بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

فصل ۳

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۳

درس ۳

ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

اهداف

- به کارگیری ویژگی های لگاریتم (قضیه های لگاریتم) در یافتن مقدار لگاریتم یک عدد
- حل معادلات لگاریتمی
- آشنایی با کاربردهای تابع لگاریتمی

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی های لگاریتم می پردازیم.

صفحه ۸۶ کتاب درسی

ویژگی های لگاریتم:

۱ اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، همواره داریم: $\log_a ۱ = ۰$

اثبات: از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

$$a^{۰} = ۱ \iff \log_a ۱ = ۰$$

۲ اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، همواره داریم: $\log_a a = ۱$

اثبات: از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

$$a^{۱} = a \iff \log_a a = ۱$$

۳ اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، همواره داریم: $\log_a \left(\frac{۱}{a}\right) = -۱$

اثبات: از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

$$a^{-۱} = \frac{۱}{a} \iff \log_a \left(\frac{۱}{a}\right) = -۱$$

صفحه ۸۶ کتاب درسی

ویژگی های لگاریتم:

۴ اگر a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت باشند و c مخالف یک باشد، همواره داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

مقادیر m و n را اینچنین تعریف می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} m = \log_c a \iff c^m = a \\ n = \log_c b \iff c^n = b \end{array}\right\} \to ab = c^m . c^n = c^{m+n}$$

حال از تبدیل تساوی نمایی به تساوی لگاریتمی استفاده می کنیم.

$$ab = c^{m+n} \iff \log_c ab = m + n \quad \to \quad \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log_{۱۰} ۲ \cong ۰/۳$ و $\log_{۱۰} ۳ \cong ۰/۴۸$ باشد، با توجه به آنها مقدار $\log_{۱۰} ۶$ را حساب کنید.

$$\log_{۱۰} ۶ = \log_{۱۰}(۲ \times ۳) = \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳ \cong ۰/۳ + ۰/۴۸ \cong ۰/۷۸$$

صفحه ۸۶ کتاب درسی

ویژگی های لگاریتم:

۵ اگر a ، b اعدادی حقیقی و مثبت و a مخالف یک باشد، به ازای هر $n \in \mathbb{R}$ همواره داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات: فرض می کنیم n عضو مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد.

از ویژگی شمارهٔ ۴ (تبدیل ضرب به جمع) استفاده می کنیم.

$$\log_a b^n = \log_a(\underbrace{b \times b \times b \times \ \dots \times b}_{n \text{ بار}}) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \log_a b + \ \dots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

حال نتیجه را برای عدد حقیقی n تعمیم می دهیم.

تعمیم آن روی مجموعه اعداد حقیقی را در این درس بدون اثبات می پذیریم.

مثال: فرض کنید $\log_{۱۰} ۲ \cong ۰/۳$ باشد، با توجه به آنها مقدار $\log_{۱۰} ۲^۳$ را حساب کنید.

$$\log_{۱۰} ۲^۳ = \log_{۱۰}(۲ \times ۲ \times ۲) = \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۲ = ۳ \log_{۱۰} ۲ \cong ۳(۰/۳) \cong ۰/۹$$

نتیجه : $\log_a a^n = n \log_a a = n$

لگاریتم اعشاری (دهدهی)

صفحه ۸۶ کتاب درسی

لگاریتم x در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می نامیم. یعنی: $\log_{۱۰} x$

در این حالت مبنا نوشته نمی شود. به بیان دیگر هرگاه مبنا نوشته نشود، ما آن را ۱۰ در نظر می گیریم.

$$\log_{۱۰} x = \log x$$

مثال صفحه ۸۶ کتاب درسی

فرض کنیم $a = \log ۲$. نشان دهید $\log ۵ = ۱ - a$

$$\log ۱۰ = \log(۵ \times ۲) = \log ۵ + \log ۲$$

می دانیم لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک؛ در مبنای خودش برابر یک است. پس داریم: $\log ۱۰ = ۱$

$$\log ۱۰ = \log ۵ + \log ۲ \rightarrow ۱ = \log ۵ + \log ۲ \xrightarrow{a = \log ۲} ۱ = \log ۵ + a \rightarrow \log ۵ = ۱ - a$$

کار در کلاس ۱ صفحه ۸۷ کتاب درسی

ویژگی های لگاریتم:

