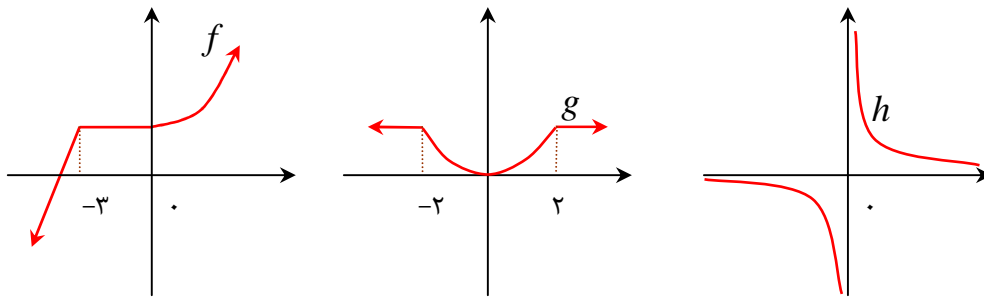
فاصله ای نزولی است و در چه فاصله ای ثابت است؟

الف)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$

ب)  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$



۱۰: نمودار توابع  $f$  و  $g$  و  $h$  در زیر رسم شده اند.



الف) تابع  $f$  در چه فاصله هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله هایی صعودی است؟

ب) تابع  $g$  در چه فاصله هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله هایی نزولی است؟

ج) تابع  $h$  در چه فاصله هایی اکیداً نزولی است؟

۱۱: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. تعیین کنید که کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً

یکنوا است؟

الف)  $f(x) = \sqrt{2-x}$

ب)  $g(x) = 2^{-x}$

ج)  $h(x) = \log_3 x$

۱۲: تابع  $f(x) = (x-2)^3 + 1$  را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع  $f$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^3$  رسم کنید.

ب) نشان دهید که  $f$  وارون پذیر است و نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید.

ج) ضابطه  $f^{-1}$  را به دست آورید.

۱۳: در هر مورد تابعی را بنویسید که شرایط داده شده را دارا باشد و سپس نموداری برای آن رسم کنید.

الف: تابعی که در یک فاصله، هم صعودی و نزولی باشد.

ب: تابعی که در یک فاصله، نه صعودی و نه نزولی باشد.

۱۴:

الف: اگر تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب: اگر تابع  $f$  در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۱۵: اگر توابع  $f$  و  $g$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع  $f + g$  نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای  $f - g$  می توان گفت؟

۱۶: تابع  $f = \{(1,2), (2, m-1), (3, 7-m)\}$  صعودی اکید است، حدود  $m$  را بیابید.

۱۷: مقادیر  $m$  و  $n$  را چنان بیابید که تابع  $f(x) = (x-1)^2 + mx^2 - nx + 3$  هم صعودی و هم نزولی باشد.

۱۸: تابعی مثال بزنید که در دامنه ی خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه ی خود اکیداً نزولی باشد.

۱۹: نمودار تابعی را رسم که در هر یک از فاصله های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد و در  $R$  اکیداً صعودی نباشد.

\*\*\*

تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

@amerimath

کانال تلگرامی:

www.mathtower.ir

سایت:

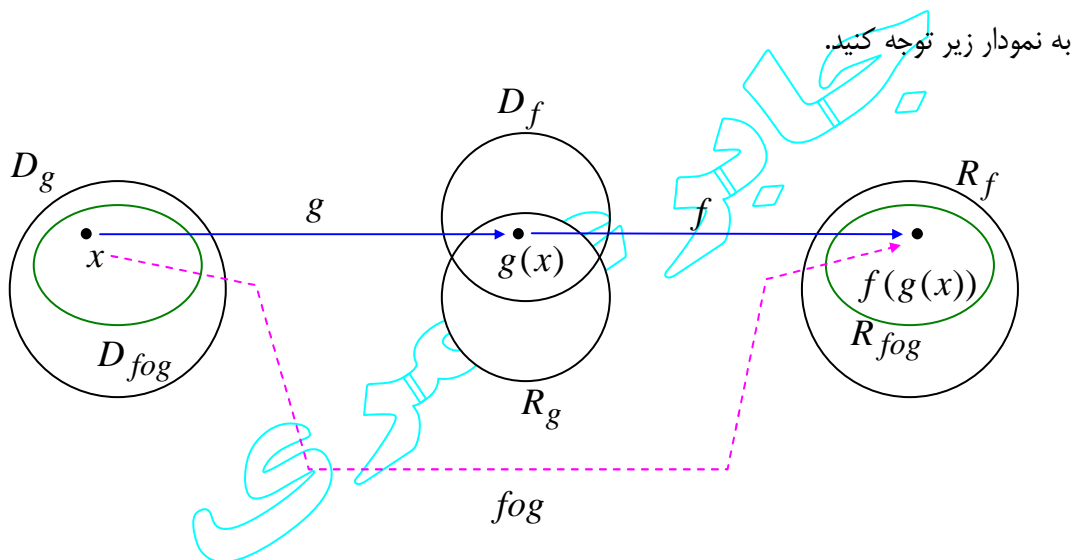
## درس دوم : ترکیب توابع

درسال گذشته با توابع و اعمال روی آنها آشنا شده اید. اکنون می خواهیم ترکیب دو تابع را معرفی کنیم. ترکیب دو تابع یکی از مهمترین عمل روی دو یا چند تابع می باشد.

## ترکیب توابع

هرگاه  $f$  و  $g$  دو تابع باشند، ترکیب تابع  $g$  در  $f$  که به صورت  $f \circ g$  نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



دامنه ی تابع مرکب  $f \circ g$  با توجه به نمودار فوق به شکل زیر مشخص می شود.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

**مثال:** اگر  $f(x) = x^2 + 3x - 1$  و  $g(x) = 2x + 5$  در این صورت تساوی های زیر را کامل کنید.

الف)  $(f \circ g)(x) =$                       ب)  $(g \circ f)(x) =$

حل: کافی است، تعریف تابع مرکب را به دقت بکار ببریم.

الف)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 5) = (2x + 5)^2 + 3(2x + 5) - 1$

$$= 4x^2 + 20x + 25 + 6x + 15 - 1 = 4x^2 + 26x + 39$$

ب)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x - 1) = 2(x^2 + 3x - 1) + 5$

$$= 2x^2 + 6x - 2 + 5 = 2x^2 + 6x + 3$$

**نتیجه:** با توجه به مثال فوق، مشخص می شود که ترکیب دو تابع در حالت کلی، خاصیت جابجایی ندارد.

یعنی:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

**مثال:** اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x + 5$ . ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  را بدست آورید.

حل: ابتدا دامنه‌های توابع  $g$  و  $f$  را تعیین می کنیم.

تابع  $f$  یک تابع اصم است.

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

همچنین تابع  $g$  چند جمله‌ای است پس  $D_g = R$

لذا با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  می توان نوشت:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid (2x + 5) \geq 1\}$$

$$= \{x \in R \mid 2x \geq -4\} = \{x \in R \mid x \geq -2\}$$

اکنون تابع  $f \circ g$  را نیز به صورت زیر تعیین می کنیم.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 5) = \sqrt{(2x + 5) - 1} = \sqrt{2x + 4}$$

**مثال:** اگر  $g(x) = 2x^2 - x + 1$  و  $f(x) = x + 3$ . مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که

$$(f \circ g)(m) = (g \circ f)(m)$$

حل:

$$(f \circ g)(m) = f(g(m)) = f(2m^2 - m + 1) = 2m^2 - m + 4$$

$$(g \circ f)(m) = g(f(m)) = g(m + 3) = 2(m + 3)^2 - (m + 3) + 1 = 2m^2 + 11m + 16$$

$$\Rightarrow 2m^2 - m + 4 = 2m^2 + 11m + 16 \rightarrow m = -1$$

**مثال:** اگر  $f = \{(1,2), (3,7), (4,6), (0,9)\}$  و  $g = \{(-1,5), (8,1), (2,4), (0,0)\}$ ، ابتدا دامنه‌ی تابع

$f \circ g$  را تعیین نموده و سپس این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

حل: با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$$D_f = \{1, 3, 4, 0\} \text{ و } D_g = \{-1, 8, 2, 0\}$$

$x \in D_g$	$g(x)$
-۱	$5 \notin D_f$
۸	$۱ \in D_f$
۲	$۴ \in D_f$
۰	$۰ \in D_f$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{۸, ۲, ۰\}$$

اکنون برای تعیین  $fog$  به شکل زیر عمل می کنیم.

$$(fog)(۸) = f(g(۸)) = f(۱) = ۲ \qquad (fog)(۲) = f(g(۲)) = f(۴) = ۶$$

$$(fog)(۰) = f(g(۰)) = f(۰) = ۹$$

$$\Rightarrow fog = \{(۸, ۲), (۲, ۶), (۰, ۹)\}$$

تمرین برای حل :

۱: اگر  $f = \{(۷, ۸), (۵, ۳), (۹, ۸), (۱۱, ۴)\}$  و  $g = \{(۵, ۷), (۳, ۵), (۷, ۹), (۹, ۱۱)\}$

توابع  $fog$  و  $gof$  را به دست آورید.

۲: با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف)  $(f + g)(۲)$

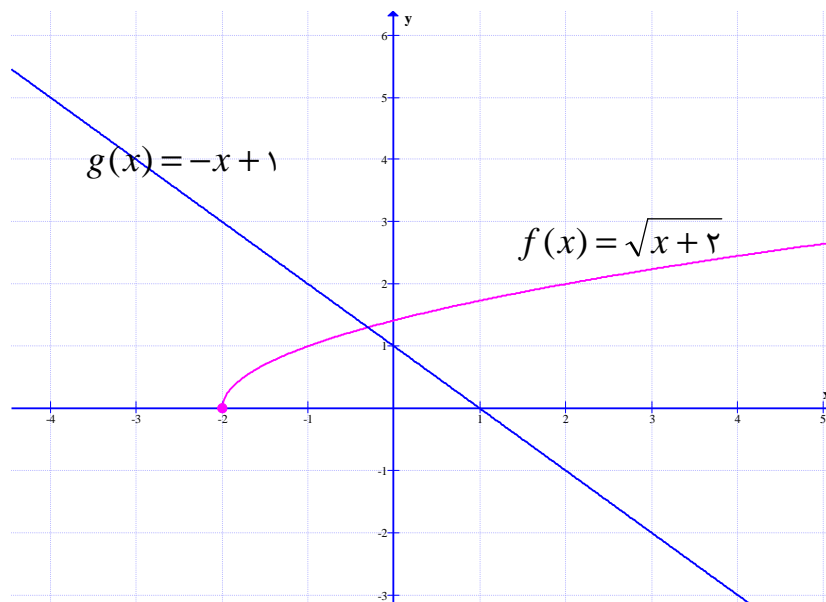
ب)  $(f + g)(-۳)$

پ)  $(f \times g)\left(\frac{۱}{۲}\right)$

ت)  $(fog)(-۴)$

ث)  $\left(\frac{f}{g}\right)(۰)$

ج)  $(gof)(-۱)$



۳: توابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = 2x - 3$  داده شده اند. مطلوب است تعیین:

الف)  $(gof)(x)$

ب)  $D_{fog}$



۱۲: در هر قسمت، موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف)  $f(x) = x^2 - 5$  و  $g(x) = \sqrt{x+6}$  :  $D_{fog}$  و  $(fog)(x)$

ب)  $f(x) = \sqrt{3-2x}$  و  $g(x) = \frac{6}{3x-5}$  :  $D_{fog}$  و  $(fog)(x)$

پ)  $f(x) = \sqrt{x+2}$  و  $g(x) = \sqrt{x^2-16}$  :  $D_{gof}$  و  $(gof)(x)$

ت)  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  :  $D_{gof}$  و  $(gof)(x)$

ث)  $f(x) = 3x$  و  $g(x) = \sqrt{x+6}$  :  $(fog)(10)$

۱۳: با توجه به ضابطه های توابع داده شده، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و سپس ریشه های آنها را در

صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = 2x - 5$  و  $g(x) = x^2 - 3x + 8$  :  $(fog)(x) = 7$

ب)  $f(x) = 3x^2 + x - 1$  و  $g(x) = 1 - 2x$  :  $(fog)(x) = -5$

۱۴: اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = 3x + k$  باشد. مقدار  $k$  را طوری بیابید که

$$(fog)(x) = (gof)(x)$$

۱۵: اگر  $(fog)(x) = 3x^2 - 6x + 14$  و  $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  را به دست آورید.

۱۸۶: در هر مورد دو تابع  $h$  و  $g$  را طوری بنویسید که  $f(x) = (goh)(x)$  باشد.

الف)  $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$       ب)  $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{x+1}{x}\right)$       ج)  $f(x) = x^6 + x^3$

\*\*\*

تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

@amerimath

www.mathtower.ir

کانال تلگرامی:

سایت:

## درس سوم : وارون تابع

در این درس ابتدا مفهوم تابع یک به یک را یادآوری کرده و سپس با وارون تابع آشنا می شویم.

## قسمت اول : تابع یک به یک

هر تابع که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می نامند.

برای مثال:

تابع  $f = \{(1,5), (2,7), (6,0), (-1,9)\}$  یک به یک است.

تابع  $g = \{(1,5), (2,7), (6,0), (-1,5)\}$  یک به یک نیست.

تابع  $h = \{(1,5), (2,7), (6,0), (1,5)\}$  یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله‌ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف)  $f(x) = 3x - 5$

ب)  $g(x) = 4 - x^2$

حل : کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف)  $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \rightarrow 3x_1 = 3x_2 \rightarrow x_1 = x_2$

لذا این تابع یک به یک است.

ب)  $g(x_1) = g(x_2) \rightarrow 4 - (x_1)^2 = 4 - (x_2)^2 \rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \nrightarrow x_1 = x_2$

لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که  $a = b$

$$a^2 = b^2 \nrightarrow a = b \quad \text{و} \quad |a| = |b| \nrightarrow a = b \quad \text{و} \quad [a] = [b] \nrightarrow a = b$$

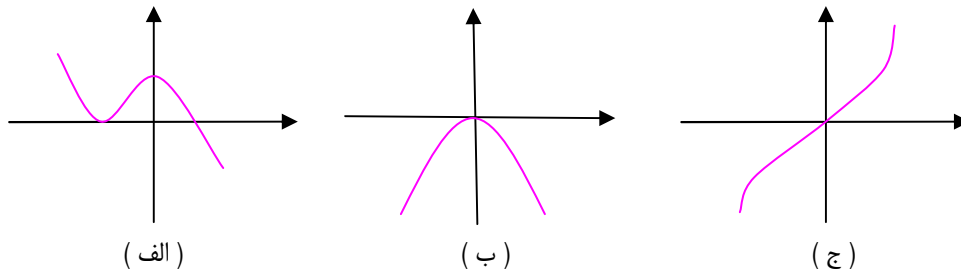
برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می توان از تعریف تابع یک به یک

استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها ( $x$  ها ) ، نمودار آن را

در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)



مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

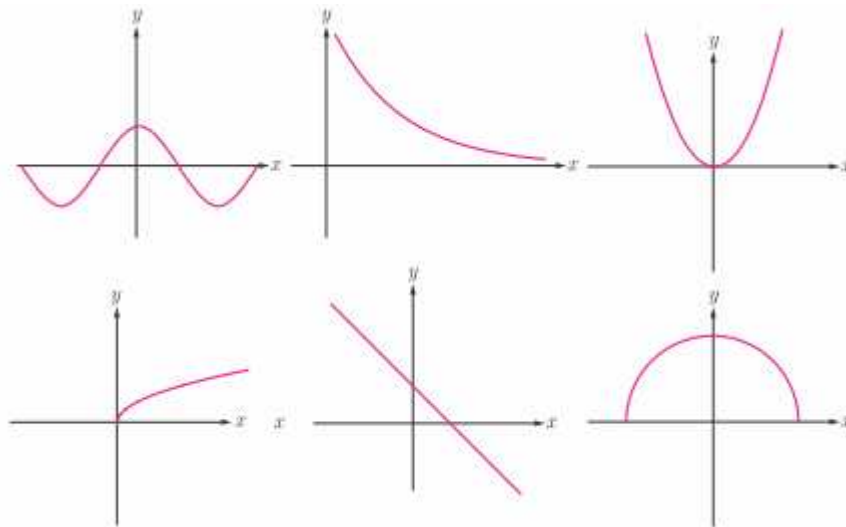


حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می‌شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

**تمرین برای حل:**

۱: اگر تابع  $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$  یک به یک باشد، مقدار  $a$  را پیدا کنید.

۲: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.



۳: ثابت کنید که هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است.

۴: نشان دهید که تابع  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  یک به یک است.

۵: با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر یک به یک است.

الف)  $f(x) = 2[x] + 1$

ب)  $g(x) = 2x^3 - 5$

۶: آیا هر تابع درجه‌ی ۲ (سه‌می)، یک به یک است؟ چرا؟

\*\*\*

## قسمت دوم : تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اول و دوم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.  
حالت اول) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدید را  
را تابع معکوس می نامند. مانند :

$$f = \{(1,7), (3,4), (9,0)\}$$

$$g = \{(7,1), (4,3), (0,9)\} \quad \text{تابع معکوس } f$$

حالت دوم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$$f = \{(1,7), (3,4), (9,4)\}$$

$$g = \{(7,1), (4,3), (4,9)\}$$

توجه داشته باشید که اگر تابع  $f$  معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با  $f^{-1}$  نمایش می دهند.

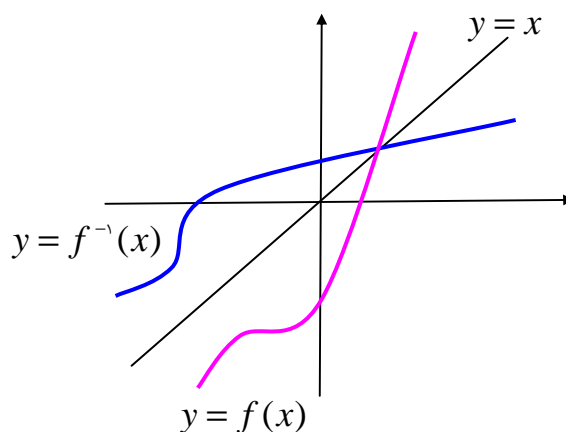
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع  $f^{-1}$  برابر برد تابع  $f$  است. ( $D_{f^{-1}} = R_f$ )

ج) برد تابع  $f^{-1}$  برابر دامنه‌ی تابع  $f$  است. ( $R_{f^{-1}} = D_f$ )

د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم ( $y = x$ ) متقارن هستند.



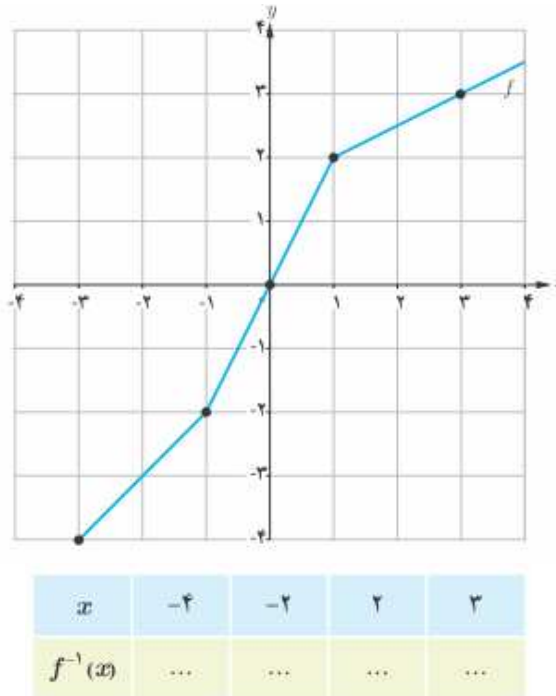
تمرین برای حل:

۷: وارون تابع  $f = \{(2,3), (-2,1), (-1,2)\}$  را به دست آورید.

۸: کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف)  $f = \{(2,1), (0,3), (5,7), (-2,6)\}$       ب)  $g = \{(2,5), (0,1), (5,7), (-2,1)\}$

۹: از نمودار تابع  $f$  برای تکمیل جدول استفاده کنید.



\*\*\*

قسمت سوم: تعریف معکوس تابع به کمک ترکیب دو تابع

با توجه به دیدگاه بیان شده برای معکوس تابع، می توان تعریف دقیق زیر را نیز بیان کرد.

برای هر دو تابع  $g$  و  $f$  اگر  $(fog)(x) = x$  و  $(gof)(x) = x$  آنگاه دو تابع  $g$  و  $f$  وارون همدیگرند.

مثال: نشان دهید که توابع  $f(x) = 3x - 4$  و  $g(x) = \frac{x+4}{3}$  وارون یکدیگرند.

حل: کافی است که نشان دهیم:  $(fog)(x) = x$  و  $(gof)(x) = x$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = (x+4) - 4 = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = \frac{(3x-4)+4}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

بنابر این دو تابع  $f$  و  $g$  وارون همدیگرند.

**تمرین برای حل:**

۱۰: نشان دهید که دو تابع زیر وارون یکدیگرند.

$$f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1} \quad \text{و} \quad g(x) = (x-2)^3 + 1$$

\*\*\*

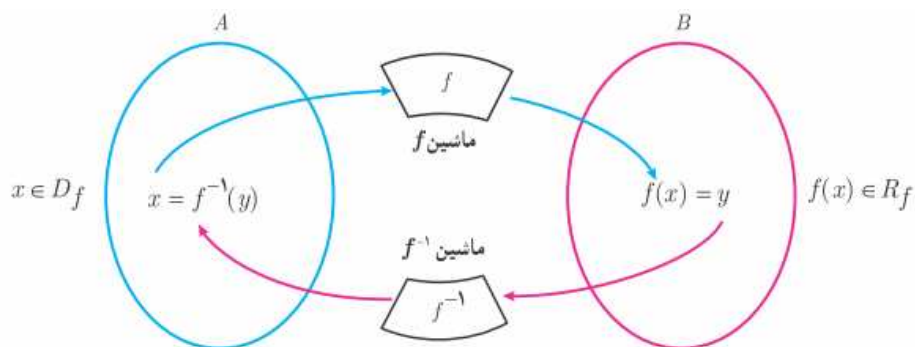
**قسمت چهارم: روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع**

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد، دو روش متداول است.

**روش اول) تعویض متغیرها:** در این روش به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

مرحله ۱) متغیر  $x$  را به  $y$  و برعکس تبدیل می‌کنیم.

مرحله ۲) متغیر  $y$  را بر حسب  $x$  محاسبه می‌کنیم.



**مثال:** ثابت کنید که تابع  $f(x) = \sqrt{2x-3}$  معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\rightarrow \sqrt{2x_1-3} = \sqrt{2x_2-3} \rightarrow 2x_1-3 = 2x_2-3 \\ &\rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y = \sqrt{2x-3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \sqrt{2y-3} \rightarrow x^2 = 2y-3 \rightarrow y = \frac{x^2+3}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

**روش دوم) بازگردانی اعمال:** در این روش، ابتدا اعمال روی توابع را به ترتیب اولویت می‌نویسیم و سپس اعمال بازگشت هر یک را مشخص می‌کنیم. تابع حاصل، تابع وارون است.

**مثال ۱:** ثابت کنید که تابع  $f(x) = 2x + 1$  معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

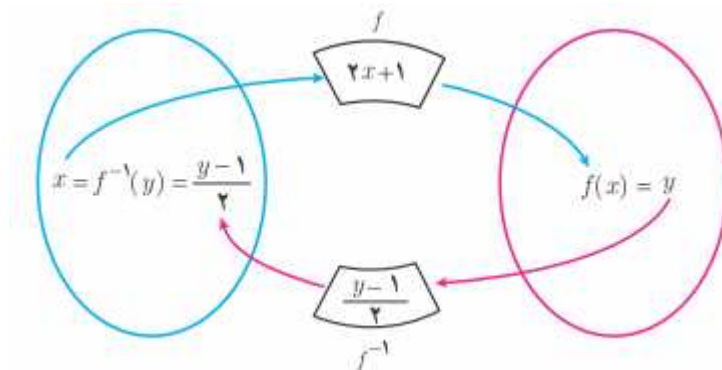
$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+1} 2x + 1 \rightarrow y \\ y &\xleftarrow{-1} x - 1 \xleftarrow{\div 2} \frac{x - 1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

مراحل کار را می‌توانید در نمودار زیر مشاهده نمایید.



**مثال ۲:** ثابت کنید که تابع  $f(x) = \sqrt{2x - 3}$  معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \sqrt{2x_1 - 3} = \sqrt{2x_2 - 3} \rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$$

$$\rightarrow 2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{-3} 2x - 3 \xrightarrow{\text{root}} \sqrt{2x - 3} \rightarrow y \\ y &\xleftarrow{\text{sqr}} x^2 \xleftarrow{+3} x^2 + 3 \xleftarrow{\div 2} \frac{x^2 + 3}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{2x-3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$$

**تمرین ۱۱ :** وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف)  $f(x) = 2x + 3$                                       ب)  $g(x) = \frac{2}{3}x - 4$

**تمرین ۱۲ :** به دو طریق نشان دهید که تابع  $f(x) = x^3$  وارون پذیر است. سپس وارون آن را تعیین کنید.

**تمرین برای حل :**

**۱۳ :** ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف)  $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$                                       ب)  $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$                                       ج)  $f(x) = 5x - 2$

**۱۴ :** معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف)  $f(x) = 3x^2 + 1$                                       ج)  $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$   
ب)  $f(x) = 3x - 1$                                       د)  $f(x) = 3|x| + 5$

**۱۵ :** وارون تابع  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$  را بیابید و نمودار  $f$  و وارون آن را رسم کنید.

**۱۶ :** نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) باز هم یک تابع خطی است.

**۱۷ :** تابع  $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$  درجه‌ی فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می‌کند، تابعی بنویسید.

که درجه‌ی سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه‌ی فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

**۱۸ :** به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه‌ی تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، را به دست آورید.

الف)  $f(x) = (x + 5)^2$  ;  $x \geq -5$

ب)  $f(x) = -|x - 1| + 1$  ;  $x \geq 2$

ج)  $f(x) = (x - 3)^2$

د)  $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۱۹: با محدود کردن دامنه‌ی تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد  $f$  و وارون آن را بنویسید و سپس نمودار این دو تابع را رسم کنید.

۲۰: توابع زیر یک به یک نیستند، با محدود کردن دامنه‌ی آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه‌ی وارون آنها را به دست آورید.

الف)  $f(x) = |x|$       ب)  $g(x) = -x^2$       ج)  $h(x) = x^2 + 4x + 3$

۲۱: اگر  $f(x) = 2x + 5$  آنگاه توابع زیر را به دست آورید.

الف)  $f^{-1}(x)$       ج)  $(fof^{-1})(x)$

ب)  $(fof)(x)$       د)  $(f^{-1}of)(x)$

۲۲: اگر  $f = \{(0,4), (3,2), (5,6), (7,0)\}$  مطلوب است تعیین تابع  $fof^{-1}$

۲۳: اگر  $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$  و  $g(x) = x^3$ ، مقادیر توابع زیر را به دست آورید.

الف)  $(fog)^{-1}(5)$       ب)  $(f^{-1}of^{-1})(6)$       ج)  $(g^{-1}of^{-1})(5)$

\*\*\*

### ترفند تقلیل متغیر برای تعیین یک به یک بودن تابع و محاسبه‌ی معکوس

گاهی تعیین یک به یک بودن تابع و به دنبال آن تعیین معکوس آن<sup>۱</sup> برای تابعی که ضابطه‌ی آن داده شده باشد، مشکل است. برای تسهیل کار می‌توان از **ترفند تقلیل متغیر** استفاده کرد. به مثال های زیر توجه کنید.

**مثال ۱:** نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

حل:

<sup>۱</sup>. در صورت معکوس پذیر بودن

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 \rightarrow f(x) = (x+1)^3 - 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1 + 1)^3 - 1 = (x_2 + 1)^3 - 1 \rightarrow (x_1 + 1)^3 = (x_2 + 1)^3$$

$$\rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \rightarrow x_1 = x_2$$

لذا تابع  $f$  یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$x \xrightarrow{+1} x+1 \xrightarrow{\text{توان}^3} (x+1)^3 \xrightarrow{-1} (x+1)^3 - 1$$

$$\sqrt[3]{(x+1)^3 - 1} \xrightarrow{-1} \sqrt[3]{x+1} \xrightarrow{\sqrt[3]{\phantom{x}}} x+1 \xrightarrow{+1} x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

**مثال ۲:** نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$$

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \rightarrow f(x) = \sqrt{x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1}$$

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{\sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{x-1} + 1} \rightarrow f(x) = \sqrt{((\sqrt{x-1} + 1))^2}$$

$$\rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

لذا تابع  $f$  یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$x \xrightarrow{-1} x-1 \xrightarrow{\sqrt{\phantom{x}}} \sqrt{x-1} \xrightarrow{+1} \sqrt{x-1} + 1$$

$$(x-1) \xrightarrow{+1} (x-1) + 1 \xrightarrow{\text{توان}^2} x-1 \xrightarrow{-1} x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 1$$

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : [www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

کانال تلگرام : @amerimath



## درس چهارم : تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می‌توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع به کمک تبدیلات می‌توان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده‌تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبدیلات را معرفی می‌کنیم.

## الف : انتقال های افقی و عمودی

## قسمت اول : انتقال عمودی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می‌توان انتقال عمودی را برای تابع  $g$  در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اول : تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x) + k$  تعریف شده باشد. ، آنگاه

$$g(x_0) = f(x_0) + k = y_0 + k$$

بنابر این نقطه‌ی  $(x_0, y_0 + k)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

حالت دوم : تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x) - k$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0) = f(x_0) - k = y_0 - k$$

بنابر این نقطه‌ی  $(x_0, y_0 - k)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + k$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم به سمت

بالا انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) - k$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم به سمت

پایین انتقال دهیم.

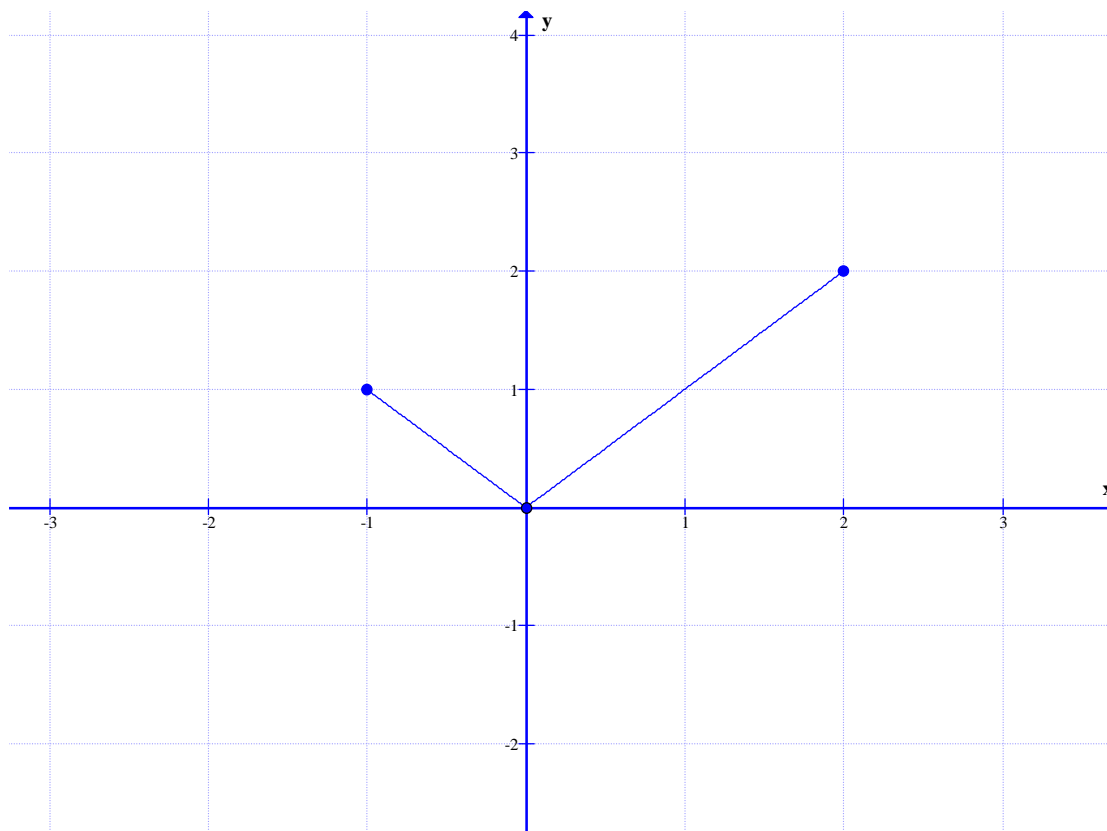
**مثال :** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را در فاصله‌ی  $[-1, 2]$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

موارد زیر پاسخ دهید.

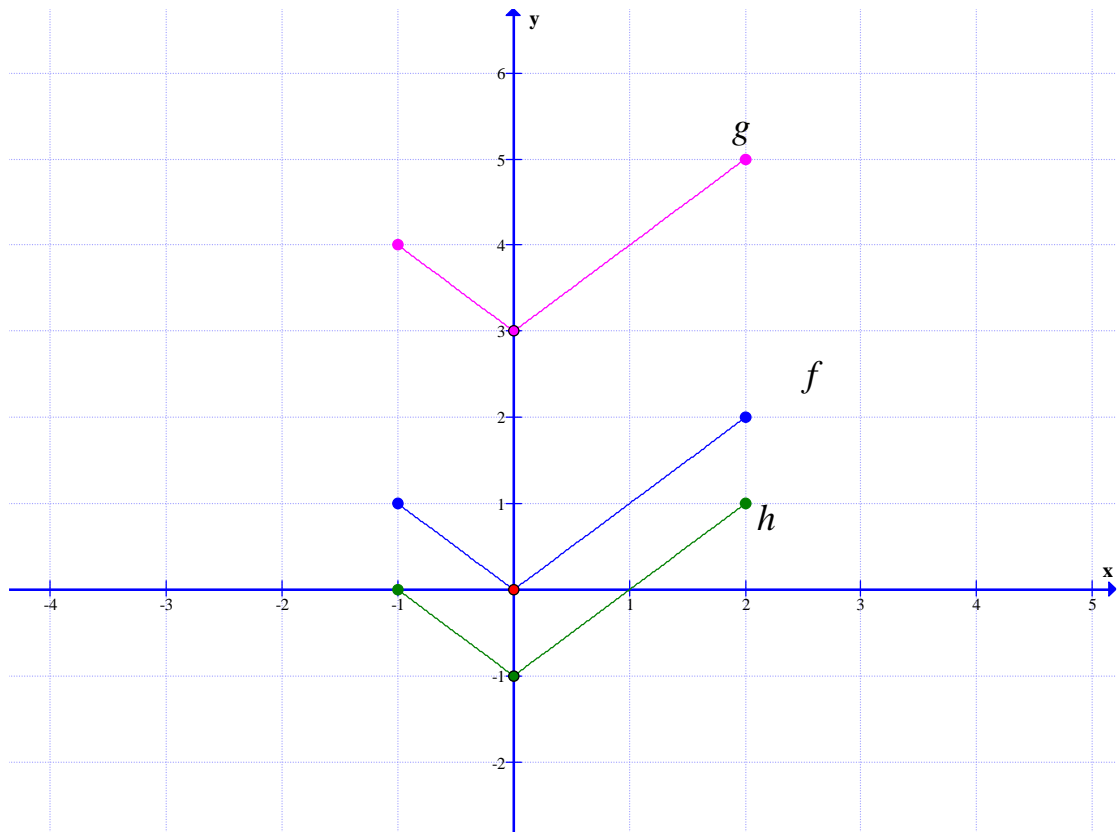
الف : نمودار تابع  $g(x) = |x| + 3$  را رسم کنید. ب : نمودار تابع  $h(x) = |x| - 1$  را رسم کنید.

**حل :** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

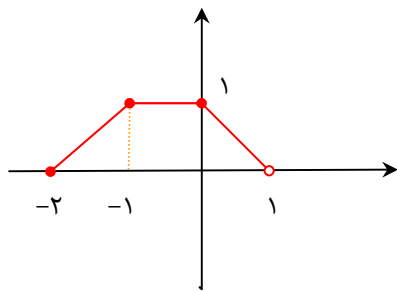
$x$	-۱	۰	۲
$y$	۱	۰	۲



اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع  $g(x)$  نمودار  $f(x)$  را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار  $h(x)$  نمودار  $f(x)$  را یک واحد به سمت پایین منتقل می کنیم.



**نتیجه:** در انتقال عمودی طول نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می ماند و فقط عرض آنها به اندازه ی  $k$  اضافه یا کم می شود.



**تمرین ۱:** تابع  $f(x)$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = f(x) - 2$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می گیرید.

### قسمت دوم : انتقال افقی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می توان انتقال افقی را برای تابع  $g$  در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اول : تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x + k)$  تعریف شده باشد. ، آنگاه

$$g(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0)$$

بنابر این نقطه  $(x_0 - k, y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

حالت دوم : تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x - k)$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0 + k) = f(x_0 + k - k) = f(x_0)$$

بنابر این نقطه  $(x_0 + k, y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

**۱ :** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x + k)$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای افقی به

سمت چپ انتقال دهیم.

**۲ :** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x - k)$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای افقی به

سمت راست انتقال دهیم.

**مثال :** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله  $(-2, 2)$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

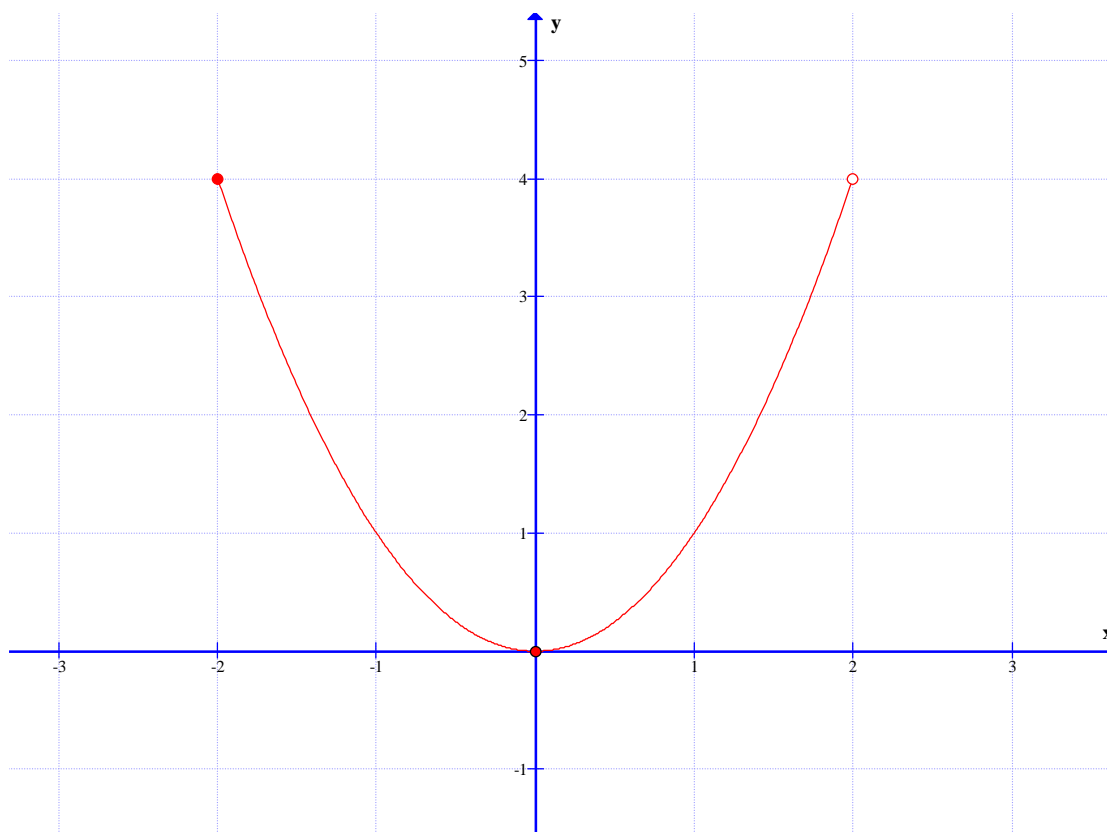
موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع  $g(x) = (x + 3)^2$  را رسم کنید.

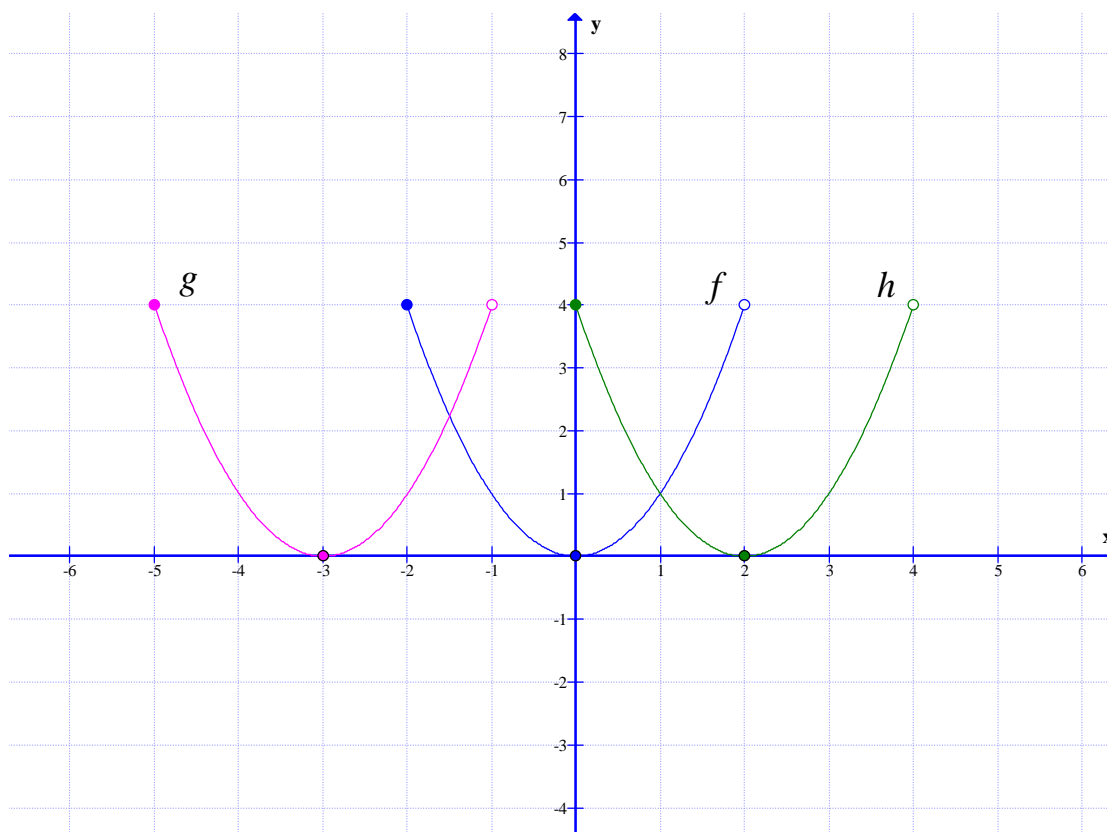
ب : نمودار تابع  $h(x) = (x - 2)^2$  را رسم کنید.

**حل :** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله  $(-2, 2)$  داده شده رسم می کنیم.

$x$	$-2$	$0$	$2$
$y$	$4$	$0$	$4$

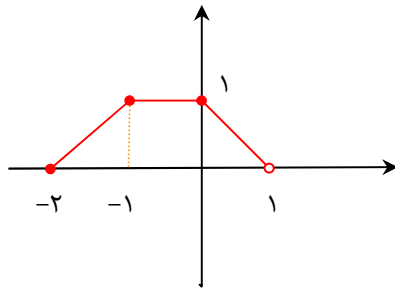


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع  $g(x)$  نمودار  $f(x)$  را سه واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار  $h(x)$  نمودار  $f(x)$  را دو واحد به سمت راست منتقل می کنیم.



**نتیجه:** در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می ماند و فقط طول آنها به اندازه  $k$  واحد اضافه یا کم می شود.

**تمرین ۲:** تابع  $f(x)$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

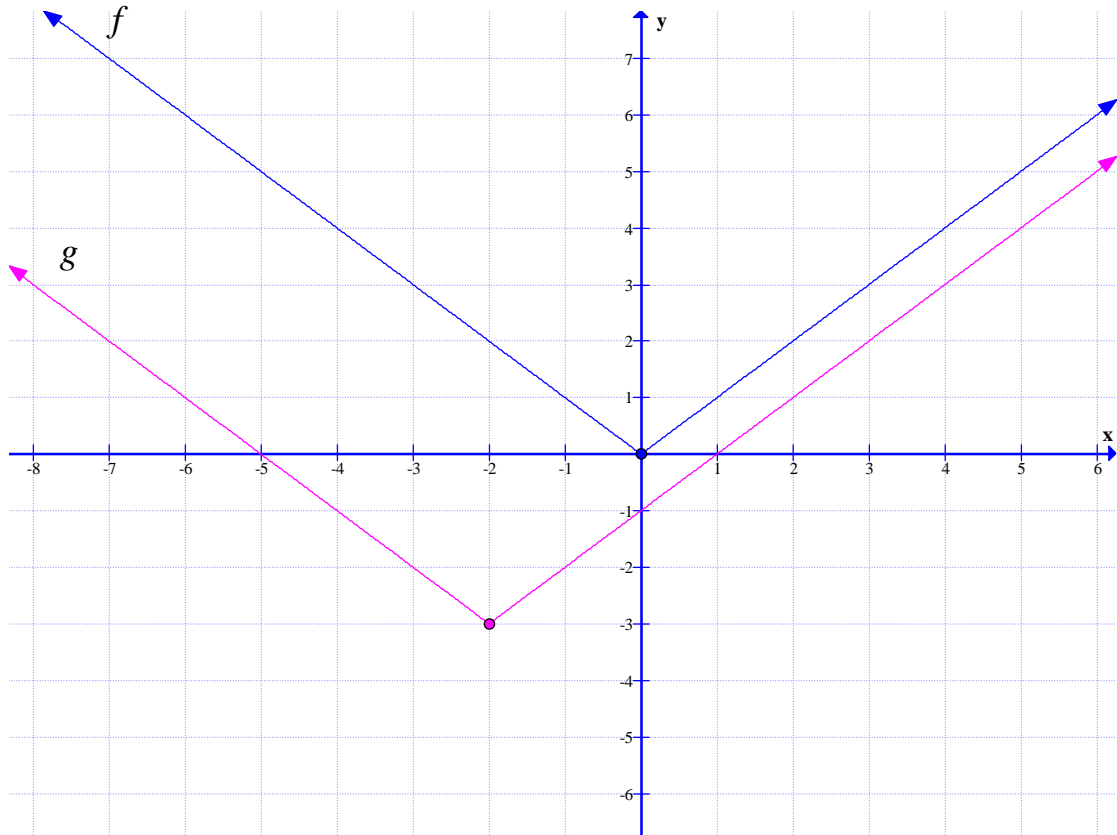
ب: نمودار تابع  $g(x) = f(x - 2)$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

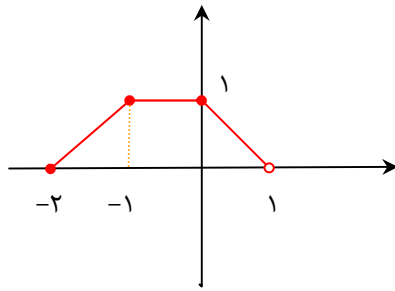
د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می گیرید.

**توجه:** گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم.<sup>۱</sup> به مثال زیر توجه کنید.

**مثال:** برای رسم نمودار تابع  $g(x) = |x + 2| - 3$  ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



<sup>۱</sup> . لازم نیست ترتیبی برای انتقال افقی و عمودی در نظر بگیریم.



**تمرین ۳:** تابع  $f(x)$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = f(x - 2) + 1$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می‌گیرید.

**تمرین ۴:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  را در فاصله‌ی  $[0, 2\pi]$  رسم کنید و سپس به کمک آن نمودار

توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف)  $g(x) = \sin x + 2$       ب)  $h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$       ج)  $k(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$

\*\*\*

### ب: انبساط و انقباض عمودی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می‌توان انبساط و انقباض عمودی را برای تابع  $g$  در حالت‌های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع  $g$  به صورت  $g(x) = kf(x)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g(x_0) = kf(x_0) = ky_0$$

بنابر این نقطه‌ی  $(x_0, ky_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را  $k$  برابر کنیم ولی طول نقاط را ثابت نگه داریم.

**مثال:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در فاصله‌ی  $[0, 4]$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

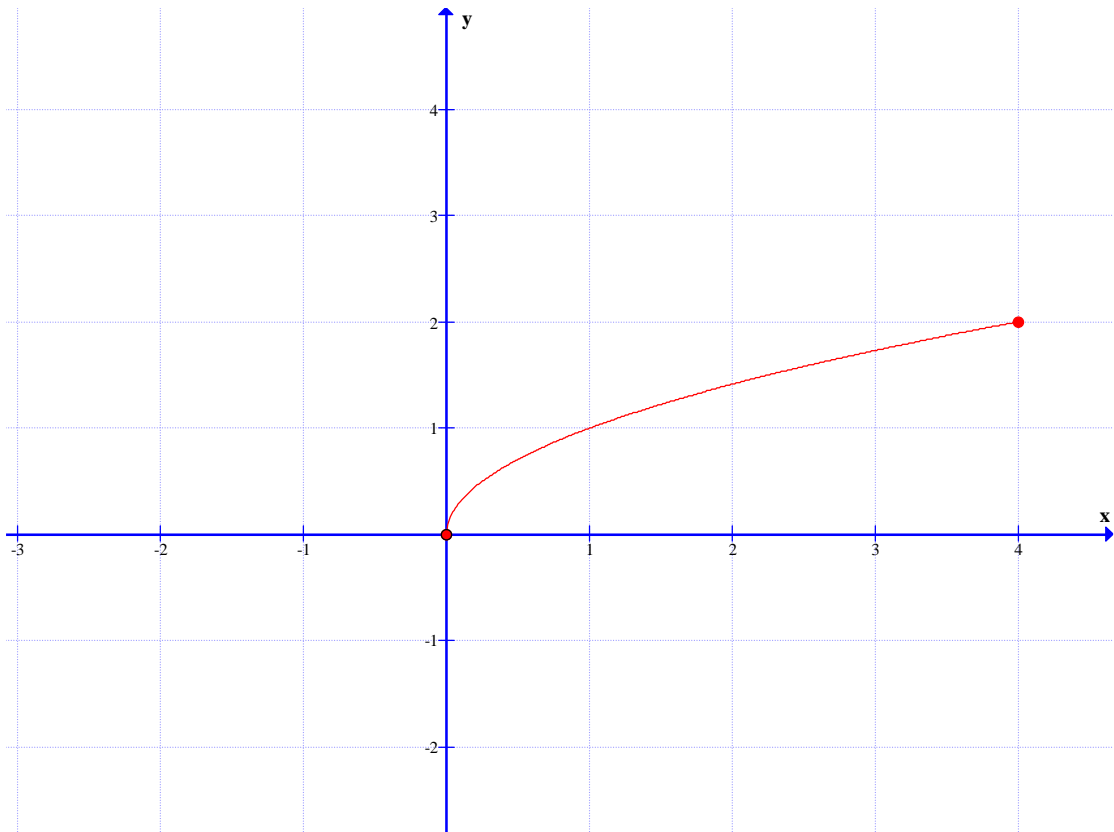
موارد زیر پاسخ دهید.

الف: نمودار تابع  $g(x) = 3\sqrt{x}$  را رسم کنید.

ب: نمودار تابع  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$  را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

$x$	۰	۱	۴
$y$	۰	۱	۲

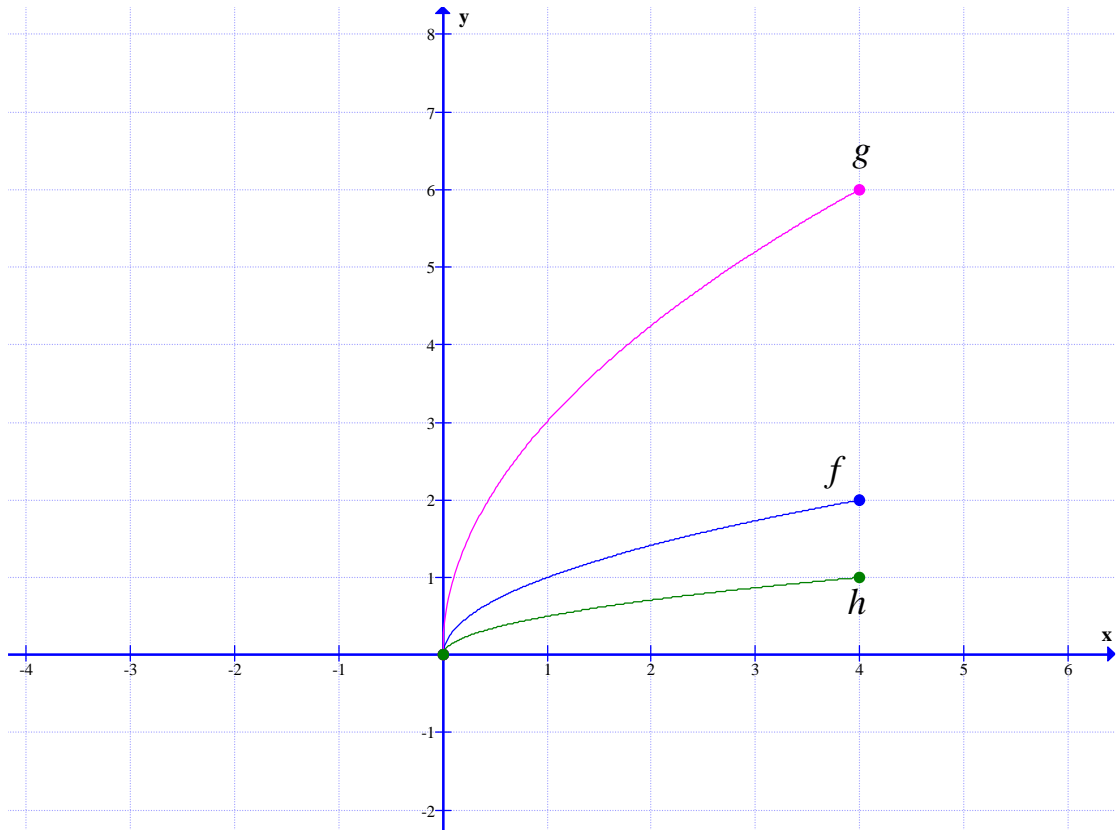


اکنون برای رسم نمودار توابع  $h$  و  $g$  طول نقاط نمودار تابع  $f$  را ثابت نگه می‌داریم ولی عرض نقاط را در ضریب  $f(x)$  ضرب می‌کنیم.

$g$	$x$	۰	۱	۴
	$y$	۰	۳	۶

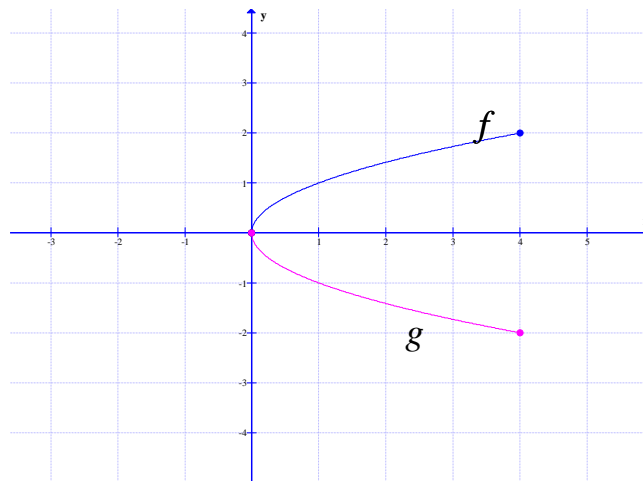
$h$	$x$	۰	۱	۴
	$y$	۰	$\frac{1}{2}$	۱





توجه :

- ۱: اگر  $k > 1$  باشد. نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.
  - ۲: اگر  $0 < k < 1$  باشد. نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.
  - ۳: اگر عرض نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع  $y = -f(x)$  به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = -f(x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $x$  ها است.
- در شکل زیر نمودار دو تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = -\sqrt{x}$  را ملاحظه نمایید.



**تمرین ۵:** نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  را در فاصله‌ی  $[0, 2\pi]$  را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = 2 \cos x$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می‌گیرید.

\*\*\*

### ج: انبساط و انقباض افقی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، می‌توان انبساط و انقباض افقی را برای تابع  $g$  در حالت‌های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(kx)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{1}{k}x_0\right) = f\left(\frac{1}{k} \times kx_0\right) = f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی  $\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را ثابت نگه داشته، ولی طول

نقاط را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم.

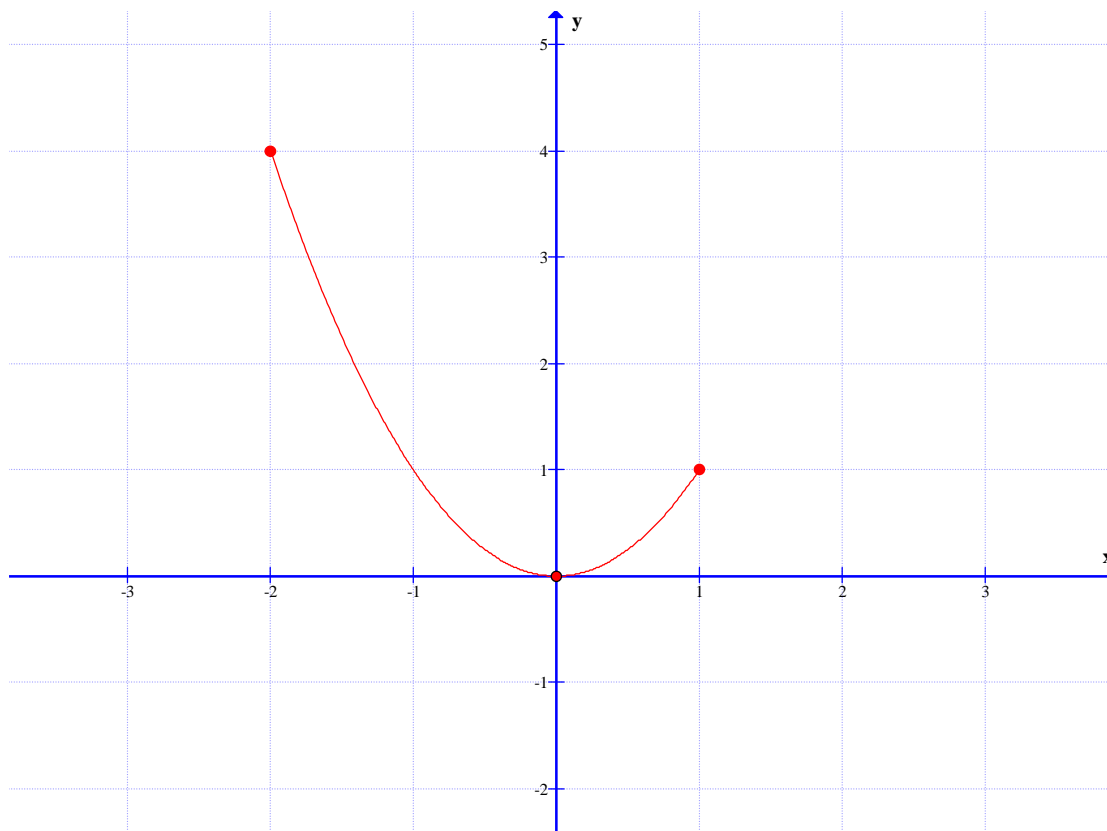
**مثال:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله‌ی  $[-2, 1]$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف: نمودار تابع  $g(x) = (2x)^2$  را رسم کنید.

ب: نمودار تابع  $h(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$  را رسم کنید.

**حل:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

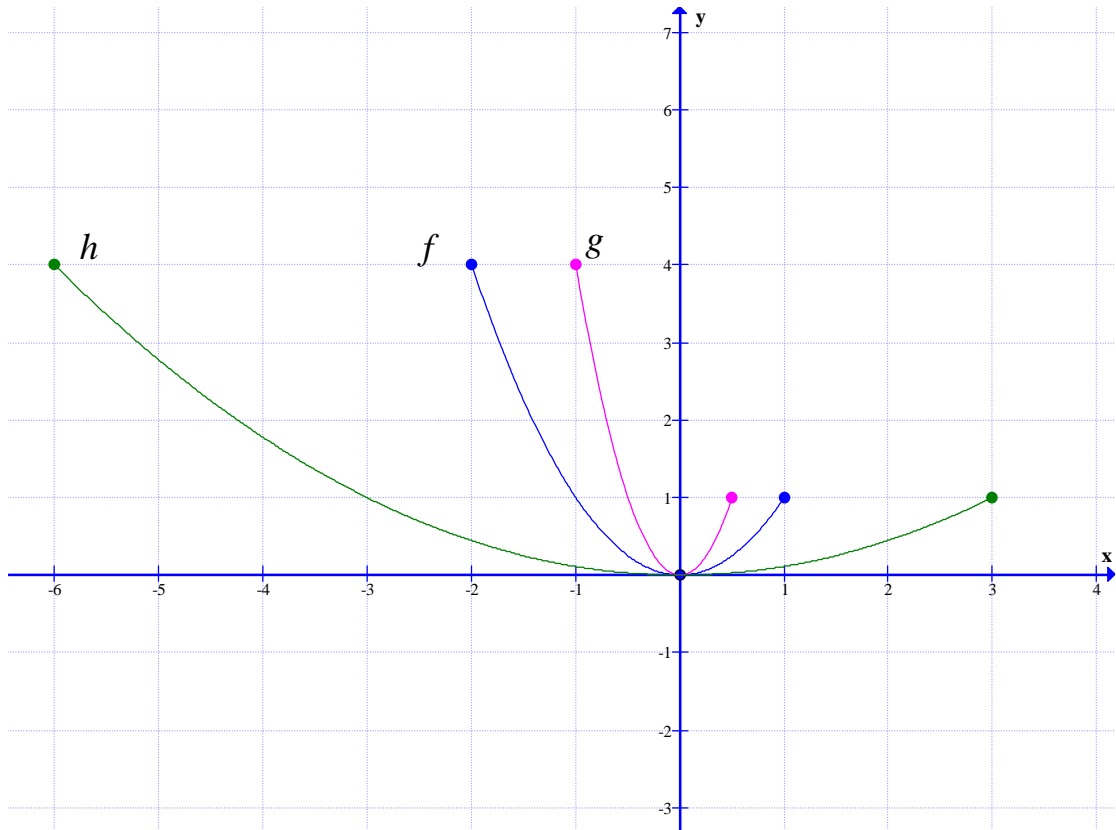
$x$	-۲	۰	۱
$y$	۴	۰	۱



اکنون برای رسم نمودار توابع  $g$  و  $h$  عرض نقاط نمودار تابع  $f$  را ثابت نگه می داریم ولی طول نقاط را در معکوس ضریب  $x$  ضرب می کنیم.

$g$	$x$	-۱	۰	$\frac{1}{2}$
	$y$	۴	۰	۱

$h$	$x$	-۶	۰	۳
	$y$	۴	۰	۱



توجه :

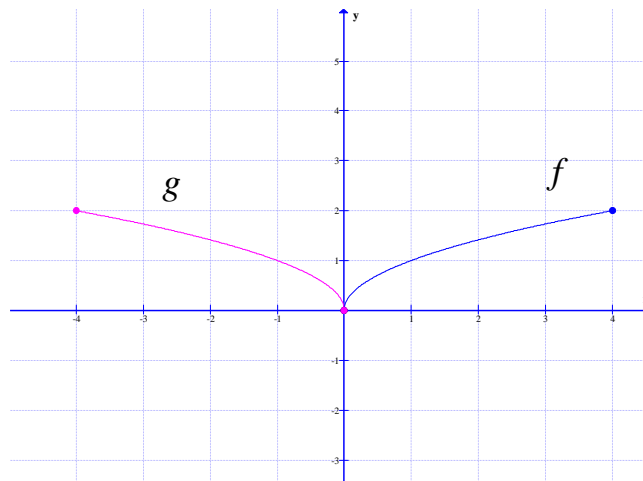
۱: اگر  $k > 1$  باشد. نمودار  $y = f(kx)$  از انقباض افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

۲: اگر  $0 < k < 1$  باشد. نمودار  $y = f(kx)$  از انبساط افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

۳: اگر طول نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع  $y = f(-x)$  به دست می

آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = f(-x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $y$  ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sqrt{-x}$  را ملاحظه نمایید.



**تمرین ۶:** نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  را در فاصله‌ی  $[0, 2\pi]$  را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = \sin 2x$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می‌گیرید.

**توجه:** گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی را با همدیگر انجام دهیم. برای مثال اگر نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = 3f(2x)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{x_0}{2}\right) = 3f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) = 3f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{x_0}{2}, 3y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = 3f(2x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را سه برابر کرده و طول نقاط

را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم.

**توجه:** گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی را به همراه انتقال عمودی یا افقی استفاده کنیم.

**مثال الف:** برای مثال اگر نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(2x + 1)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x_0 - 1}{2} + 1\right) = f(x_0 - 1 + 1) = f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{x_0 - 1}{2}, y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

## آموزش ریاضی ۳ ..... تهیه کننده : جابر عامری

برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x + 1)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را ثابت نگه داشته، ولی

ابتدا از طول نقاط یک واحد از آن کم کرده و سپس در  $\frac{1}{2}$  ضرب می کنیم.

**مثال ب:** اگر نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به

صورت  $g(x) = f(2x) + 1$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) + 1 = f(x_0) + 1 = y_0$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{x_0}{2}, y_0 + 1)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x) + 1$ ، کافی است، طول نقاط نمودار  $f(x)$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کرده و به

عرض نقاط یک واحد اضافه کنیم.

**توجه:** برای رسم نمودار تابعی نظیر  $g(x) = 3f\left(\frac{5x+3}{4}\right) + 5$  به کمک نمودار تابع  $f(x)$  می توان از

**ترفند تغییر متغیر** نیز استفاده کنید. این ترفند برای تعیین نقاط  $g$  به کمک نقاط متناظر آنها در  $f$  بکار

می رود. بدین ترتیب که :

الف : عرض نقاط  $f$  را ابتدا سه برابر و سپس ۵ واحد اضافه می کنیم.

ب : عبارت  $\frac{5x+3}{4}$  را برابر  $t$  قرار می دهیم و  $x$  را محاسبه می کنیم.

$$\frac{5x+3}{4} = t \rightarrow 5x+3 = 4t \rightarrow x = \frac{4t-3}{5}$$

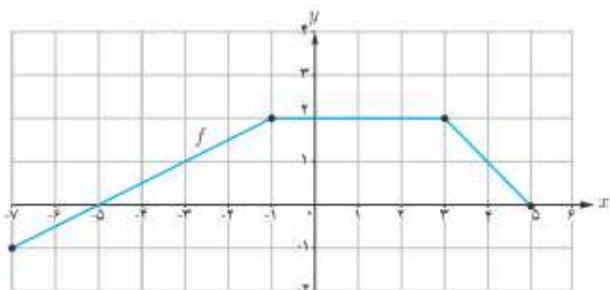
یعنی طول نقاط  $f$  را ابتدا ۴ برابر کرده و سپس ۳ واحد اضافه می کنیم و در نهایت بر ۵ تقسیم می کنیم.

**تمرین ۷:** اگر نمودار تابع  $f$  به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $g(x) = f(2x + 1)$

ب)  $h(x) = f(2x) - 3$

ج)  $k(x) = 2f(x) - 1$



**نتیجه:** خلاصه ی آنچه که در این درس بیان شده است برای تابع  $y = f(x)$  و با فرض مثبت بودن عدد  $k$  به شکل زیر بیان می شود.

نتیجه	نحوه ی تبدیل	تابع جدید
نمودار به اندازه ی $k$ واحد بالا می رود.	به عرض نقاط $k$ واحد اضافه می شود.	$y = f(x) + k$
نمودار به اندازه ی $k$ واحد پایین می رود.	از عرض نقاط $k$ واحد کم می شود.	$y = f(x) - k$
اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.	عرض نقاط در $k$ ضرب می شود.	$y = kf(x)$
نمودار به اندازه ی $k$ واحد به عقب می رود.	از طول نقاط $k$ واحد کم می شود.	$y = f(x + k)$
نمودار به اندازه ی $k$ واحد به جلو می رود.	به طول نقاط $k$ واحد اضافه می شود.	$y = f(x - k)$
اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می شود.	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود.	$y = f(kx)$

تمرین برای حل :

۸ : نقطه‌ی  $(-۸, ۶)$  روی نمودار  $y = f(x)$  قرار دارد. در هر یک از توابع زیر تعیین کنید که این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌شود.

۱-۸)  $g(x) = f(x) - ۱$

۴-۸)  $g(x) = f(۲x)$

۲-۸)  $g(x) = f(x) + ۲$

۵-۸)  $g(x) = ۳f(x - ۱)$

۳-۸)  $g(x) = ۳f(x)$

۶-۸)  $g(x) = ۵f(x + ۱) + ۲$

۹ : ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

۱-۹)  $g(x) = \sqrt{۲+x}$

۴-۹)  $g(x) = ۲ + \sqrt{x-۱}$

۲-۹)  $g(x) = ۲ + \sqrt{x}$

۵-۹)  $g(x) = \sqrt{۱-x}$

۳-۹)  $g(x) = -۲\sqrt{x}$

۶-۹)  $g(x) = \sqrt{۲x+۱} - ۳$

۱۰ : ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  را در فاصله‌ی  $[-۲\pi, ۲\pi]$  رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

الف)  $g(x) = \cos ۲x - ۱$

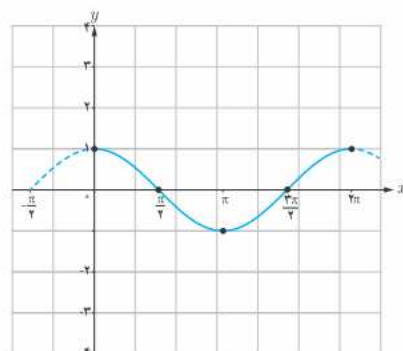
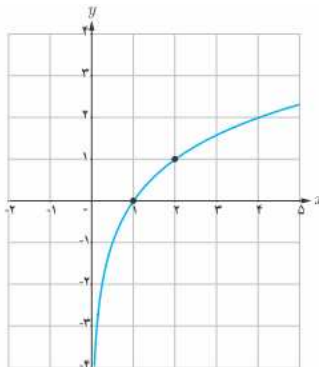
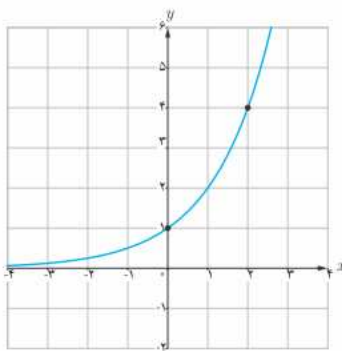
ب)  $h(x) = ۲ \cos \frac{x}{۳}$

۱۱ : در زیر نمودار توابع  $y = ۲^x$  و  $y = \log_۲^x$  و  $y = \cos x$  رسم شده‌اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

الف)  $y = ۲^{x-۱} + ۲$

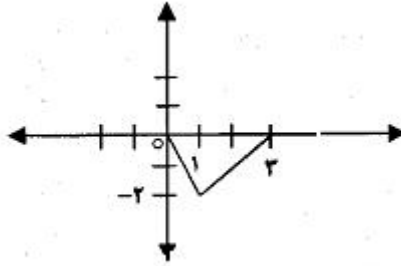
ب)  $y = \log_۲^{x+۲}$

ج)  $y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$





۱۲: در زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، ابتدا نمودار تابع  $y = -2f(x-3)$  را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۳: تابع  $y = f(x)$  با دامنه  $[-2, 1]$  و برد  $(1, 5]$  را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی های تبدیلات، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف)  $g(x) = 2f(x-1) - 3$

ب)  $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

\*\*\*

تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

@amerimath

کانال تلگرامی:

www.mathtower.ir

سایت: