ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

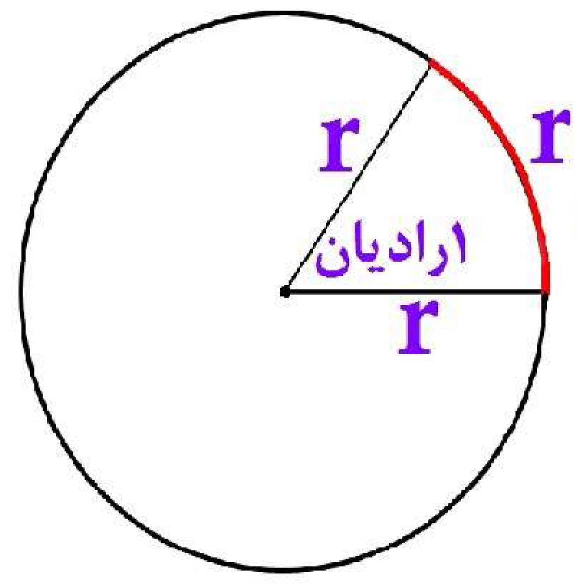
مثلثات

واژه‌ی مثلثات در زبان یونانی از دو کلمه‌ی Trigonon، به معنی مثلث و Metria به معنی اندازه گیری گرفته شده است.

واحدهای اندازه گیری زاویه:

تاکنون برای اندازه گیری زاویه از واحد درجه استفاده کرده‌ایم و می‌دانیم اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به هر قسمت را یک درجه گوییم.

در اینجا واحد دیگری برای اندازه گیری زاویه به نام رادیان را معرفی می‌کنیم:



قطعه نخی به اندازه‌ی شعاع دایره جدا می‌کنیم و آن را به طور کشیده روی محیط دایره می‌خوابانیم. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به این کمان یک رادیان است.

توجه: برای تعیین اندازه‌ی یک زاویه بر حسب رادیان، کافیست طول کمان مقابل آن را به شعاع دایره تقسیم کنیم.

بنابراین اگر l طول کمان، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه $\alpha = \frac{l}{r}$ ، که می‌توان آن را به صورت $l = r.\alpha$ نیز نوشت.

مثال: در دایره‌ای به شعاع 10 cm ، اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول 8 cm از این دایره چند رادیان است؟

$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{8}{10} = 0/8$ رادیان

مثال: در مسابقه قوی‌ترین مردان ایران، یکی از ورزشکاران میله‌ای که به انتهای آن وزنه‌ای وصل شده است را روی آرنج بلند کرده و در یک مسیر دایره‌ای به قطر ۲۰ متر، آن را 4π متر جابه‌جا می‌کند، او چه زاویه‌ای را پیموده است؟

$r = \frac{20}{2} = 10$ و $l = 4\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$ رادیان

مثال: یک زاویه‌ی تمام صفحه (دایره) چند رادیان است؟

طول کمان در این دایره، همان محیط دایره است، لذا با فرض اینکه شعاع آن r باشد طول کمان $l = 2\pi r$ خواهد بود بنابراین اندازه زاویه برابر است با: $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر:

اگر مقدار یک زاویه بر حسب درجه را با حرف D و مقدار همان زاویه را بر حسب رادیان با حرف R نمایش دهیم آنگاه: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

به عبارت دیگر، برای تبدیل درجه به رادیان باید آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کرد و برای عکس آن باید تقسیم نمود.

مثال: ۳۰ درجه معادل چند رادیان است؟ $30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ رادیان

مثال: $\frac{2\pi}{3}$ رادیان معادل چند درجه است؟ $\frac{2\pi}{3} \div \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 120^\circ$

جدول R.D: در حین محاسبات مثلثاتی حداقل لازم است تبدیل یافته‌ی زوایای زیر را بدانیم:

رادیان R	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
درجه D	0	30	45	60	90	180	270	360

تمرین:

۱- هر یک از زوایای -12°، 72° و 315° را به رادیان تبدیل کنید.

$-12 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{15}$ رادیان ؛ $72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$ رادیان ؛ $315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$

۲- هر یک از زوایای $-\frac{\pi}{18}$ رادیان و $\frac{3\pi}{4}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

$-\frac{\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} = -10^\circ$ ؛ $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 135^\circ$

۳- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه‌ی حاده چهار برابر زاویه‌ی حاده‌ی دیگر باشد، زاویه‌ی کوچکتر چند رادیان است؟

$$\left.\begin{array}{l} a = 4b \\ a + b = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 4b + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 5b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{10}$$

۴- مجموع سه زاویه 135° است. اگر اندازه‌ی آنها بر حسب رادیان به نسبت ۲ و ۳ و ۴ باشد، بزرگترین این زوایا چند رادیان است؟

$135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ رادیان

زوایا: $2x , 3x , 4x \Longrightarrow 2x + 3x + 4x = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{12}$

$\Longrightarrow$ زاویه‌ی بزرگتر $= 4x = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ رادیان

۵- اگر زاویه‌ی 160° در دایره‌ای کمانی به طول ۲۴ cm جدا کند، شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟

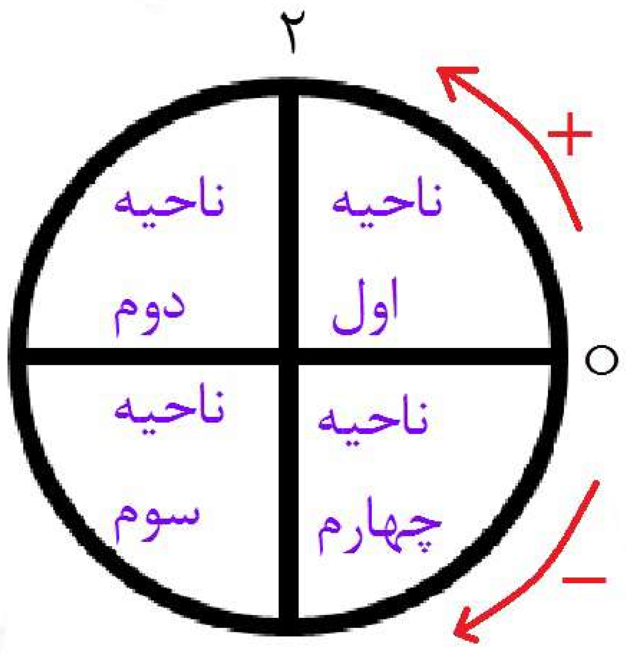
$\alpha = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9}$ و $l = 24\ cm \xrightarrow{l = r\alpha} 24 = r \times \frac{8\pi}{9} \Longrightarrow r = \frac{27}{\pi} \simeq 8.6\ cm$

دایره مثلثاتی

دایره‌ای است به شعاع واحد، دارای مبدأ حرکت و جهت‌دار که جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.

$\frac{\pi}{2}$

$\dots , \pm 3\pi , \pm \pi$



$0 , \pm 2\pi , \pm 4\pi , \dots$

دایره‌ی مثلثاتی را مطابق شکل روبه‌رو به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک ناحیه گوییم. هر ناحیه تحت زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان یعنی 90° ساخته شده است.

مثال: ناحیه‌ی مربوط به هریک از زوایای زیر را تعیین کنید.

الف) $a = \frac{13\pi}{6} \rightsquigarrow a = 2\pi + \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی اول

ب) $b = \frac{62\pi}{3} \rightsquigarrow b = 21\pi - \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی دوم

پ) $c = \frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \rightsquigarrow c = 3\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی سوم

ت) $d = -\frac{71\pi}{5} \rightsquigarrow d = -14\pi - \frac{\pi}{5} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی چهارم

مثال: انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی 1300° در کدام ناحیه‌ی دایره مثلثاتی واقع است؟

چون هر ناحیه تحت زاویه‌ی 90° ساخته شده است، ابتدا ۱۳۰۰ را بر ۹۰ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 1300 & 90 \\ \vdots & 14 \\ 40 & \end{array}$$ ⇐ بنابراین به طور غیر رسمی می نویسیم :

$1300 = 14 \times 90^\circ + 40^\circ \Rightarrow 14 \times \frac{\pi}{2} + 40^\circ = 7\pi + 40^\circ \Rightarrow$ ناحیه‌ی سوم

یادآوری مهم :

در سال گذشته، آموختیم که نسبت های مثلثاتی در هر یک از نواحی دایره مثلثاتی چه علامتی دارند، در این جا به طور مختصر آنها را یادآوری می کنیم :

در ناحیه‌ی اول همگی مثبت ، در ناحیه‌ی دوم فقط سینوس مثبت ، در ناحیه‌ی سوم تانژانت مثبت و در ناحیه‌ی چهارم فقط کسینوس مثبت است . «هستک»

توجه داشته باشیم که کتانژانت و تانژانت همه جا علامت یکسان دارند به طور مثال تانژانت در ناحیه‌ی سوم مثبت است ، بنابراین معکوس آن یعنی کتانژانت نیز مثبت می باشد.

همچنین تاکید می شود که موارد گفته نشده منفی اند، به طور مثال در ناحیه ی دوم، کسینوس، تانژانت و کتانژانت منفی می باشند.

مثال : مثبت یا منفی بودن مقدار هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cos 70^\circ \xrightarrow{\text{در ناحیه اول واقع است } 70^\circ}$ $\cos 70^\circ$ مثبت است

ب) $\tan\frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه دوم}}$ منفی است

پ) $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی چهارم}}$ منفی است

ت) $\cot\frac{4\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم}}$ مثبت است

مثال : با فرض $\theta = \frac{11\pi}{3}$ تعیین کنید هر یک از نسبت های مثلثاتی θ ، از نظر علامت چه وضعی دارند؟

$\theta = \frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} \longrightarrow$ ناحیه‌ی چهارم

بنابراین $\sin\theta$ ، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ منفی بوده و فقط $\cos\theta$ مثبت است .

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

تعیین نسبت های مثلثاتی $k\pi \pm \theta$:

اگر θ زاویه‌ی حاده و k عدد صحیح باشد، کافیست ناحیه‌ی مربوط به زاویه را یافته و علامت آن نسبت مثلثاتی را مشخص کنیم، پس آن نسبت را برای θ بنویسیم. به طور مثال :

$$\sin(3\pi+\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی سوم است و سینوس در این ناحیه منفی است } 3\pi+\theta} = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی دوم است و کسینوس در این ناحیه منفی است } \pi-\theta} = -\cos\theta$$

$$\tan(2\pi-\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی چهارم است و تانژانت در این ناحیه منفی است } 2\pi-\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(6\pi+\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی اول بوده که کتانژانت مثبت است } 6\pi+\theta} = \cot\theta$$

θ	30°	45°	60°
θ برحسب رادیان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

حال به کمک نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰ درجه ، ۴۵ درجه و ۶۰ درجه (طبق جدول روبرو) می توان به حل مسائل زیادی پرداخت .

مثال : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{5\pi}{4}$ را تعیین کنید.

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{4\pi+\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$ ناحیه ی سوم، تانژانت و کتانژانت مثبت و سینوس و کسینوس منفی اند

$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\cot\frac{5\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

مثال : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $-\frac{\pi}{3}$ را تعیین کنید.

$-\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ ناحیه ی چهارم ، فقط کسینوس مثبت و بقیه ی نسبت ها ی مثلثاتی منفی اند

$\sin\frac{-\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{-\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\frac{-\pi}{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\cot\frac{-\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین ۱: نسبت های مثلثاتی زاویه $\alpha = ۶۱۵۰^\circ$ را تعیین کنید.

$$۶۱۵۰ \div ۹۰ = ۶۸ \; (\text{باقی‌مانده } ۳۰)$$

$$\Rightarrow ۶۱۵۰ = ۶۸ \times ۹۰ + ۳۰ \Rightarrow \alpha = ۶۸\frac{\pi}{۲} + ۳۰^\circ = ۳۴\pi + ۳۰^\circ \quad \text{ناحیه‌ی اول}$$

$$\sin\alpha = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}, \quad \cos\alpha = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad \tan\alpha = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \quad \cot\alpha = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$$

تمرین ۲: جاهای خالی را برحسب نسبت مثلثاتی x، پرکنید.

الف) $\sin(\pi - x) = \sin x$ ب) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

پ) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ ت) $\cot(\pi - x) = -\cot x$

ث) $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ج) $\cos(\pi + x) = -\cos x$

چ) $\tan(\pi + x) = \tan x$ ح) $\cot(\pi + x) = \cot x$

خ) $\sin(-x) = -\sin x$ د) $\cos(-x) = \cos x$

ذ) $\tan(-x) = -\tan x$ ر) $\cot(-x) = -\cot x$

تمرین ۳: حاصل هریک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos ۳۰۰^\circ \xrightarrow{۲\pi - ۶۰^\circ \; \text{ناحیه چهارم}} = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

ب) $\sin ۴۲۰^\circ \xrightarrow{۲\pi + ۶۰^\circ \; \text{ناحیه اول}} = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پ) $\tan(-۲۲۵^\circ) \xrightarrow{-\pi - ۴۵^\circ \; \text{ناحیه دوم}} = -\tan ۴۵^\circ = -۱$

ت) $\cot(-۳۳۰^\circ) \xrightarrow{-۲\pi + ۳۰^\circ \; \text{ناحیه‌ی اول}} = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$

ث) $\sin \frac{۱۱\pi}{۴} \xrightarrow{۳\pi - \frac{\pi}{۴} \; \text{ناحیه دوم}} = \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ج) $\cos\left(\frac{-۷\pi}{۴}\right) \xrightarrow{-۲\pi + \frac{\pi}{۴} \; \text{ناحیه اول}} = \cos \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تمرین ۴: عبارت روبرو را ساده کنید.

$$\cos\frac{\pi}{۷} + \cos\frac{۲\pi}{۷} + \cos\frac{۳\pi}{۷} + \underbrace{\cos\frac{۴\pi}{۷}}_{\cos(\pi - \frac{۳\pi}{۷}) \to -\cos\frac{۳\pi}{۷}} + \underbrace{\cos\frac{۵\pi}{۷}}_{\cos(\pi - \frac{۲\pi}{۷}) \to -\cos\frac{۲\pi}{۷}} + \underbrace{\cos\frac{۶\pi}{۷}}_{\cos(\pi - \frac{\pi}{۷}) \to -\cos\frac{\pi}{۷}}$$

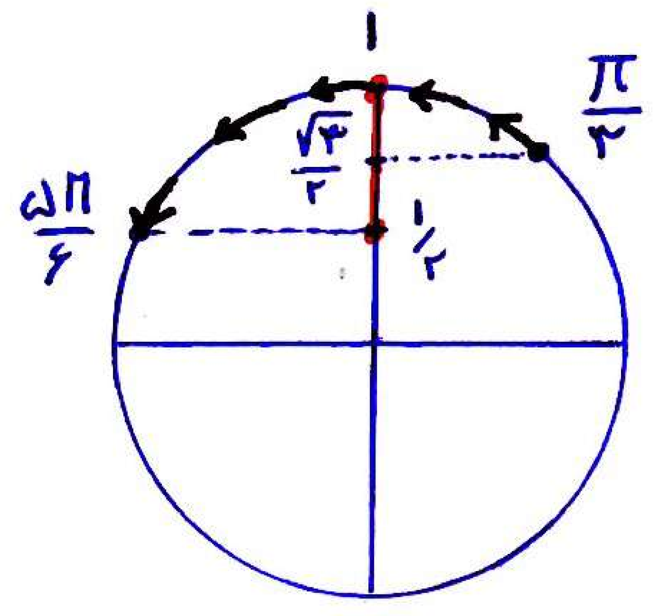
$$\Rightarrow \text{عبارت} = \cos\frac{\pi}{۷} + \cos\frac{۲\pi}{۷} + \cos\frac{۳\pi}{۷} - \cos\frac{۳\pi}{۷} - \cos\frac{۲\pi}{۷} - \cos\frac{\pi}{۷} = ۰$$

تمرین ۵ : در مثلث ABC، با فرض $A=120^\circ$ نشان دهید $\tan 3B+\tan 3C=0$.

$A=120^\circ \xrightarrow{A+B+C=180^\circ} B+C=60^\circ \xrightarrow{\times 3} 3B+3C=180^\circ \Rightarrow 3B=\pi-3C$

$\Rightarrow \tan 3B=\tan(\pi-3C) \Rightarrow \tan 3B=-\tan 3C \Rightarrow \tan 3B+\tan 3C=0$

تمرین ۶ : اگر $\frac{\pi}{9} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{18}$ ، آنگاه $\sin 3\alpha$ در چه محدوده‌ای واقع است؟



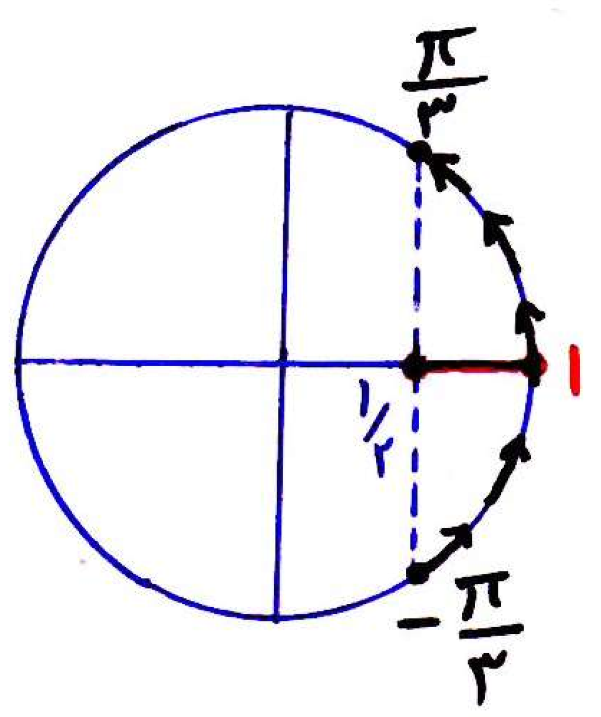
$\frac{\pi}{3} \leq 3\alpha \leq \frac{5\pi}{6} \xleftarrow{\times 3}$

می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

حال با توجه به دایره مثلثاتی در شکل روبرو، مقدار $\sin 3\alpha$ از $\frac{1}{2}$ تا 1 تغییر می‌کند

به عبارت دیگر $\frac{1}{2} \leq \sin 3\alpha \leq 1$

تمرین ۷ : اگر $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$ ، حدود تغییرات m را چنان بیابید که $\cos\theta=\frac{m-1}{2}$ باشد.



می‌دانیم $\cos\frac{-\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و با توجه به دایره مثلثاتی در شکل

روبرو، با تغییر θ از $\frac{-\pi}{3}$ تا $\frac{\pi}{3}$ ، $\cos\theta$ بین $\frac{1}{2}$ تا 1 تغییر می‌کند.

بنابراین :

$\frac{1}{2} < \cos\theta \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 1 < m-1 \leq 2 \xrightarrow{+1} 2 < m \leq 3$

تمرین ۸ : با فرض $f(x)=2\cos x+x\sin x$ ، نشان دهید $f(-x)=f(x)$.

$f(-x)=2\cos(-x)+(-x)\sin(-x)=2\cos x+(-x)(-\sin x)=2\cos x+x\sin x=f(x)$

تمرین ۹ : حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{\overbrace{\sin\frac{3\pi}{4}}^{\sin(\pi-\frac{\pi}{4})}-\overbrace{\cos\frac{5\pi}{6}}^{\cos(\pi-\frac{\pi}{6})}}{\underbrace{\sin(-\frac{3\pi}{4})}_{\sin(-\pi+\frac{\pi}{4})}+\underbrace{\tan(-\frac{4\pi}{3})}_{\tan(-\pi-\frac{\pi}{3})}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}-(-\cos\frac{\pi}{6})}{-\sin\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

تعیین نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ فرد :

ابتدا با تعیین ناحیه، علامت نسبت مثلثاتی را مشخص می‌کنیم، سپس با تغییر نسبت مثلثاتی برای θ، مقدار آن را تعیین می‌کنیم، تغییر نسبت مثلثاتی به صورت زیر است :

$$\sin \rightleftharpoons \cos \quad , \quad \tan \rightleftharpoons \cot$$

مثال: $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی دوم بوده و سینوس در این ناحیه مثبت است } \frac{\pi}{2}+\theta} = +\cos\theta$

مثال: $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی سوم بوده و کسینوس در این ناحیه منفی است } \frac{3\pi}{2}-\theta=\pi+\frac{\pi}{2}-\theta} = -\sin\theta$

مثال: $\tan(\frac{-17\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی چهارم بوده و تانژانت در این ناحیه منفی است } -\frac{17\pi}{2}+\theta=-8\pi-\frac{\pi}{2}+\theta} = -\cot\theta$

مثال: $\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی اول بوده و کتانژانت در این ناحیه مثبت است } \frac{\pi}{2}-\theta} = +\tan\theta$

مثال : نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\alpha = 6060^\circ$ را تعیین کنید.

$6060 \div 90 = 67$، باقیمانده 30

$\Rightarrow \alpha = 67 \times 90 + 30 \Rightarrow \alpha = 67\frac{\pi}{2} + 30^\circ = 32\pi + \frac{\pi}{2} + 30^\circ \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$\sin\alpha = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan\alpha = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$ ، $\cot\alpha = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال : جاهای خالی را برحسب نسبت مثلثاتی x پر کنید.

الف) $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$ ب) $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$

پ) $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \cot x$ ت) $\cot(\frac{\pi}{2}-x) = \tan x$

ث) $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$ ج) $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$

چ) $\tan(\frac{\pi}{2}+x) = -\cot x$ ح) $\cot(\frac{\pi}{2}+x) = -\tan x$

نتیجه مهم : اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به طور مثال دو زاویه‌ی $\frac{\pi}{10}$ و $\frac{2\pi}{5}$ متمم یکدیگرند زیرا مجموع آنها $\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین :

$\sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10}$ ، $\tan\frac{2\pi}{5} = \cot\frac{\pi}{10}$ ، $\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10}$

مثال: عبارات زیر را ساده کنید

الف) $$A=\frac{2\overbrace{\cos\frac{-2\pi}{5}}^{\cos\frac{2\pi}{5}\,\to\,\sin\frac{\pi}{10}}-\overbrace{\sin\frac{-\pi}{10}}^{-\sin\frac{\pi}{10}}}{3\sin\frac{\pi}{10}-\underbrace{\cos\frac{2\pi}{5}}_{\sin\frac{\pi}{10}}}\Rightarrow A=\frac{2\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}}{3\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{3\sin\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{3}{2}$$

ب) $$\tan 23^\circ\times\tan 40^\circ\times\underbrace{\tan 50^\circ}_{\cot 40^\circ}\times\underbrace{\tan 67^\circ}_{\cot 23^\circ}=\underbrace{(\tan 23^\circ\times\cot 23^\circ)}_{1}\times\underbrace{(\tan 40^\circ\times\cot 40^\circ)}_{1}=1$$

پ) $$\cos 80^\circ\times\frac{\sin 80^\circ+\cos 10^\circ}{\cos 80^\circ+\sin 10^\circ}=\sin 10^\circ\times\frac{\cos 10^\circ+\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 10^\circ}=\cancel{\sin 10^\circ}\times\frac{2\cos 10^\circ}{\cancel{2\sin 10^\circ}}=\cos 10^\circ$$

مثال: زاویه‌ی حاده‌ی x را چنان بیابید که $\sin x=\cos(20^\circ+x)$ باشد.

بنابه حاده بودن x و تساوی داده شده، نتیجه می‌شود x و $20^\circ+x$ متمم یکدیگرند، پس:

$$x+(20^\circ+x)=90^\circ\Rightarrow 2x=70^\circ\rightarrow x=35^\circ$$

مثال: عبارت زیر را ساده کنید.

$$A=\frac{\overbrace{\cot(\theta-10\pi)}^{\text{ناحیه اول}\,\to\,\cot\theta}+\overbrace{\tan(\theta+\frac{9\pi}{2})}^{4\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه دوم}\,\to\,-\cot\theta}+3\overbrace{\cos(\theta-\frac{11\pi}{2})}^{-5\pi-\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه‌ی دوم}\,\to\,-\sin\theta}-\overbrace{\sin(\theta-5\pi)}^{\text{ناحیه‌ی سوم}\,\to\,-\sin\theta}}{\underbrace{\cot(\theta-\frac{5\pi}{2})}_{-2\pi-\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه چهارم}\,\to\,-\tan\theta}+\underbrace{\tan(\theta-9\pi)}_{\text{ناحیه سوم}\,\to\,\tan\theta}+3\underbrace{\cos(\theta-8\pi)}_{\text{ناحیه اول}\,\to\,\cos\theta}+\underbrace{\sin(\theta+\frac{7\pi}{2})}_{3\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه چهارم}\,\to\,-\cos\theta}}\times\overbrace{\sin(\theta+\frac{3\pi}{2})}^{\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه‌ی چهارم}\,\to\,-\cos\theta}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\cancel{\cot\theta}-\cancel{\cot\theta}-3\sin\theta+\sin\theta}{-\cancel{\tan\theta}+\cancel{\tan\theta}+3\cos\theta-\cos\theta}\times(-\cos\theta)=\frac{-2\sin\theta}{2\cancel{\cos\theta}}\times(-\cancel{\cos\theta})=\sin\theta$$

یادآوری روابط بین نسبت های مثلثاتی:

در سال گذشته با روابطی بین نسبت های مثلثاتی آشنا شدیم، بنابه اهمیت زیاد آنها، یادآوری می‌شویم که:

$$(1)\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \quad , \quad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$(2)\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta=1 \quad , \quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta} \quad , \quad \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$$

$$(3)\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad , \quad 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

مثال: ثابت کنید: $\sin^2(\frac{5\pi}{2}+x)+\sin^2(x-3\pi)=1$

$$\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\sin(2\pi+\frac{\pi}{2}+x)=\cos x \quad , \quad \sin(x-3\pi)=-\sin x$$

$\Rightarrow$ چپ عبارت $=\cos^2 x+(-\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

مثال: اگر $\cos x=\frac{-4}{5}$ و $\sin x>0$، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی x را بنویسید.

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow \sin x=\pm\frac{3}{5} \xrightarrow{\sin x>0} \sin x=\frac{3}{5}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3/5}{-4/5}=-\frac{3}{4} \quad , \quad \cot x=\frac{1}{\tan x}=-\frac{4}{3}$$

مثال: با فرض $\cot(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=\frac{3}{4}$ و اینکه α زاویه‌ی حاده است، مقدار $\sin(8\pi-\alpha)$ را بدست آورید.

$$\cot(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=\cot(3\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

$$\sin(8\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

تمرین ۱: مقدار عددی $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$ را بدست آورید.

می‌دانیم $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ متمم یکدیگرند پس $\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$.

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$$

تمرین ۲ : تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$

$$f(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}+\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}=1$$

ب) حاصل عبارت $A=f(10^\circ)+f(20^\circ)+f(30^\circ)+f(40^\circ)+f(50^\circ)+f(60^\circ)+f(70^\circ)+f(80^\circ)$ را بدست آورید.

طبق تساوی قسمت الف، مجموع مقدار هر زاویه با مقدار متمم آن در تابع f برابر ۱ است بنابراین :

۱۰° و ۸۰° متمم اند $\Rightarrow f(10^\circ)+f(80^\circ)=1$ ، ۲۰° و ۷۰° متمم اند $\Rightarrow f(20^\circ)+f(70^\circ)=1$

۳۰°، ۶۰° متمم اند $\Rightarrow f(30^\circ)+f(60^\circ)=1$ ، ۴۰°، ۵۰° متمم اند $\Rightarrow f(40^\circ)+f(50^\circ)=1$

$$\Rightarrow A=1+1+1+1=4$$

تمرین ۳ : اگر $\tan\theta=0/2$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ را حساب کنید.

$\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\cos(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$ و $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ و $\sin(3\pi+\theta)=-\sin\theta$

$$\Rightarrow \text{کسر}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{10}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

تمرین ۴ : اگر $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(\theta+\frac{11\pi}{6})$ را بدست آورید.

گیریم $\theta+\frac{\pi}{3}=x$ درنتیجه $\theta=x-\frac{\pi}{3}$ و $\sin x=\frac{1}{3}$.

$$\tan(\theta+\frac{11\pi}{6})=\tan(x-\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6})=\tan(x+\frac{3\pi}{2})=-\cot x$$

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{1/9}=9\Rightarrow\cot^2 x=9-1=8\Rightarrow\cot x=\pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta+\frac{11\pi}{6})=\mp\sqrt{8}$$