۶ اگر a ، b و c اعدادی حقیقی و مثبت باشند و a مخالف یک باشد، همواره داریم:

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

مقادیر m و n را اینچنین تعریف می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} m = \log_c a \iff c^m = a \\ n = \log_c b \iff c^n = b \end{array}\right\} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c^m}{c^n} = c^{m-n}$$

حال از تبدیل تساوی نمایی به تساوی لگاریتمی استفاده می کنیم.

$$\frac{a}{b} = c^{m-n} \iff \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = m - n \quad \rightarrow \quad \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log ۲ \cong ۰/۳$ باشد، با توجه به آنها مقدار $\log ۵$ را حساب کنید.

$$\log ۵ = \log(۱۰ \div ۲) = \log ۱۰ - \log ۲ \cong ۱ - ۰/۳ \cong ۰/۷$$

کار در کلاس ۲ صفحه ۸۷ کتاب درسی

اگر $a = \log ۲$ و $b = \log ۳$ ، حاصل عبارت های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

الف) $\log ۰/۷۵ = \log\left(\frac{۷۵}{۱۰۰}\right) = \log\left(\frac{۳}{۴}\right) = \log ۳ - \log ۴ = \log ۳ - \log ۲^۲ =$

$\log ۳ - ۲\log ۲ = b - ۲a$

ب) $۳\log \sqrt[۳]{۴} - \log ۲۵۰ = \log\left(\sqrt[۳]{۴}\right)^۳ - \log ۲۵۰ = \log ۴ - \log ۲۵۰ = \log ۴ - \log\left(\frac{۱۰۰۰}{۴}\right) =$

$\log ۴ - (\log ۱۰۰۰ - \log ۴) = ۲\log ۴ - \log ۱۰۰۰ =$

$۲\log ۲^۲ - \log ۱۰^۳ = ۴\log ۲ - ۳\log ۱۰ = ۴a - ۳$

پ) $\log ۰/۰۰۵ = \log\left(\frac{۵}{۱۰۰۰}\right) = \log ۵ - \log ۱۰۰۰ = \log\left(\frac{۱۰}{۲}\right) - \log ۱۰۰۰ =$

$\log ۱۰ - \log ۲ - \log ۱۰۰۰ = \log ۱۰ - \log ۲ - \log ۱۰^۳ =$

$\log ۱۰ - \log ۲ - ۳\log ۱۰ = -a - ۲$

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : اگر $\log ۲ \cong ۰/۳$ و $\log ۳ \cong ۰/۴۸$ باشد، مقدار تقریبی هر یک از اعداد زیر را به دست آورید.

الف) $\log ۱۲ = \log(۴ \times ۳) = \log ۲^۲ + \log ۳ = ۲\log ۲ + \log ۳ \cong ۲(۰/۳) + ۰/۴۸ \cong ۱/۰۸$

ب) $\log \sqrt{۵} = \log ۵^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log ۵ \cong \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۱۰}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(\log ۱۰ - \log ۲) \cong \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۳) \cong ۰/۳۵$

پ) $\log\left(\frac{۲۵}{۱۸}\right) = \log ۲۵ - \log ۱۸ = \log ۲۵ - (\log(۹ \times ۲)) = \log ۵^۲ - (\log ۳^۲ + \log ۲) =$

$۲\log ۵ - ۲\log ۳ - \log ۲ \cong ۲(۰/۷) - ۲(۰/۴۸) - ۰/۳ \cong ۰/۱۴$

$\log ۵ = \log(۱۰ \div ۲) = \log ۱۰ - \log ۲ \cong ۱ - ۰/۳ \cong ۰/۷$

صفحه ۸۷ کتاب درسی

معادلات لگاریتمی

در برخی از مدل سازی های ریاضی به یک معادلهٔ شامل عبارت های لگاریتمی می رسیم. در حل بسیاری از این معادلات، جواب ها با استفاده از خواص لگاریتم به دست می آیند که به این معادلات، **معادلات لگاریتمی** می گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند.

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و بالعکس، اگر $x,y>0$ و $x=y$ آنگاه $\log_a x = \log_a y$.

مثال:

- ✓ $\log(x+1)=3$
- ✓ $\log_3 x = \log_3 r$
- ✓ $\log_3 x + \log_3(x-1) = \log_3 12$

مثال صفحه ۸۷ کتاب درسی

معادلهٔ لگاریتمی $\log_{5} x = \log_{5}(x^{2} - 2)$ را حل کنید.

در طرفین این معادله؛ عبارت های لگاریتمی با مبنای یکسان وجود دارد. برای حل این گونه معادلات می توان از لگاریتم موجود در طرفین معادله صرف نظر کرد و بدون آنها معادله تشکیل داد.

$$x^{2} - 2 = x \quad \Rightarrow \quad x^{2} - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول

آموخته ایم که عبارت مقابل لگاریتم همواره مقداری مثبت است.

لذا عبارت مقابل لگاریتم را بزرگ تر از صفر در نظر گرفته و مجموعه جواب قابل قبول مقادیر x را به دست می آوریم. جواب معادله می بایست در این مجموعه قرار داشته باشد؛ در غیر این صورت آن جواب قابل قبول نیست.

در این سوال xهای بزرگتر از $\sqrt{2}$ قابل قبول هستند.

مثال صفحه ۸۷ کتاب درسی

معادلهٔ لگاریتمی $۳\log_۵ x - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$ را حل کنید.

$$۳\log_۵ x - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶ \quad \to \quad \log_۵ x^۳ - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶ \to \log_۵ \left(\frac{x^۳}{۴}\right) = \log_۵ ۱۶$$

در طرفین این معادله؛ عبارت های لگاریتمی با مبنای یکسان وجود دارد. برای حل این گونه معادلات می توان از لگاریتم موجود در طرفین معادله صرف نظر کرد و بدون آنها معادله تشکیل داد.

$$\frac{x^۳}{۴} = ۱۶ \quad \to \quad x^۳ = ۶۴ \quad \to \quad x = ۴$$

در این سوال xهای بزرگتر از صفر قابل قبول هستند.

فعالیت صفحه ۸۸ کتاب درسی

معادله های لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف $\log_{۵}(۲x-۱)=\log_{۵} x$

در طرفین این معادله؛ عبارت های لگاریتمی با مبنای یکسان وجود دارد. برای حل این گونه معادلات می توان از لگاریتم موجود در طرفین معادله صرف نظر کرد و بدون آنها معادله تشکیل داد.

$$۲x-۱=x \quad \Rightarrow \quad x=۱$$

عبارت مقابل لگاریتم ها را بزرگتر از صفر قرار می دهیم. در این سوال xهای بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ قابل قبول هستند.

ب $\log_{۳}(x-۱)+\log_{۳}\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۲ \quad \Rightarrow \quad \log_{۳}(x-۱)\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۲$

معادلهٔ لگاریتمی را به معادلهٔ نمایی تبدیل می کنیم. پس داریم:

$$(x-۱)\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۳^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x-۱=۹ \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۲۰=۰ \quad \Rightarrow \quad (x+۵)(x-۴)=۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} x=-۵ & \text{غیر قابل قبول} \\ x=۴ \end{cases}$$

عبارت مقابل لگاریتم ها را بزرگتر از صفر قرار می دهیم. در این سوال xهای بزرگتر از یک قابل قبول هستند.

فعالیت صفحه ۸۸ کتاب درسی

معادله های لگاریتمی زیر را حل کنید.

پ) $\log x + \log(x+۳) = ۱ \implies \log x(x+۳) = ۱$

معادلهٔ لگاریتمی را به معادلهٔ نمایی تبدیل می کنیم. پس داریم:

$$x(x+۳) = ۱۰^۱ \implies x^۲ + ۳x - ۱۰ = ۰$$

$$\implies (x+۵)(x-۲) = ۰ \implies \begin{cases} x = -۵ & \text{غیر قابل قبول} \\ x = ۲ \end{cases}$$

عبارت مقابل لگاریتم ها را بزرگتر از صفر قرار می دهیم. در این سوال xهای بزرگتر از صفر قابل قبول هستند.

تهیه و تنظیم : مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

صفحه ۸۸ کتاب درسی

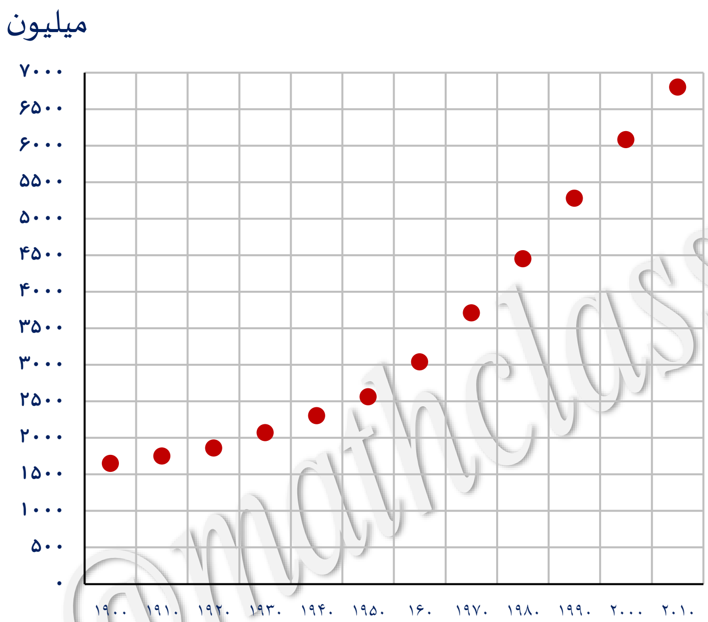
کاربرد توابع لگاریتمی

تابعی لگاریتمی نیز در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهرشده و کاربرد دارد.

به عنوان مثال: جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست و یکم نشان می دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰

الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است:



ب) اگر محور xها بیانگر سال و محور yها بیانگر جمعیت باشد، $y = g(x)$ تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت زیر برآورد می شود.

$$g(x) = ۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^x$$

به سادگی دیده می شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با:

$$g(۲۰۱۶) = ۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^{۲۰۱۶} \cong ۷۳۸۵۰۷۴۵۱۲$$

می خواهیم حدس بزنیم که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد می رسد.

$$g(x) = ۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^x = ۸ \times ۱۰^۹$$

$$۸ \times ۱۰^{-۳} \times (۱/۰۱۳۷۶)^x = ۸ \times ۱۰^۹ \rightarrow (۱/۰۱۳۷۶)^x = ۱۰^{۱۲}$$

$$\rightarrow \log(۱/۰۱۳۷۶)^x = \log ۱۰^{۱۲} \rightarrow x \log ۱/۰۱۳۷۶ = \log ۱۰^{۱۲} \rightarrow x = \frac{\log ۱۰^{۱۲}}{\log ۱/۰۱۳۷۶} = \frac{۱۲}{\log ۱/۰۱۳۷۶}$$

صفحه ۸۹ کتاب درسی

کاربرد توابع لگاریتمی

به عنوان مثال:

ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ زلزله برابر (E) در واحد اِرگ (Erg) خواهد بود و از تابع لگاریتمی با ضابطهٔ زیر به دست می آید:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

مقدار انرژی آزاد شده در زلزلهٔ ۶/۶ ریشتری شهر بم (دی ماه ۱۳۸۲) برابر است با:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) = ۲۱/۷ \quad \Longrightarrow \quad E = ۱۰^{۲۱/۷}\, Erg$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : زلزلهٔ ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار- منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷/۴) = ۲۲/۹ \quad \Longrightarrow \quad E = ۱۰^{۲۲/۹}\ Erg$$

صفحه ۸۹ کتاب درسی

نیمه عمر یک نوع ماده هسته ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه ای از این ماده، ۲۴ میلی گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می دهد.

زمان t (سال)	جرم $m(t)$ (میلی گرم)
۰	۲۴
۲۵	$\frac{۱}{۲}(۲۴) = ۱۲$
۵۰	$\frac{۱}{۲^۲}(۲۴) = ۶$
۷۵	$\frac{۱}{۲^۳}(۲۴) = ۳$
۱۰۰	$\frac{۱}{۲^۴}(۲۴) = ۱/۵$

باتوجه به جدول جرم باقی مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴) = ۲۴ \times ۲^{\frac{-t}{۲۵}}$$

بنابراین، به عنوان مثال جرم باقی مانده پس از ۴۰ سال برابر است با:

$$m(۲۴) = ۲۴ \times ۲^{\frac{-۴۰}{۲۵}} \cong ۷/۹ \text{ میلی گرم}$$

تمرین ۱ صفحه ۹۰ کتاب درسی

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۴} m^{۲} - \log_{۴} m - ۳ = ۰$

$$\rightarrow \log_{۴} m^{۲} - \log_{۴} m = ۳ \rightarrow \log_{۴} \frac{m^{۲}}{m} = ۳ \rightarrow \log_{۴} m = ۳ \rightarrow m = ۴^{۳} = ۶۴$$

ب) $\log_{۲}(۱۲b - ۲۱) - \log_{۲}(b^{۲} - ۳) = ۲ \rightarrow \log_{۲} \frac{۱۲b - ۲۱}{b^{۲} - ۳} = ۲$

$$\rightarrow \frac{۱۲b - ۲۱}{b^{۲} - ۳} = ۲^{۲} \rightarrow \frac{۱۲b - ۲۱}{b^{۲} - ۳} = ۴ \rightarrow ۴b^{۲} - ۱۲ = ۱۲b - ۲۱$$

$$\rightarrow ۴b^{۲} - ۱۲b + ۹ = ۰ \rightarrow \frac{۱}{۴}(۴b - ۶)^{۲} = ۰ \rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

در این سوال xهای بزرگتر از $\frac{۷}{۴}$ قابل قبول هستند. زیرا داریم:

$$b^{۲} - ۳ > ۰ \rightarrow b^{۲} > ۳$$

$$۱۲b - ۲۱ > ۰ \rightarrow b > \frac{۲۱}{۱۲} = \frac{۷}{۴}$$

تمرین ۱ صفحه ۹۰ کتاب درسی

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

پ) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^۲ - ۱) = -۱$

$$\rightarrow\ x^۲ - ۱ = \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{-۱} \rightarrow\ x^۲ - ۱ = ۱۰^۱ \rightarrow\ x^۲ = ۹ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۳ \end{cases}$$

در این سوال xهای بزرگتر از یک و کوچک تر از منفی یک قابل قبول هستند. زیرا داریم:

$$x^۲ - ۱ > ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow \begin{cases} x > ۱ \\ x < -۱ \end{cases}$$

تمرین ۲ صفحه ۹۰ کتاب درسی

الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل دیدیم که جرم باکتری ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^t$ به دست می آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$p = m(t) = ۲^t \quad \rightarrow \quad t = \log_۲ p$ زمان رسیدن به جرم p

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری ها حدود ۵۰۰۰ گرم می شود؟ $\log ۲ \cong ۰/۳۰۱$

$$m(t) = ۲^t = ۵۰۰۰ \quad \rightarrow \quad t = \log_۲ ۵۰۰۰$$

$$\log_۲ ۵۰۰۰ = \frac{\log_{۱۰} ۵۰۰۰}{\log_{۱۰} ۲} = \frac{\log(۵ \times ۱۰۰۰)}{\log ۲} = \frac{\log ۵ + \log ۱۰۰۰}{\log ۲}$$

$$= \frac{(\log ۱۰ - \log ۲) + \log ۱۰۰۰}{\log ۲} = \frac{۱ - ۰/۳۰۱ + ۳}{۰/۳۰۱} = \frac{۳/۶۹۹}{۰/۳۰۱} \cong ۱۲/۲۹$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$ (a، b و c اعداد حقیقی مثبت اند و a و c مخالف یک می باشند.)

تمرین ۳ صفحه ۹۰ کتاب درسی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را بررسی کنید.

الف) $a^{\log_b a} = a$ (a و b اعداد حقیقی مثبت اند و b مخالف یک می باشند.)

مقدار m را اینچنین تعریف می کنیم: $\log_b a = m$. در نتیجه داریم:

$$\log_b a = m \rightarrow b^m = a \rightarrow b^{\log_b a} = b$$

نادرست

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$ (a، b، c و d اعداد حقیقی مثبت اند و d مخالف یک می باشد.)

از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

مقادیر m و n و k را اینچنین تعریف می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} m = \log_d a \Leftrightarrow d^m = a \\ n = \log_d b \Leftrightarrow d^n = b \\ k = \log_d c \Leftrightarrow d^k = c \end{array}\right\} \rightarrow abc = d^m . d^n . d^k = d^{m+n+k}$$

حال از تبدیل تساوی نمایی به تساوی لگاریتمی استفاده می کنیم.

$$abc = d^{m+n+k} \Leftrightarrow \log_d abc = m + n + k$$

$$\rightarrow \log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$$

درست

تمرین ۳ صفحه ۹۰ کتاب درسی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را بررسی کنید.

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

نادرست

مثال نقض : $\log ۱۰ \times \log ۱۰۰ \neq \log ۱۰ + \log ۱۰۰$

$$۱ \times ۲ \neq ۱ + ۲$$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

نادرست

مثال نقض : $\log_۲ \left(\frac{۱}{۲}\right) = \log_۲ ۲^{-۱} = -۱$

تمرین ۴ صفحه ۹۰ کتاب درسی

نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند، بیابید.

$$m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۴}}}(۱) = ۱ \times ۲^{\frac{-t}{۴}}$$

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می یابد؟

$$۰/۰۱ = ۲^{\frac{-t}{۴}} \quad \rightarrow \quad \log ۰/۰۱ = \log ۲^{\frac{-t}{۴}}$$

$$\rightarrow \quad \log ۱۰^{-۲} = \frac{-t}{۴} \log ۲$$

$$\rightarrow \quad -۲ = \frac{-t}{۴} \log ۲$$

$$\rightarrow \quad ۸ = t \log ۲ \quad \rightarrow \quad t = \frac{۸}{\log ۲} = \frac{۸}{۰/۳۰۱} \cong ۲۷$$

تمرین ۵ صفحه ۹۰ کتاب درسی

عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \cong ۰/۴۷۷۱ \quad , \quad \log ۲ \cong ۰/۳۰۱)$

الف) $\log(۱۸ \times ۳۷۵) =$

$$\log ۱۸ + \log ۳۷۵ =$$

$$\log(۹ \times ۲) + \log(۱۲۵ \times ۳) =$$

$$\log ۹ + \log ۲ + \log ۱۲۵ + \log ۳ =$$

$$\log ۳^{۲} + \log ۲ + \log ۵^{۳} + \log ۳ =$$

$$۲ \log ۳ + \log ۲ + ۳ \log ۵ + \log ۳ =$$

$$۲ \log ۳ + \log ۲ + ۳(۱ - \log ۲) + \log ۳ =$$

$$۳ \log ۳ - ۲ \log ۲ + ۳ \cong$$

$$۳(۰/۴۷۷۱) - ۲(۰/۳۰۱) + ۳ = ۱/۴۳۱۳ - ۰/۶۰۲ + ۳ \cong ۳/۸۲۹۳$$

تمرین ۵ صفحه ۹۰ کتاب درسی

عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \cong ۰/۴۷۷۱ \;,\; \log ۲ \cong ۰/۳۰۱)$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵} =$

$$\log(۰/۷۵)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log(۰/۷۵) = \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۷۵}{۱۰۰}\right) = \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۳}{۴}\right) =$$

$$\frac{۱}{۲}\log ۳ - \frac{۱}{۲}\log ۴ = \frac{۱}{۲}\log ۳ - \frac{۱}{۲}\log ۲^{۲} =$$

$$\frac{۱}{۲}\log ۳ - \log ۲ = \frac{۱}{۲}(۰/۴۷۷۴) - ۰/۳۰۱ \cong -۰/۰۶۲۳$$

پ) $\log_{۲}\dfrac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}} =$

$$\log_{۲}\sqrt{۸} - \log_{۲}\sqrt[۴]{۲} = \log_{۲} ۲^{\frac{۳}{۲}} - \log_{۲} ۲^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۲}\log_{۲} ۲ - \frac{۱}{۴}\log_{۲} ۲ = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

تمرین ۶ صفحه ۹۰ کتاب درسی

اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ عبور $\left(\frac{۱}{۲}, -۴\right)$ کند، مقدار a چند است؟

$$f(x) = \log_a x \xrightarrow{\left(\frac{۱}{۲}, -۴\right)} -۴ = \log_a \frac{۱}{۲} \rightarrow a^{-۴} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \left(\frac{۱}{a}\right)^{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{a^{۴}} = \frac{۱}{۲} \rightarrow a^{۴} = ۲ \rightarrow a = \sqrt[۴]{۲}$$

تمرین ۷ صفحه ۹۰ کتاب درسی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را بررسی کنید.

الف $\log_b a \times \log_a b = ۱$ (a و b اعداد حقیقی مثبت و مخالف یک می باشند.)

درست

در اسلاید تمرین ۲ دیدیم که $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

در رابطهٔ بالا به جای c می توان از هر عدد حقیقی مثبت مخالف یک به عنوان مبنا استفاده کرد.

b را به عنوان مبنا انتخاب کرده و رابطه را بازنویسی می کنیم.

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} \rightarrow \log_a b = \frac{۱}{\log_b a} \rightarrow (\log_a b)(\log_b a) = ۱$$

ب $\log ۵ = \log ۳ + \log ۲$

نادرست

$$\log ۳ + \log ۲ = \log(۳ \times ۲) = \log ۶ \neq \log ۵$$

تمرین ۸ صفحه ۹۰ کتاب درسی

نیمه عمر یک ماده هسته ای ۳۰ سال است. نمونه ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند چقدر است؟

$$m(t)=\frac{۱}{۲^{\frac{t}{۳۰}}}(۱۲۸)=۱۲۸\times ۲^{\frac{-t}{۳۰}}$$

$$m(۳۰۰)=۱۲۸\times ۲^{\frac{-۳۰۰}{۳۰}}=۱۲۸\times ۲^{-۱۰}=۲^{۷}\times ۲^{-۱۰}=۲^{-۳}=\frac{۱}{۸}\ \text{میلی گرم}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(a ، b و c اعداد حقیقی مثبت اند و a و c مخالف یک می باشند.)

از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی استفاده می کنیم.

مقدار $\log_a b$ را برابر m تعریف می کنیم. در نتیجه داریم: $a^m = b$

حال از طرفین $a = b^m$، لگاریتم در مبنای c می گیریم.

$$\log_c a^m = \log_c b \rightarrow m \log_c a = \log_c b \rightarrow m = \frac{\log_c b}{\log_c a} \rightarrow \log_b a = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : اگر $\log ۲ \cong ۰/۳$ و $\log ۳ \cong ۰/۴۸$ باشد، مقدار تقریبی هر یک از اعداد زیر را به دست آورید.

الف) $\log \sqrt[۳]{۶} = \log ۶^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log ۶ = \frac{۱}{۳}\log(۳ \times ۲) = \frac{۱}{۳}(\log ۳ + \log ۲) \cong$

$\frac{۱}{۳}(۰/۴۸ - ۰/۳) \cong ۰/۳۹$

ب) $\log\left(\frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}}\right) = \log\sqrt{۲۷} - \log\sqrt[۴]{۵} = \log ۲۷^{\frac{۱}{۲}} - \log ۵^{\frac{۱}{۴}} = \log ۳^{\frac{۳}{۲}} - \log ۵^{\frac{۱}{۴}} =$

$\frac{۳}{۲}\log ۳ - \frac{۱}{۴}\log ۵ \cong \frac{۳}{۲}(۰/۴۸) - \frac{۱}{۴}(۰/۷) \cong ۰/۷۲ - ۰/۱۷۵ \cong ۰/۸۹۵$

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\log_{۷} \sqrt[۵]{۴۹} = \log_{۷} \sqrt[۵]{۷^{۲}} = \log_{۷} ۷^{\frac{۲}{۵}} = \frac{۲}{۵}\log_{۷} ۷ = \frac{۲}{۵} \times ۱ = \frac{۲}{۵}$

ب) $\log_{۳} ۲۷^{\frac{۱}{۲}} = \log_{۳}(۳^{۳})^{\frac{۱}{۲}} = \log_{۳} ۳^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}\log_{۳} ۳ = \frac{۳}{۲} \times ۱ = \frac{۳}{۲}$

پ) $-\log_{۵} ۱۲۵ = -\log_{۵} ۵^{۳} = -۳\log_{۵} ۵ = -۳ \times ۱ = -۳$

ت) $۳\log_{۱۰} \sqrt{۱۰۰۰} = ۳\log_{۱۰} ۱۰^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \times ۳\log_{۱۰} ۱۰ = \frac{۹}{۲} \times ۱ = \frac{۹}{۲}$

تمرین تکمیلی

سوال ۶ : اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_{۴}\left(\frac{x}{۲} - ۵\right)$ باشد، مقدار $f(۴۲)$ را به دست آورید.

$$f(۴۲) = ۳ - ۲\log_{۴}\left(\frac{۴۲}{۲} - ۵\right) = ۳ - ۲\log_{۴}(۲۱ - ۵)$$

$$= ۳ - ۲\log_{۴} ۱۶$$

$$= ