فصل ۳ـ الگوهای غیرخطی

درس ۱ دنبالهٔ هندسی

درس ۲ توان‌های گویا

درس ۳ تابع نمایی

توابع نمایی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل‌ها، بیماری‌های واگیردار، شدت اصوات و زلزله‌ها کاربرد دارد.

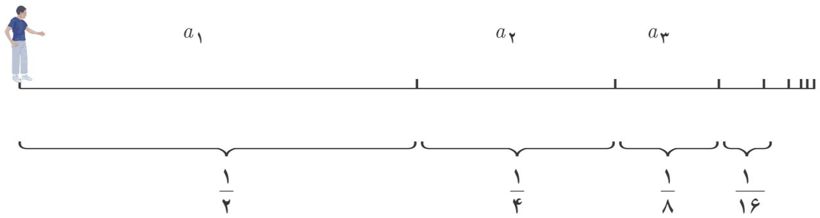
درس ۱

دنبالهٔ هندسی[1]

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو[2]، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد :

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی‌مانده و . . . و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هرکدام از فاصله‌ها نصف فاصلهٔ پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ و نیاز داریم. بنابراین :

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$ زمان رسیدن به در خروجی کلاس

و چون جملات دنباله . . . و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{2}$ و t هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود[3]. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبهٔ مجموع آنها» انجامید که در ادامهٔ این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

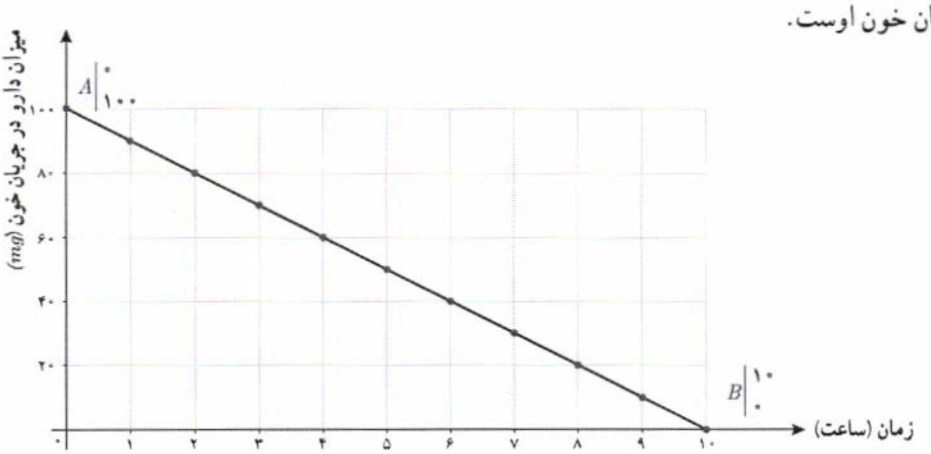
---

۱. Geometric Sequence ۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برونکور، نیوتن و اویلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

فعالیت

همان‌طور که در فعالیت صفحهٔ ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، مادهٔ مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی‌گرم از داروی A، در هر ساعت ۱۰ میلی‌گرم آن را حذف کند، نمایش دنبالهٔ کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظهٔ مصرف دارو تا لحظهٔ تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش ۱۰ میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت :

$a_1=90 \qquad a_{n+1}=a_n-10$

پس، برای تعیین ضابطهٔ تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده :

$m_{AB}=\dfrac{0-100}{10-0}=-10$

$h=$ عرض از مبدأ $=100 \qquad \Rightarrow \qquad a_n=-10n+100$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ضابطهٔ تابعی دنباله را به کمک رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا :

$a_1=90$: میزان دارو در بدن پس از یک ساعت

$d=-10$:کاهش ثابت ۱۰ میلی‌گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو

$\Rightarrow a_n=90+(n-1)\times(-10) \quad \Rightarrow \quad a_n=-10n+100$

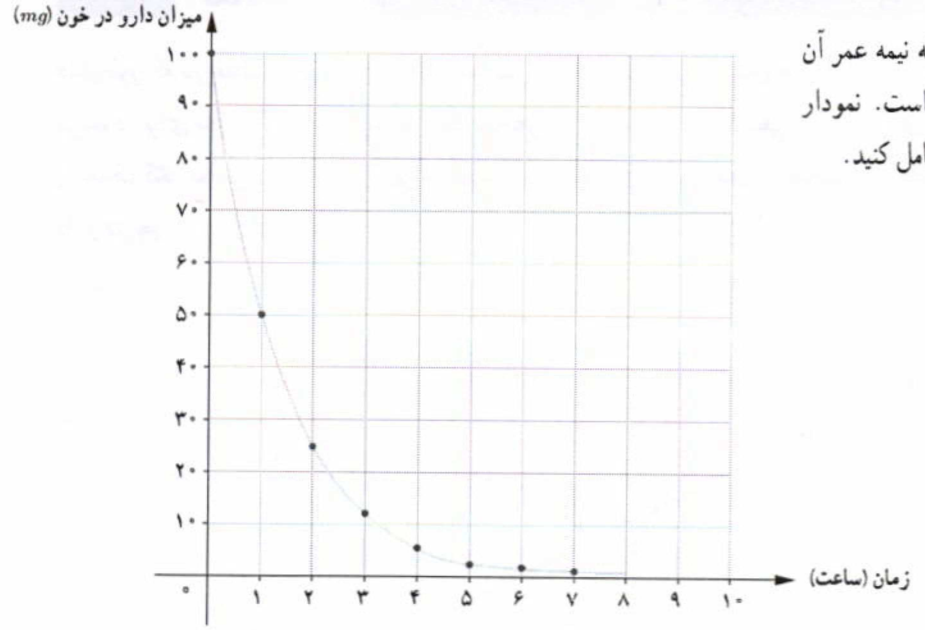
میزان حذف دارو و مادهٔ مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود[1] و در تعداد زیادی از داروها مادهٔ مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه‌عمر مادهٔ مؤثر[2]» دارو در بدن کاهش می‌یابد. فعالیت صفحهٔ بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطهٔ تابعی دنباله مشخص می‌کند.

۱. اثر این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه‌عمر یک دارو (Half – life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

فعالیت

شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون ــ زمان» را کامل کنید.



الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟ پس از ۳ نیمه عمر - خیر - با افزایش زمان میزان دارو در بدن کم و کمتر می‌شود بطوریکه می‌توان آن را ناچیز حساب کرد. اما صفر نمی‌شود.

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از nاُمین نیمه عمر باشد، رابطهٔ بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جملهٔ دنباله از حاصل‌ضرب عدد ثابت ...$\frac{1}{2}$... در جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید؛ یعنی :

$a_1=50 \qquad a_{n+1} = \cdots \frac{1}{2} \cdots a_n$

ج) ضابطهٔ تابعی (جملهٔ عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2}\times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times 50) = (\frac{1}{2})^2 \times 50 \quad a_4 = \ldots 12/5 \ldots$

$\Rightarrow \quad a_n = \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} \times 50$

خواندنی

دانستن نیمه‌عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال :

ــ در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

ــ در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه‌روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

ــ کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جملهٔ اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جملهٔ پیشین به‌دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک[1] می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

> یک دنبالهٔ هندسی، دنباله‌ای به‌صورت
>
> $$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$
>
> است که در آن $a \neq 0$ جملهٔ اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است.
> جملهٔ nاُم این دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $a_n = a_1 r^{n-1}$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جملهٔ عمومی دنباله	ضابطهٔ بازگشتی	پنج جملهٔ اول	نسبت مشترک	جملهٔ اول
$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$r = \frac{1}{3}$	$a_1 = 1$
$a_n = (\frac{3}{2})^{n-1} (\frac{1}{81})$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$r = \frac{3}{2}$	$a_1 = \frac{1}{81}$
$a_n = 4(-\frac{1}{2})^{n-1}$	$a_{n+1} = (-\frac{1}{2}) a_n$ $a_1 = 4$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$r = -\frac{1}{2}$	$a_1 = 4$
$a_n = (\frac{1}{5})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$r = \frac{1}{5}$	$a_1 = 1$
$a_n = 100 (\frac{1}{4})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 100$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$r = \frac{1}{4}$	$a_1 = 100$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

الف) اگر $0 < r < 1$، دنبالهٔ a_n، ☐ افزایشی ☑ کاهشی ☐ ثابت است.

ب) اگر $r > 1$ ،دنبالهٔ a_n، ☑ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ج) اگر $r = 1$ ،دنبالهٔ a_n، ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☑ ثابت است.

---

[1] Common ratio

n		n	
۱	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۱-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۱ \not< ۰/۵$	۵	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۵-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۶۵۶۱ \not< ۰/۵$
۲	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۲-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۹ \not< ۰/۵$	۶	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۶-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۵۹۰۴۹ \not< ۰/۵$
۳	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۳-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۸۱ \not< ۰/۵$	۷	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۷-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۵۳۱۴۴۱ \not< ۰/۵$
۴	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۴-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۷۲۹ \not< ۰/۵$	۸	$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۸-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۴۷۸۲۹۶۹ < ۰/۵$

ادامه قسمت د

هشت سال پس از خرید $\Rightarrow n > ۷$

کار در کلاس

ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ هندسی ... , $a , ar , ar^۲ , ar^۳$ را مشخص کنید.

$a_{n+1} = r a_n \qquad a_1 = a$

کار در کلاس

(هزینهٔ استهلاک)[۱] ــ شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینهٔ استهلاک این یخچال هر سال معادل ٪۱۰ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال nاُم باشد:

الف) ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ v_n را به‌دست آورید.

با توجه به هزینهٔ استهلاک ٪۱۰، ارزش یخچال فریزر در هر سال ٪۹۰ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$v_1 = ۹۶۰,۰۰۰ \qquad v_2 = ۹۶۰,۰۰۰ \times \frac{۹۰}{۱۰۰} = ۸۶۴۰۰۰ \qquad v_3 = ۷۷۷۶۰۰ \qquad v_n = ۹۶۰۰۰۰\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-1}$

ب) در v_2 ــ چون ـ زیرا هرچه زمان می‌گذرد این کاهش ارزش کم و کمتر می‌شود.

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ٪۱۰ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ٪۱۰ آن بیشتر خواهد بود.

بنابراین ... در v_2 که مقدار ارزش یخچال فریزر بیشتر است.

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطهٔ v_n را به‌گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنبالهٔ v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

چون ۱۰ درصد هر عدد غیر صفر، صفر نیست ـ میزان کاهش ثابت باشد $a_n = ۹۶۰۰۰۰ - ۹۶۰۰۰n$ ـ حسابی

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < ۴۸۰,۰۰۰$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

$۹۶۰۰۰۰\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-1} < ۴۸۰۰۰۰ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-1} < \frac{۱}{۲}$

ادامه بالای صفحه

هـ) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ هندسی است؟

k واحد کسر شود: $a_{n+1} = a_n - k$ k درصد کسر شود: $a_{n+1} = k a_n$

بیانگر دنبالهٔ حسابی است.   بیانگر دنبالهٔ هندسی است.

۱. Depreciation Cost

زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود اما زمانی که k درصد کسر شود، مقدار جملات کم و کمتر می‌شود اما هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر مادّهٔ کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

$r = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$80\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{0.5}{80} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{625}{100000}$

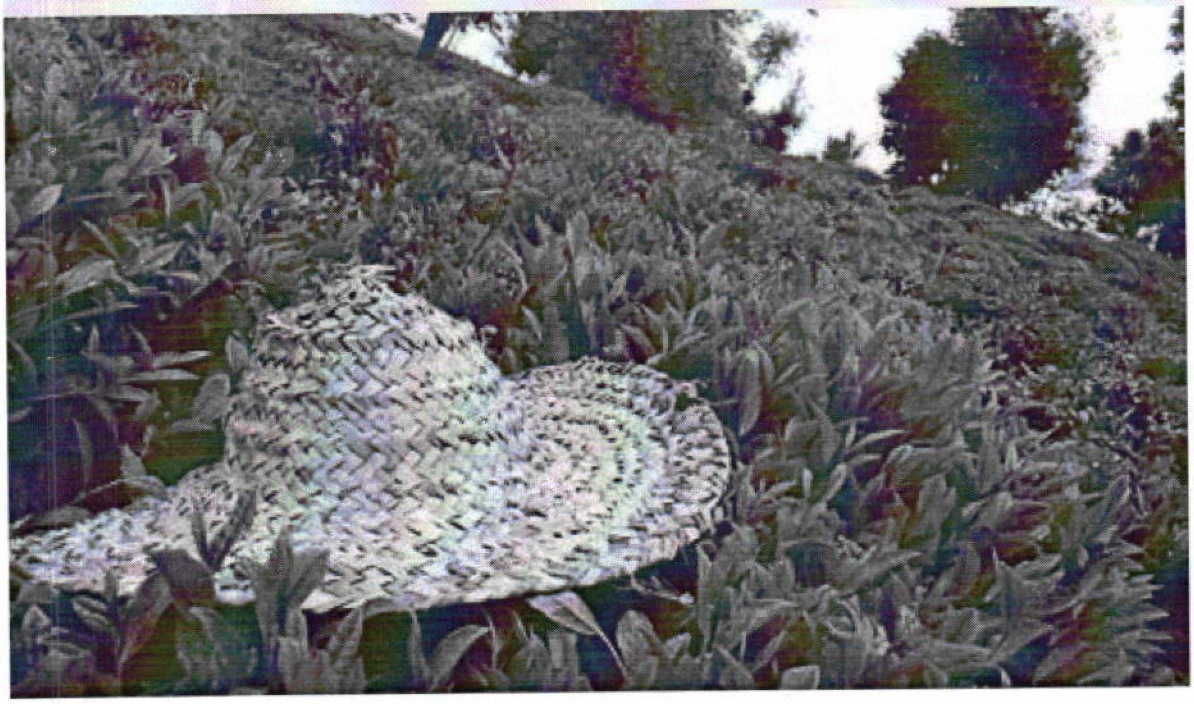
برای بدست آوردن چند نیمه عمر می توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

خواندنی

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به‌سبب وجود مادّهٔ کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازهٔ کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازهٔ آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیهٔ پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازهٔ آنهاست.

توجه به نیمه‌عمر مادّهٔ کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



$2^{n-1} > \frac{10^5}{5^4} \Rightarrow 2^{n-1} > 10 \times 2^4 \Rightarrow 2^{n-1} > 5 \times 2^5 \Rightarrow 2^{n-6} > 5 > 2^2$

$n-6 > 2 \Rightarrow n > 8 \Rightarrow$ ۹ نیمه عمر یا بیشتر

$9 \times 6 = 54$ ساعت یا بیشتر

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل ۸۰ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

ب) با یک «رابطهٔ بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطهٔ تابعی دنباله)

د) با جای‌گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطهٔ به‌دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به‌دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر «S_n» میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله:

تعداد مصرف n	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_1=80\,mg$
۲	۱۵ بهمن	۸:۰۰ صبح	$S_2=\frac{1}{2}S_1+80 \quad =40+80=120$
۳	۱۵ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_3=\frac{1}{2}S_2+80 \quad =60+80=140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4=\frac{1}{2}S_3+80=70+80=150$
۵	۱۶ بهمن	۸:۰۰ صبح	$S_5=\frac{1}{2}S_4+80=75+80=155$
۶	۱۶ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_6=\frac{1}{2}S_5+80=77/5+80=157/5$

ب) با توجه به نحوهٔ کامل کردن جدول بالا، رابطهٔ بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$S_{n+1}=80+\frac{1}{2}S_n \qquad , \qquad S_1=80$$

ج) برای نوشتن ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ S_n برحسب n، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80^{mg}$ است)، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی به‌دست آمده در قسمت ب:

$$S_1=A$$

$$S_2=A+\frac{1}{2}S_1=A+\frac{A}{2}$$

$$S_3=A+\frac{1}{2}S_2=A+\frac{1}{2}\left(A+\frac{1}{2}A\right)=A+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}\right)^2A$$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به همین صورت برای محاسبهٔ $S_۶$:

$$S_۶ = A + \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲ A + \cdots + (\frac{۱}{۲})^{\cdots} A$$

پس برای محاسبهٔ مجموع آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A + \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲ A + \cdots + (\frac{۱}{۲})^{n-۱} A \qquad (۱)$$

اگر طرفین رابطهٔ (۱) را در ضریب $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم :

$$\frac{۱}{۲}S_n = \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲ A + \cdots\cdots + (\frac{۱}{۲})^n A \qquad (۲)$$

با تفاضل رابطهٔ (۱) از (۲) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = A - (\frac{۱}{۲})^n A \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}S_n = A(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = ۲A(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A=۸۰^{mg}$، مجموع میزان آنتی‌بیوتیک پس از n بار مصرف :

$$S_n = ۱۶۰(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$

د) با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده برای S_n :

$S_۱ = ۱۶۰(۱ - (\frac{۱}{۲})^۱) = ۱۶۰ \times \frac{۱}{۲} = ۸۰$ $\qquad S_۲ = ۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^۲) = ۱۶۰ \times \frac{۳}{۴} = ۱۲۰$ $\qquad S_۶ = ۱۶۰(۱-(\frac{۱}{۲})^۶) = ۱۶۰(\frac{۶۳}{۶۴}) = \frac{۳۱۵}{۲} = ۱۵۷٫۵$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی را می‌توانیم مشخص کنیم :

اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = ar^{n-۱}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^۲ + ar^۳ + \ldots + ar^{n-۱} \qquad (r \neq ۱)$$

از رابطهٔ :

$$S_n = a \times \frac{۱ - r^n}{۱ - r} \Rightarrow S_n = \frac{a - ar^n}{۱-r} \xrightarrow{a_n = ar^{n-۱}} S_n = \frac{a - ra_n}{۱-r}$$

جملهٔ اول

جمله n ام

به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحهٔ پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید. $\qquad a = ۸۰ \qquad r = \frac{۱}{۲}$

ب) ضابطه‌های دنباله‌های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای $a_۳$ و $S_۳$ چیست؟

$$a_n = ۸۰(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

$$S_n = ۸۰\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{(۱-\frac{۱}{۲})}\right)$$

$a_۳$: میزان باقی مانده از هر قرص پس از ۲۴ ساعت مصرف آن

$S_۳$: میزان باقی مانده از اثر قرص پس از ۲۴ ساعت از مصرف اولین قرص

* $S_{3} = \frac{2}{5}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{3}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{1}\left(\frac{8-1}{8}\right) = \frac{7}{10}$

* $S_{9} = \frac{2}{5}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{9}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{1}\times\frac{512-1}{512} = \frac{511}{640}$

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

S_n مجموع n جملهٔ اول	r (نسبت مشترک)	a_1 (جملهٔ اول)	جملات دنباله
$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{10}}{1-\frac{1}{3}}\right) =$	$r = \frac{1}{3}$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$
$S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^4}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\left(\frac{256-1}{256}\right) = \frac{85}{256}$ $S_8 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-(\frac{1}{4})^8}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(\frac{65536-1}{65536}\right) = \frac{21845}{65536}$	$r = \frac{1}{4}$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$
$S_3 =$ * $S_9 =$ *	$r = \frac{1}{2}$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$
$S_6 = \frac{2}{5}\left(\frac{1-5^6}{1-5}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{1-15624}{-4} = 1562/4$	$r = 5$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$

۲. نمودار زیر یک دنبالهٔ هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جملهٔ اول آن و محاسبهٔ نسبت مشترک دنبالهٔ هندسی:

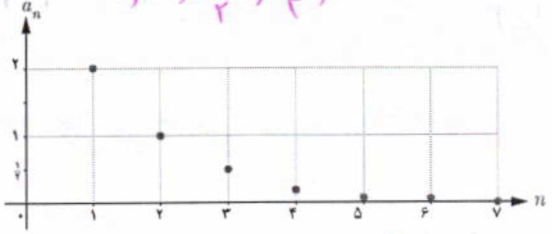
الف) جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل S_{10} را به‌دست آورید.

$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

$r = \frac{1}{2} \qquad a_1 = 2$

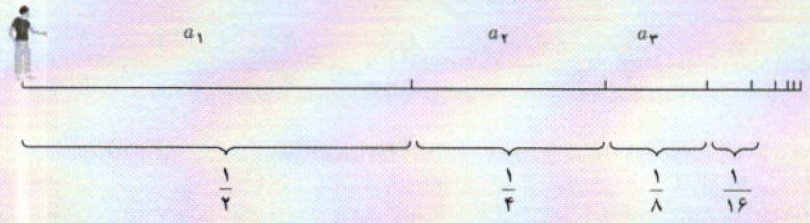
$a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$



$S_{10} = 2\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\times 2\left(\frac{1024-1}{1024}\right) = \frac{1023}{256}$

خواندنی

جواب تناقض (پارادوکس) زنو



همان‌طور که خوانده شد، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنبالهٔ r^n بسیار بسیار کوچک می‌شود و می‌توانیم در حالتی که مجموع بی‌شمار جملات دنبالهٔ هندسی خواسته می‌شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین :

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که n عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفتهٔ او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از رابطهٔ $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$ به‌دست آید که یک دنبالهٔ هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است :

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$= \frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

چون n، تا بی‌نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بی‌نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف‌نظر کرد :

$$\frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t(1-\cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده‌اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیهٔ مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می‌پنداشت اگر بی‌شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی‌شمار جمله باید بی‌نهایت شود!

۵) $a, \underbrace{\ldots}_{n\ \text{جمله}}, b \Rightarrow n+2$ جمله $\begin{cases} a_{n+2} = ar^{n+1} \\ a_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2 \qquad a_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

✓۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n \qquad a_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

۳) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \qquad a_1 = 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \ldots$

✓۴) $a_{n+1} = 2a_n \qquad a_1 = 1$

$1, 2, 4, 8, \ldots$

۲. با توجه به مفهوم دنبالهٔ هندسی و نسبت مشترک جملات دنبالهٔ هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطهٔ هندسی میان a و c می‌نامند.)

$a, b, c \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} r = \frac{b}{a}$ و $r = \frac{c}{b}$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \times c$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x را به‌دست آورید.

۳) $x(x+3) = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 3x - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه[1] مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ٪۶۰ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر تودهٔ سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد تودهٔ سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به‌طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن تودهٔ سرطانی به کمک جراحی، باقی‌ماندهٔ سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

$10^{12}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \xRightarrow{\div 10^{12}} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$

۵. میان دو عدد a و b، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنبالهٔ شروع از a و ختم به b یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطهٔ $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید. (راهنمایی : تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی ۲۷ و جملهٔ پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جملهٔ هفتم این دنبالهٔ هندسی را به‌دست آورید.

۶) $a_1, a_2, \underbrace{a_3}_{27}, a_4, \underbrace{a_5}_{243}, \ldots \Rightarrow r^{1+1} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow a_7 = ar^6 = ar^4 \times r^2 = a_5 \times r^2 = 243 \times 9 = 2187$

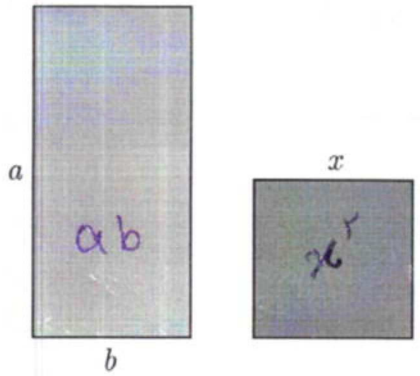
قسمت الف سوال ۴

$a_n = 10^{12}\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow a_4 = 10^{12}\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1} = 16 \times 10^{10}$

n		n	
۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{1-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 1 \not< 7\times10^{-6}$	۸	$\left(\frac{4}{10}\right)^{8-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/0016384 \not< 0/000007$
۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{2-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/4 \not< 0/000007$	۹	$\left(\frac{4}{10}\right)^{9-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/00065536 \not< 0/000007$
۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/16 \not< 0/000007$	۱۰	$\left(\frac{4}{10}\right)^{10-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/000262144 \not< 0/000007$
۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/064 \not< 0/000007$	۱۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{11-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/0001048576 \not< 0/000007$
۵	$\left(\frac{4}{10}\right)^{5-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/0256 \not< 0/000007$	۱۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{12-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/00004194304 \not< 0/000007$
۶	$\left(\frac{4}{10}\right)^{6-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/01024 \not< 0/000007$	۱۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{13-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/000016777216 \not< 0/000007$
۷	$\left(\frac{4}{10}\right)^{7-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/004096 \not< 0/000007$	۱۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{14-1} < 7\times10^{-6} \Rightarrow 0/0000067108864 < 0/000007$

بعد از ۱۴ بار

۸) $a_n = 15000\left(\frac{85}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow a_5 = 15000\left(\frac{85}{100}\right)^{5-1} = 15000\times 0/52200625 = 7830/09375$



۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.
اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

طبق ترینه ۲ $\Leftarrow$ $x^2=ab$

الف) x و b و a

ب) b و x و a ✓

پ) x و a و b

x واسطهٔ هندسی بین a و b است پس دنبالهٔ هندسی آن a, x, b یا b, x, a باشد

۸. یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جوّ زمین، در هر دقیقه ٪۱۵ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جوّ زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد.
الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)
ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

$2, 4, 8, \ldots$ $\quad a_1 = 2 \quad r=2$

الف) $a_n = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$

ب) $S_n = 2\times\frac{1-2^{10}}{1-2} = -2+2^{11} = -2+2048 = 2046$

$S_n = \frac{a_1 - r a_n}{1-r}$

$S_n = \frac{1-4\times4096}{1-4} = \frac{-16383}{-3} = 5461$ $\quad a_1=1 \quad r=4$

۱۰. مجموع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $1+4+16+\ldots+4096$

ب) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{640}$ $\quad a_1 = \frac{1}{5} \,,\quad r=\frac{1}{2}$

$S_n = \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{640}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\times128}{5\times128}-\frac{1}{640} = \frac{256-1}{640} = \frac{255}{640} = \frac{51}{128}$

۱۱. نخستین جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به‌دست آورید.

$a_1=1536 \quad r=\frac{1}{2} \quad a_n=6 \quad n=?$

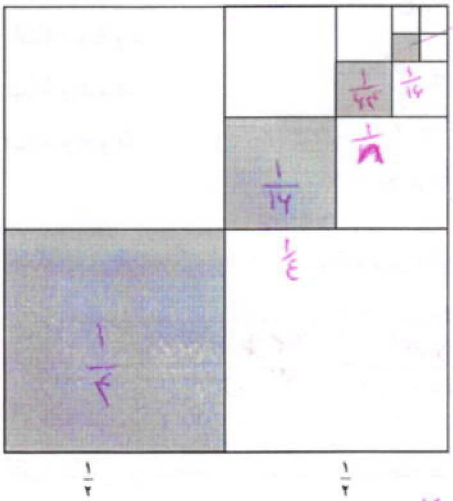
الف) $a_n = 1536\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{6}{1536} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$

یا $6 = 1536\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$2^{n-1} = 256 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=9$

ب) $S_n = \frac{1536-\frac{1}{2}\times6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1536-3}{\frac{1}{2}} = \frac{1533}{\frac{1}{2}} = 3066$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنبالهٔ مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می‌دهد؟ چون مساحت هر قسمت از ضرب مساحت قسمت قبلی در $\frac{1}{4}$ به دست ما آید

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

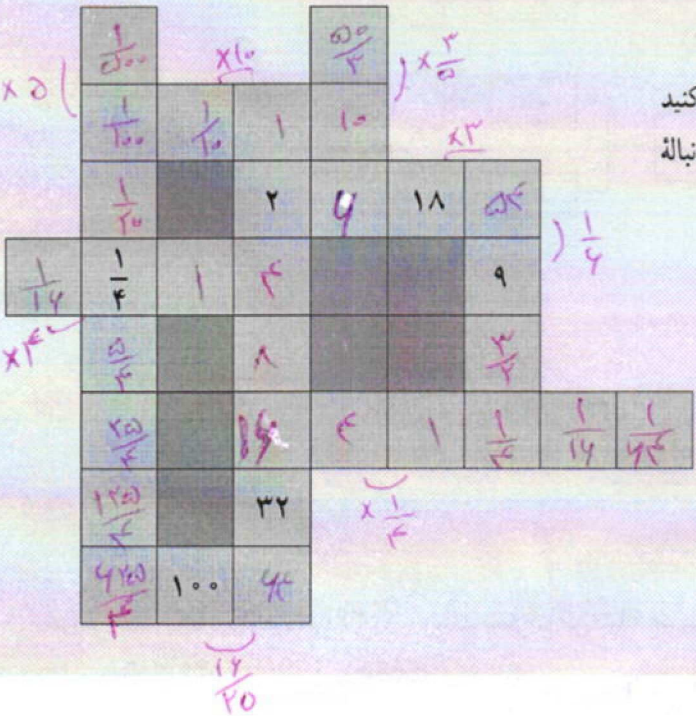
$$S_n = \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^6}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{4096-1}}{4096}\right) = \frac{1365}{4096}$$

بازی و ریاضی

مربع های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنبالهٔ هندسی تشکیل بدهد.



درس ۲

«ریشهٔ nاُم و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوهٔ ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید.
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون دربارهٔ اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و... اعداد حقیقی و نحوهٔ محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$۴^۳= ۶۴$ $\qquad (۲)^{-۷}= \frac{۱}{۱۲۸}$ $\qquad (\frac{۲}{۵})^۴ = \frac{۱۶}{۶۲۵}$ $\qquad ۷۳^۱= ۷۳$

$(-۳)^۶= ۷۲۹$ $\qquad -۳^۶= -۷۲۹$ $\qquad (۰/۰۱)^۵=(۱۰^{-۲})^۵=۱۰^{-۱۰}$ $\qquad (۱\frac{۱}{۲})^۰ = ۱$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$(-۳۶)^۷ \div ۹^۷ =(\frac{-۳۶}{۹})^۷=-۴^۷$ $\qquad (۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$

$(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ =$ $\qquad (\frac{۴}{۷})^۵ \div (\frac{۴}{۷})^۸ = (\frac{۴}{۷})^{۵-۸} = (\frac{۴}{۷})^{-۳}=(\frac{۷}{۴})^۳$ $\qquad (۱۰^۶)^۸ = ۱۰^{۴۸}$

$(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ = (-۴ \times -۵)^۳ = ۲۰^۳$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

$a^m . a^n = a^{m+n}$	$(۲/۱)^{۶} \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^{۴} = (۲/۱)^{۱۱}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{۴}{۵})^{۵} \div (\frac{۴}{۵})^{۸} = (\frac{۴}{۵})^{۵-۸} = (\frac{۴}{۵})^{-۳} = (\frac{۵}{۴})^{۳}$
$a^m . b^m = (ab)^m$	$(-۴)^{۳} \times (-۵)^{۳} = (-۴ \times -۵)^{۳} = ۲۰^{۳}$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-۳۶)^{۷} \div ۹^{۷} = (\frac{-۳۶}{۹})^{۷} = (-۴)^{۷}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۱۰^{۶})^{۸} = ۱۰^{۶ \times ۸} = ۱۰^{۴۸}$

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m . a^n = a^{m+n}$	$۵^{۷} \times ۵^{۸} = ۵^{۷+۸} = ۵^{۱۵}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$۹^{۱۰} \div ۹^{۶} = ۹^{۱۰-۶} = ۹^{۴}$
$a^m . b^m = (ab)^m$	$۷^{۶} \times ۵^{۶} = (۷ \times ۵)^{۶} = ۳۵^{۶}$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$۱۲^{۴} \div ۳^{۴} = (\frac{۱۲}{۳})^{۴} = ۴^{۴}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۲^{۳})^{۴} = ۲^{۳ \times ۴} = ۲^{۱۲}$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ = ۱۶$ می‌باشند و چون $۱۶ = ۴^۲$ و $۱۶ = (-۴)^۲$، پس ۴ و ۴- یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشهٔ سوم عدد حقیقی مانند a، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ = a$ است. برای مثال، ریشهٔ سوم عدد ۲۷، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ = ۲۷$ است که برابر ۳ می‌باشد.

با همین استدلال، ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-، پاسخ معادلهٔ $x^۵ = -۳۲$ است که برابر ۲- و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادلهٔ $x^۶ = ۶۴$ هستند که برابر ۲+ و ۲- می‌باشند.

جدول صفحهٔ بعد را مانند نمونه کامل کنید.

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه‌های چهارم	$\sqrt[۴]{۶۴}\ ,\ -\sqrt[۴]{۶۴}$	وجود ندارد
$\sqrt[۴]{a}$	$\sqrt[۴]{۶۴}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[۵]{۶۴}$	$\sqrt[۵]{-۶۴}$
$\sqrt[۵]{a}$	$\sqrt[۵]{۶۴}$	$\sqrt[۵]{-۶۴}$
ریشه‌های ششم	$\sqrt[۶]{۶۴}=۲\ ,\ -\sqrt[۶]{۶۴}=-۲$	وجود ندارد
$\sqrt[۶]{a}$	$\sqrt[۶]{۶۴}=۲$	وجود ندارد
ریشه‌های هفتم	$\sqrt[۷]{۶۴}$	$\sqrt[۷]{-۶۴}$
........$\sqrt[۷]{a}$........	$\sqrt[۷]{۶۴}$	$\sqrt[۷]{-۶۴}$

اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nاُم عدد a می‌نامیم، هرگاه : $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$، وقتی n زوج است، ریشهٔ nاُم مثبت عدد a است.

در حالت کلی‌تر، دربارهٔ ریشه‌های nاُم $(n \in \mathbb{N})$ عددی مانند a می‌توان گفت :

$a \geq ۰$	n زوج باشد	ریشهٔ nاُم a $= \sqrt[n]{a}\ ,\ -\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	ریشهٔ nاُم a $= \sqrt[n]{a}$
$a < ۰$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	ریشهٔ nاُم a $= \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[۴]{۸۱}$

کار در کلاس

۱ــ با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به‌دست آورید.

ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ $\Leftarrow$ $\sqrt[۴]{۸۱}=۳\ ,\ -\sqrt[۴]{۸۱}=-۳$

$a \geq 0$ و n زوج است : $a=25,\ n=8 \Rightarrow$ ریشه‌های ۸اُم عدد ۲۵ $= -\sqrt[8]{25} \simeq -1/495$ ، $\sqrt[8]{25} \simeq 1/495$

$a \geq 0$ و n فرد است : $a=64,\ n=3 \Rightarrow$ ۶۴ ریشهٔ سوم عدد $\sqrt[3]{64} = 4$

$a < 0$ و n زوج است : $a=-64,\ n=4 \Rightarrow$ ۶۴- ریشه چهارم ندارد $\cancel{\sqrt[4]{-64}}$.

$a < 0$ و n فرد است : $a=-27,\ n=3 \Rightarrow$ ۲۷- ریشه سوم عدد $= \sqrt[3]{-27} = -3$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی :

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج است } n \\ a & \text{فرد است } n \end{cases}$$

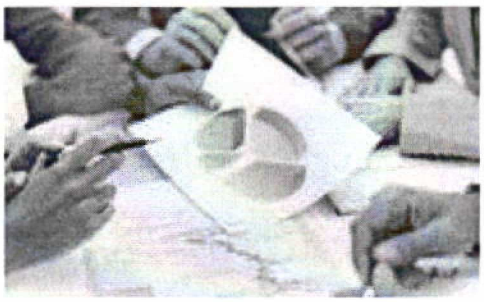
برای مثال، $\sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$ و $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3}$ ، همچنین $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ و $\sqrt[12]{(5)^{12}} = 5$

توان‌های گویا

سهام‌داران یک شرکت تولیدکنندهٔ محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه‌ریزی برای توسعهٔ شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال‌های قبل را ارائه کند. مدیرعامل در جلسهٔ ارائهٔ گزارش اعلام کرد که طی سال‌های قبل، سود سالانهٔ شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش‌بینی کرد که این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایهٔ شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانهٔ آن را ٪۲۰ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایهٔ شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند :

سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $= 100 \times (1/2)^{t}$ ← زمان (برحسب سال)



تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان سرمایهٔ شرکت را به‌صورت زیر حساب کرد :

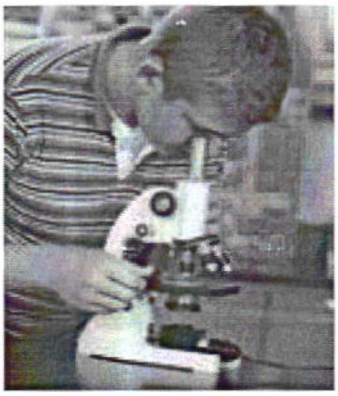
پس از گذشت یک سال : سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $= 100 \times (1/2)^1 = 120$

پس از گذشت ۲ سال : سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $= 100 \times (1/2)^2 = 144$

حال اگر سهام‌داران این شرکت می‌خواستند سرمایهٔ شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟ $a_n=۱۰۰(۱٫۲)^{\frac{۲۰۰}{۳۶۵}}$ $a_n = ۱۰۰ \times (۱٫۲)^{\frac{۱}{۲}}$

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوهٔ کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان‌های گویا و نحوهٔ استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیهٔ باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	___	t
جرم (گرم)	$۲^{۱}=۲$	$۲^{۲}=۴$	$۲^{۳}=۸$	$۲^{۴}=۱۶$	$۲^{۵}=۳۲$	$۲^{۶}=۶۴$	$۲^{۷}=۱۲۸$	___	۲^{t}

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید : آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به‌دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد : نظر خودت دربارهٔ جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد : مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شود، اما مقدار $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را نمی‌دانم چقدر می‌شود؛ چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد :

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^۲$ می‌شود.
با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم : $۲=a^۲$ یعنی $a = \sqrt{۲}$. (زیرا a مثبت است.) بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{۲}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به‌صورت توانی از ۲ بنویسیم.

معادلهٔ $\sqrt{۲} = ۲^b$ را در نظر می‌گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به‌دست آوریم.

$$\boxed{\sqrt{2}=2^b} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\sqrt{2})^2=(2^b)^2 \Rightarrow 2=2^{2b} \Rightarrow 2^1=2^{2b} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

بنابراین، داریم : $\boxed{\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد : چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به‌دست آورید.

(ساعت $\frac{1}{6}$) = پس از ۱۰ دقیقه $2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$ (ساعت $\frac{1}{3}$) = پس از ۲۰ دقیقه $2^{\frac{1}{3}}$

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a<0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هرجا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که : $2^6=2^{2\times3}=(2^2)^3$

دربارهٔ توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم :

$$7^{\frac{5}{4}}=7^{5\times\frac{1}{4}}=(7^5)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7^5} \qquad 3^{\frac{2}{3}}=3^{2\times\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^2}$$

و به‌طور کلی، داریم :

هرگاه $a>0$، برای دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود :

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$۵^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^{۳}}$ $\qquad$ $۶^{\frac{۷}{۹}} = \sqrt[۹]{۶^{۷}}$ $\qquad$ $۱۲^{-\frac{۲}{۱۱}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۱]{۱۲^{۲}}}$

$(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۷}{۳})^{۸}}}$ $\qquad$ $(۰/۰۰۱)^{\frac{۱۴}{۴}} = \sqrt[۴]{(۰/۰۰۱)^{۱۴}} =$

روابطی که در ابتدای درس دربارهٔ توان‌های صحیح اعداد یادآوری شد، درخصوص توان‌های گویا و حقیقی[1] اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

(m و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m . b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به‌صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

$۳^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۳}$ $\qquad$ $۷^{\frac{۱}{۸}} = \sqrt[۸]{۷}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲۵} = ۵^{\frac{۲}{۳}}$

$\sqrt[۱۲]{۲/۷} = (۲/۷)^{\frac{۱}{۱۲}}$ $\qquad$ $(۰/۳۱)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۰/۳۱}$ $\qquad$ $\sqrt[۱۰]{۱} = ۱^{\frac{۱}{۱۰}}$

۲. با توجه به مسئلهٔ بیان شده در ابتدای معرفی توان‌های گویا، سرمایهٔ شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان‌های خواسته شده به‌دست آورید.

۶ ماه ($\frac{۱}{۲}$ سال) بعد: $۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰\times\sqrt{۱/۲}$

۳ سال و ۶ ماه بعد: $۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۷}{۲}} = ۱۰۰\times\sqrt{(۱/۲)^{۷}}$

$\frac{۱}{۲}$ سال

۲۰۰ روز بعد: $۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۲۰۰}{۳۶۵}} = ۱۰۰\sqrt[۳۶۵]{(۱/۲)^{۲۰۰}}$

۱ سال و ۲ ماه بعد: $۱۰۰\,(۱/۲)^{\frac{۷}{۶}} = ۱۰۰\sqrt[۶]{(۱/۲)^{۷}}$

$\frac{۱}{۶}$ سال

۱ـ در این کتاب، تمامی توان‌های اعداد، گویا هستند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان‌دار زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^{2\times\frac{1}{2}}=2$

$125^{-\frac{1}{3}}=(5^3)^{-\frac{1}{3}}=5^{3\times -\frac{1}{3}}=5^{-1}=\frac{1}{5}$

$100^{\frac{1}{2}}=(10^2)^{\frac{1}{2}}=10^{2\times\frac{1}{2}}=10^1=10$

$32^{\frac{1}{5}}=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2^{5\times\frac{1}{5}}=2^1=2$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$(2\times 8)^{\frac{1}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2^1=2$

$-4(1000)^{\frac{1}{3}}=-4(10^3)^{\frac{1}{3}}=-4\times 10^{3\times\frac{1}{3}}=-4\times 10=-40$

$3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3^1=3$

$7^{\frac{3}{4}}\times 7^{\frac{5}{4}}=7^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}=7^{\frac{8}{4}}=7^2=49$

$125^{\frac{2}{3}}\div 125^{\frac{1}{4}}=(125)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}=(125)^{\frac{5}{12}}=(5^3)^{\frac{5}{12}}=5^{3\times\frac{5}{12}}=5^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{5^5}=\sqrt[4]{5\times 5^4}=5\sqrt[4]{5}$

$8^{\frac{2}{7}}\times(1/5)^{\frac{2}{7}}=(8\times 1/5)^{\frac{2}{7}}=12^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{12^2}=\sqrt[7]{144}$

۵. دانش‌آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به‌صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به‌صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

$-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[4]{5^2}=5^{\frac{2}{4}}=5^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[6]{5^3}=5^{\frac{3}{6}}=5^{\frac{1}{2}}$

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=3^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{3^7}$

$5^{\frac{1}{4}}\times 5^{(-\frac{1}{4})}=5^{\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})}=5^0=1$

$8^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4$

$(2^6)^{\frac{1}{3}}=2^{6\times\frac{1}{3}}=2^2=4$

$3^{0/26}\times 3^{0/74}=3^{0/26+0/74}=3^1=3$

$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3^{4\times\frac{1}{2}}}{2^{6\times\frac{1}{2}}}=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$

$\left[\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right]^{-4}=\left(a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{-4}=\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4}=a^2$

$(m^{\frac{3}{4}}.n^{\frac{1}{2}})^2(m^2n^3)^{\frac{1}{2}}=m^{\frac{3}{2}}.n^1.m^1.n^{\frac{3}{2}}=m^{\frac{3}{2}+1}.n^{\frac{3}{2}+1}=m^{\frac{5}{2}}\times n^{\frac{5}{2}}=(mn)^{\frac{5}{2}}=\sqrt{(mn)^5}$

$(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7 \Rightarrow (0/36)^{-2+x} = (0/36)^7 \Rightarrow -2+x=7$
$\Rightarrow x=9$

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7$

$8^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 8^x \times 9^5 = 8^5 \times 9^5 \Rightarrow 8^x = 8^5$
$\Rightarrow x=5$

$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8 \Rightarrow \frac{x^5 \times 5^3 \times 3^3}{3^8} = 5^8$
$\Rightarrow x^5 \times 5^3 \times 3^{-5} = 5^8$

$(2^x)^6 = \frac{1}{3^2}$ اشتباه چاپی

جواب در پایین صفحه

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (v حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم v را از فرمول زیر به‌دست آورد.

$r = (\frac{3v}{4\pi})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \times \frac{1}{3}} = r^1 = r$

ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به‌دست آورید.

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$r = \left(\frac{3(\frac{32\pi}{3})}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$
$= \left(\frac{32\pi}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

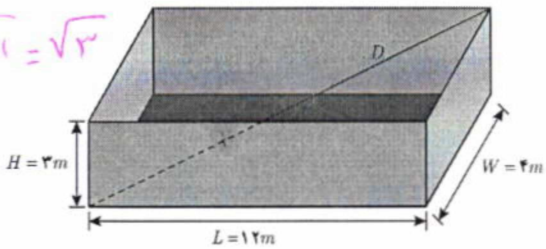
۵. اگر D قطر جعبهٔ زیر باشد، اندازهٔ آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به‌دست می‌آید.

$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144+16+9} = \sqrt{169} = 13$

الف) با توجه به شکل، اندازهٔ D را به‌دست آورید.

ب) اگر اندازهٔ $L=W=H=1m$ باشد، اندازهٔ D را به‌دست آورید.

$D = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$



۳) $(2^x)^6 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{6x} = 2^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

درس ۳

تابع نمایی

فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی ــ اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به‌کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعهٔ بازی‌های سبز» است که قرار است دانش‌آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت‌کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود.

اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحلهٔ اوّل، یکی از عوامل آلوده‌کنندهٔ محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد.

در مرحلهٔ دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحلهٔ بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحلهٔ بعد از آن ۸۱ امتیاز و... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحلهٔ ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟ $۳^{۱۶}$

برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$۳^{۰} = ۱$	۰
$۳^{۱} = ۳$	۱
$۳^{۲} = ۹$	۲
$۳^{۳} = ۲۷$	۳
? $۳^{۴} = ۸۱$	۴
۲۴۳	? ۵
? $۳^{۶} = ۷۲۹$	۶
? $۳^{۷} = ۲۱۸۷$	۷
? $۳^{۸} = ۶۵۶۱$	۸
? $۳^{۹} = ۱۹۶۸۳$	۹
? $۳^{۱۰} = ۵۹۰۴۹$	۱۰

$$\text{میزان امتیاز کسب شده} = ۳^{(\text{تکرار در مراحل بازی})}$$

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟ مرحله هشتم

۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به‌دست آورید. بله

۴. با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحلهٔ nام را به‌دست آورید؟

$a_{۱۰} = ۳^{۱۰} = ۵۹۰۴۹$ $\qquad$ $a_n = ۳^n$

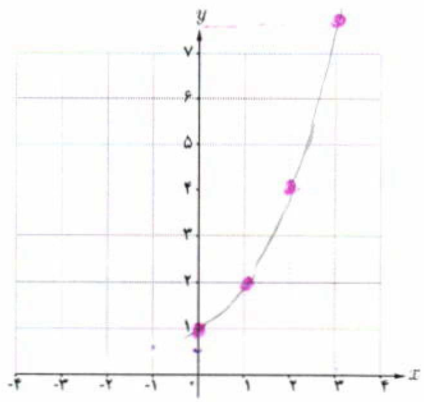
$a_{۲۰} = ۳^{۲۰} = ۳۴۸۶۷۸۴۴۰۱$

فعالیت

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به‌دست آوردیم که به عنوان تابع از ضابطهٔ $f(n) = ۲^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم؛ ← صفحه ۹۱

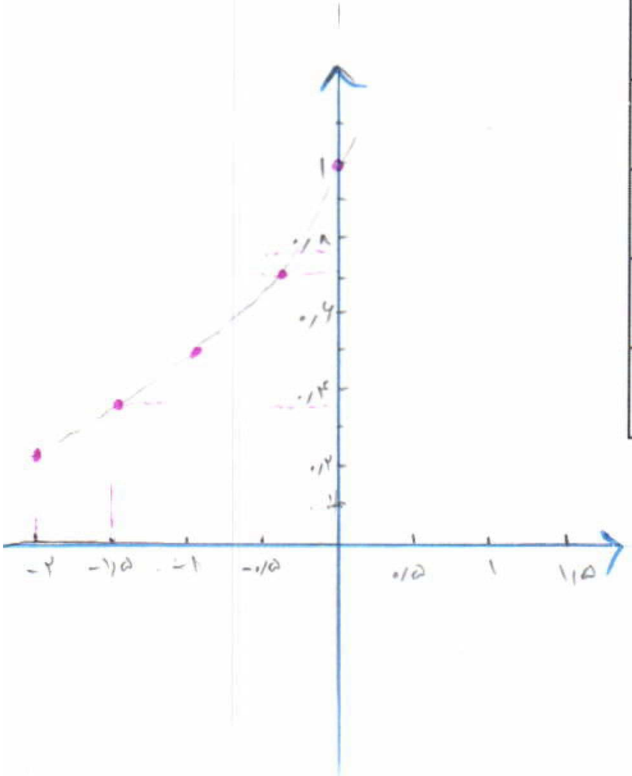
۱. مقادیر به‌دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به‌دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

x	y
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
⋮	⋮

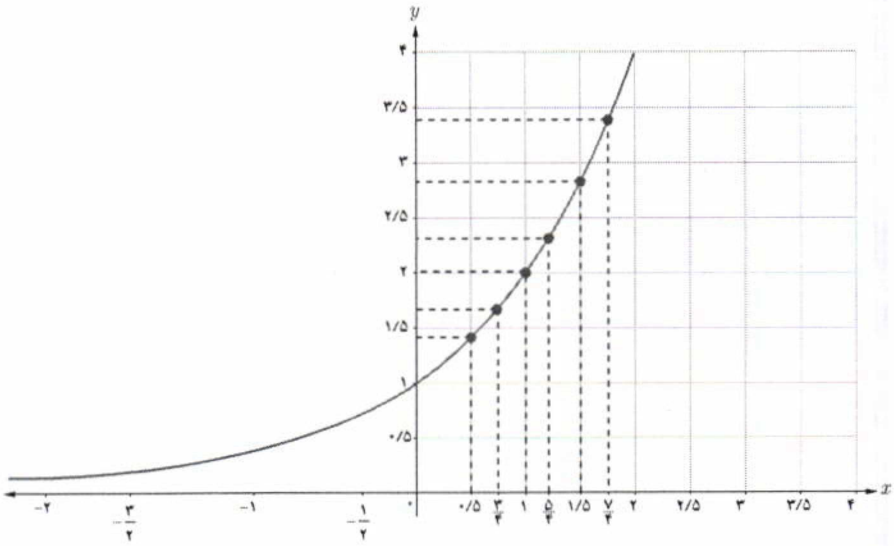


۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	۲^x
۰	۱
$-\frac{۱}{۲}$	۰/۷۰۷
-۱	۰/۵۰۰
$-\frac{۳}{۲}$	۰/۳۵۳
-۲	۰/۲۵۰



۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = ۲^x$ را برای xهای دیگر نیز به‌دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ به صورت زیر خواهد بود :



هر تابع به‌صورت $y = a^x$، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی[۱] نامیده می‌شود.

تذکر : حرف a معرف پایه و حرف x معرفِ نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی f را به‌صورت زیر تعریف کرد :

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$f(x) = a^x \qquad (a > ۰ , a \neq ۱)$

منظور از $\mathbb{R}^+$، مجموعهٔ $\{x \mid x \in \mathbb{R} , x > ۰\}$ است.

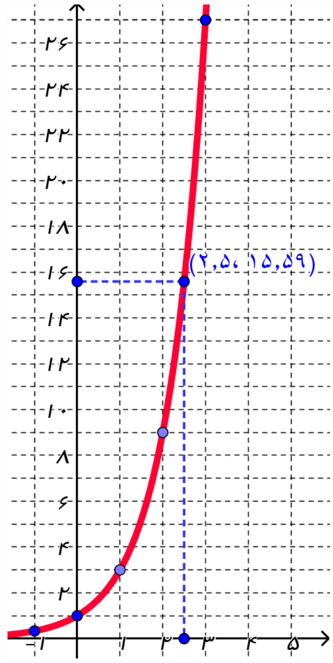
فعالیت

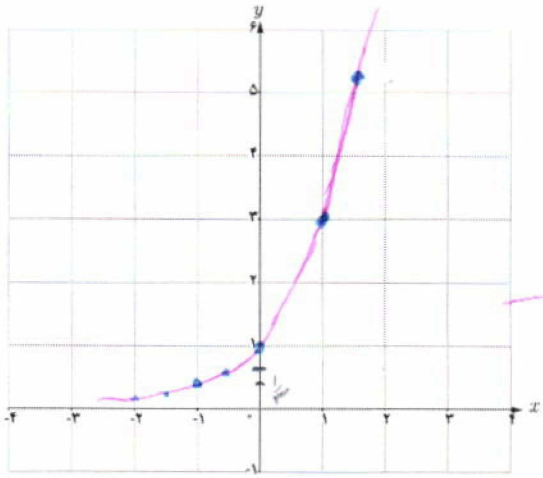
الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = ۳^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحهٔ بعد را روی محورهای مختصات به‌دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

۱ــ این تابع به این علت نمایی نامیده می‌شود که متغیر x در نما یا توان قرار دارد.

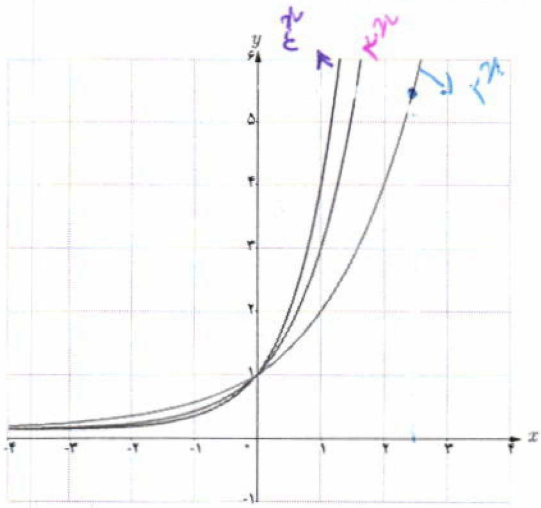
جدول ۲

x	3^x	y	محاسبهٔ y با استفاده از ماشین‌حساب تا سه رقم اعشار
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{3}{2}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{1}{2}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
0	3^{0}	1	۱
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
1	3^{1}	3	۳
$\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
2	3^{2}	9	۹





بهتر بود بخاطر جواب دادن به قسمت ب حداقل محور y ها بلندتر باشد.



همان‌گونه که دیده می‌شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطهٔ یک محور yها را قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید. ($\frac{5}{2} \to 2/5$)

پ) نمودار توابع $y = 2^x$، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

شباهت

۱- هرسه نمودار y ها را نقطه (۰و۱) قطع می‌کنند

۲- هرسه تابع صعودی هستند

۳- با محور طول ها برخورد نمی‌کنند

تفاوت

در طول $x=1$ y هایشان با هم فرق دارد.

میزان افزایش مقدار عرضهایشان با هم متفاوت است

فعالیت

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک‌بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است.

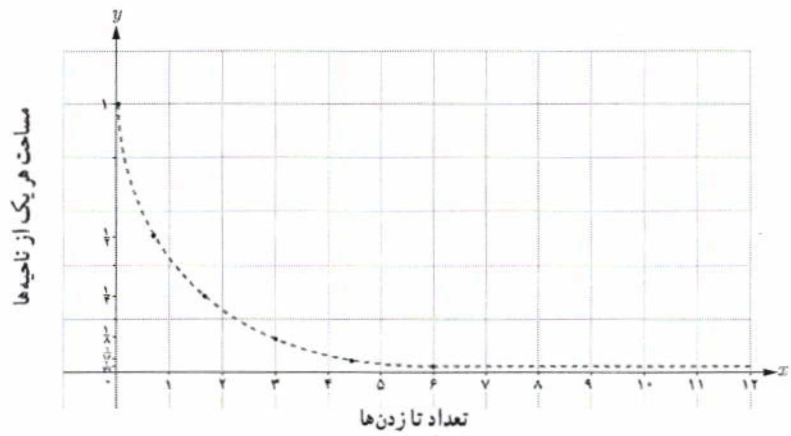
جدول ۳

تعداد تا زدن‌ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۲}$
۲	$\frac{۱}{۴}$
۳	$\frac{۱}{۸}$
۴	؟ $\frac{۱}{۱۶}$
؟	$\frac{۱}{۳۲}$
⋮	⋮
۸	؟ $\frac{۱}{۲۵۶}$
؟	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟

در نمودار زیر، رابطهٔ تعداد تا زدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها نمایش داده شده است.



نقطهٔ تقاطع منحنی با محور yها چیست؟ باید $y=1$ ← نقطه $(0,1)$

فعالیت

۱. تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

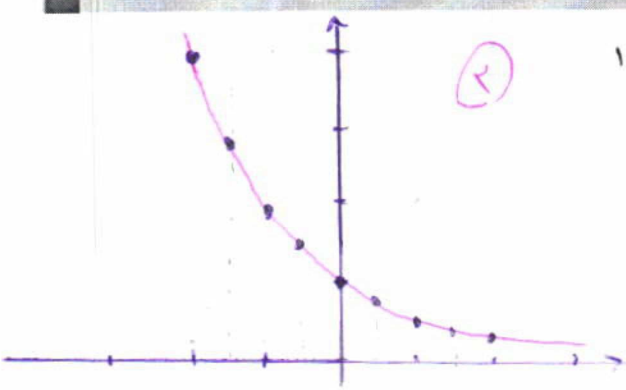
جدول ۴

x	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}$	۴	۴
$-\frac{۳}{۲}$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۳}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}$	$\sqrt{۸}$	۲٫۸۲۸
-۱	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۱}$	۲	۲
$-\frac{۱}{۲}$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۱}{۲}}$	$\sqrt{۲}$	۱٫۴۱۴
۰	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}$	۱	۱
$\frac{۱}{۲}$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$	$\sqrt{۰/۵}$	۰/۷۰۷
۱	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۵
$\frac{۳}{۲}$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}$	$\sqrt{۰/۵^{۳}}$	۰/۳۵۳
۲	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۰/۲۵

۲. نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را روی صفحهٔ مختصات به‌دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار، مقدار تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟ بله

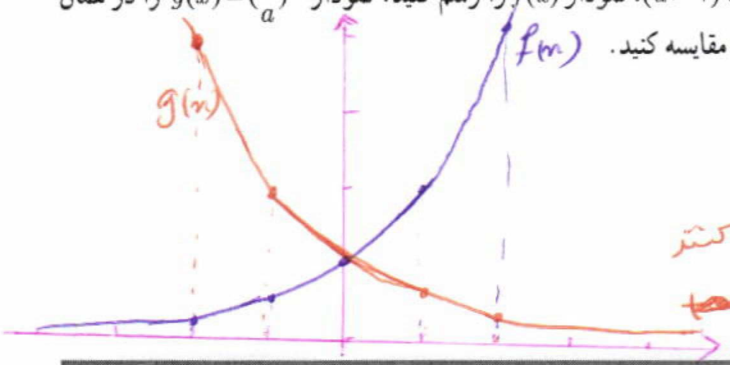
۳. نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را با نمودار تابع $y=۲^x$، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟ $y=۲^x$ یک تابع صعودی ولی $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ یک تابع نزولی است.

در تابع نمایی $y=a^x$، اگر $۰<a<۱$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.



کار در کلاس

تابع نمایی $f(x)=a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد a ($a>1$)، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x)=(\frac{1}{a})^x$ را در همان صفحهٔ مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.



$a=2$ $\qquad f(x)=2^x$

$g(x)=(\frac{1}{2})^x$

هر دو در نقطه (۱،۰) محور y ها را قطع می‌کنند

هر دو با محور x ها برخورد نمی‌کنند

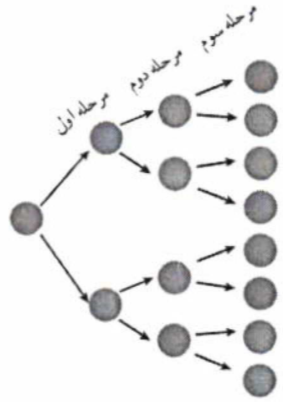
دامنه هر دو $\mathbb{R}$ است و برد هر دو $(0,+\infty)$ است. ولی $f(x)$ صعودی و $g(x)$ نزولی است.

تمرین

۱. در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

۲، ۴، ۸، ...

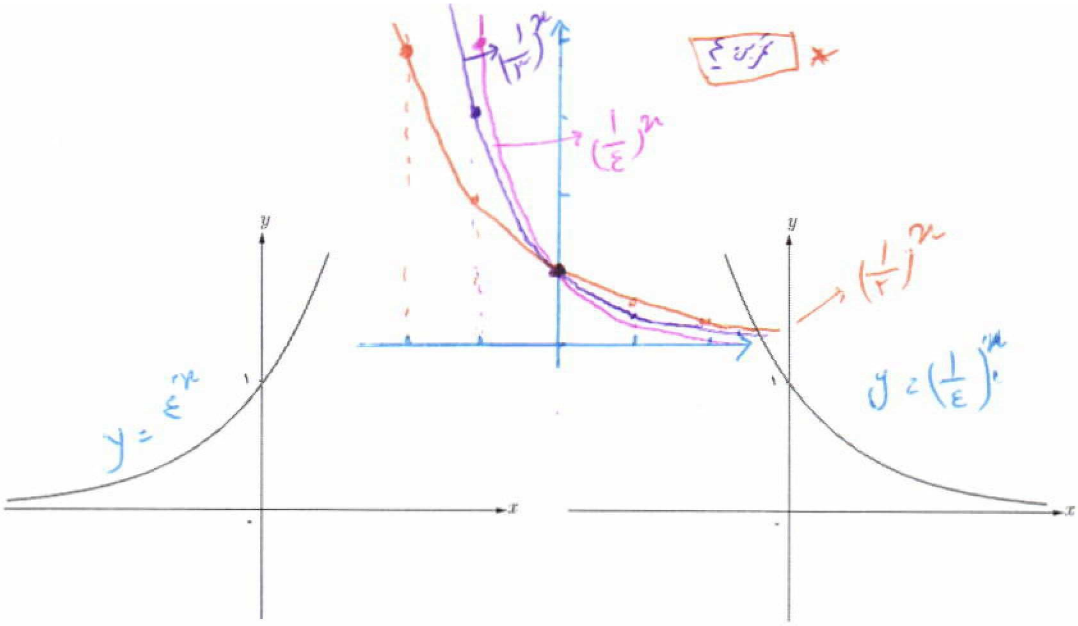
الف) $2^n=2048 \Rightarrow 2^n=2^{11} \Rightarrow n=11$

ب) $2^8=256$

$2^{\text{تعداد مراحل}}=$ تعداد سلول ها

۲. یک نمونهٔ واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y=4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحهٔ مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

هر سه محور yها را در نقطهٔ (۰،۱) قطع می‌کنند، هر سه نزولی هستند. هر سه محور xها را قطع نمی‌کنند هر سه دامنه برابر $\mathbb{R}$ و برد برابر $(0, +\infty)$ دارند.

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

اما میزان کاهش مقدارعرضهایشان با هم فرق دارد

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم :

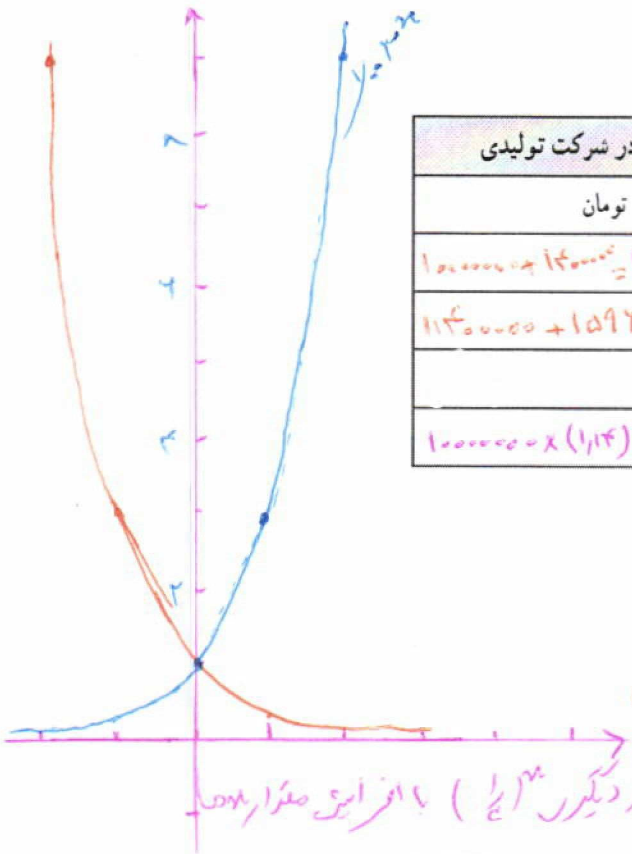
فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرمودهٔ رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکنندهٔ کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

جدول زیر را در نظر بگیرید؛

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	۱۰۰۰۰۰۰۰ + ۱۴۰۰۰۰۰ = ۱۱۴۰۰۰۰۰
۱۹	۱۱۴۰۰۰۰۰ + ۱۵۹۶۰۰۰ = ۱۲۹۹۶۰۰۰
⋮	
۲۳	$10000000 \times (1{,}14)^6 = 21949726{,}23$



۵

هر دو نمودار محور yها در نقطهٔ (۰،۱) قطع می‌کنند
هر دو با محور xها برخورد نمی‌کنند
در هر دو $\mathbb{R} = (0, +\infty), D = \mathbb{R}$
اما در یکی (3^x) با افزایش xها، مقدار yها افزایش می‌یابد و در دیگری ($(\frac{1}{3})^x$) با افزایش مقدار xها مقدار yها کاهش می‌یابد.

برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک‌سال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به‌دست آورید.

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰+\left(\overset{10000000}{\cdots}\times\frac{۱۴}{۱۰۰}\right)=\overset{1000000}{\cdots}+۱,۴۰۰,۰۰۰=۱۱,۴۰۰,۰۰۰$$

بنابراین، در جدول شمارهٔ ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

درواقع، باید میزان مبلغ سپرده‌گذاری‌شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده‌گذاری‌شده را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه‌گذاری اولیه) به‌دست آوریم:

$$۱۱,۴۰۰,۰۰۰+\overset{\frac{14}{100}\times 11400000}{\cdots}=\underset{11400000}{\cdots}+\overset{1596000}{\cdots}=\cdots 12996000$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰\times(۱/۱۴)^{۲}=۱۲,۹۹۶,۰۰۰$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به‌دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

$n=4$

معادلهٔ کلی رشد نمایی، به‌صورت $f(t)=c(۱+r)^{t}$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات برحسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادلهٔ کلی که بیانگر مبلغ سرمایه‌گذاری پس از t سال است، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(t)=۱۰,۰۰۰,۰۰۰\times(۱+۰/۱۴)^{t}$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کرهٔ زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کرهٔ زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کرهٔ زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضع جمعیت کرهٔ زمین را در هر دورهٔ زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$y=5,2\times(1+0,02)^{30}=5,2\times 1,81=9,412$

$y=5,2\times(1+0,02)^{35}=5,2\times 1,99=10,348$

تقریباً در هر ۳۵ سال دو برابر میشود

زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادلهٔ کلی زوال نمایی، به فرم $f(t)=c(۱-r)^{t}$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول برحسب اعشار و t بیانگر زمان است.

$y=5,2\times(1,02)^{70}=5,2\times 3,99=20,748$

$y=5,2\times(1,02)^{105}=5,2\times 7,99=41,548$

مثال : جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل : با جای‌گذاری r ،c و t در معادلهٔ کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با :

$$y = ۴۰,۰۰۰,۰۰۰\,(۱ - ۰/۰۱)^{۱۸} = ۳,۳۳۸,۶۰۰$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکنندهٔ محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام‌داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایهٔ این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به‌صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به‌دست آورید. در صفحه بعد

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید. در صفحه بعد

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟ سال دهم به بعد $\rightarrow g(۱۰) > f(۱۰)$

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟ بین ۹ سال و ۱۰ سال

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟ گربه ها زیاد و زیادتر و موش ها کم و کمتر میشوند.

(۱) $y = ۴۰۰۰۰۰۰۰ \times (۱ + ۰/۱۴)^{۱۰} = ۴۰۰۰۰۰۰۰ \times ۳/۷۰۷ = ۱۴۸۲۸۰۰۰۰$

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

(۲) $y = ۱۰۰۰۰۰۰ \times (۱ + ۰/۰۶)^{۱۰} = ۱۰۰۰۰۰۰ \times ۱/۷۹ = ۱۷۹۰۰۰۰$

(۳) موش $f(n) = ۲۳۵۷۶\,(۱ - ۰/۰۲۵)^{t} = ۲۳۵۷۶\,(۰/۹۷۵)^{t}$

گربه $g(n) = ۱۵۷۸۶\,(۱ + ۰/۰۱۸)^{t} = ۱۵۷۸۶\,(۱/۰۱۸)^{t}$

ب) $f(۹) > g(۹)$

$f(۱۰) < g(۱۰)$

پس بین ۹ سال و ۱۰ سال برابر میشوند.

۱۰۵/۱

الف)

$f(۱) = ۲۳۵۷۴ \times (۰/۹۷۵)^{۱} = ۲۲۹۸۴/۴$

$f(۲) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵)^{۲}}_{۰/۹۵} = ۲۲۳۹۷/۲$

$f(۳) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۹۲})^{۳} = ۲۱۴۸۹/۹۲$

$f(۴) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۹۰۳})^{۴} = ۲۱۲۱۸/۴$

$f(۵) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۸۸})^{۵} = ۲۰۷۴۴/۸۸$

$f(۶) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۸۵})^{۶} = ۲۰۰۳۹/۴$

$f(۷) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۸۳})^{۷} = ۱۹۵۶۸/۰۸$

$f(۸) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۸۱})^{۸} = ۱۹۰۹۴/۵۴$

$f(۹) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۷۹})^{۹} = ۱۸۶۲۵/۰۴$

$f(۱۰) = ۲۳۵۷۴ \times (\underbrace{۰/۹۷۵}_{۰/۷۷})^{۱۰} = ۱۸۱۵۲/۵۲$

ب)

$g(۱) = ۱۵۷۸۴ (۱/۰۱۸)^{۱} = ۱۶۰۷۰/۴۸$

$g(۲) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۰۳})^{۲} = ۱۶۲۵۹/۵۸$

$g(۳) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۰۵})^{۳} = ۱/۰۵۴۹$

$g(۴) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۰۷})^{۴} = ۱۶۸۹۱/۰۲$

$g(۵) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۰۹})^{۵} = ۱۷۲۰۶/۷۴$

$g(۶) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۱۱})^{۶} = ۱۷۵۲۲/۴۶$

$g(۷) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۱۳})^{۷} = ۱۷۸۳۸/۱۸$

$g(۸) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۱۵})^{۸} = ۱۸۱۵۳/۹$

$g(۹) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۱۷})^{۹} = ۱۸۴۶۹/۶۲$

$g(۱۰) = ۱۵۷۸۴ (\underbrace{۱/۰۱۸}_{۱/۱۹})^{۱۰} = ۱۸۷۸۵/۳۴$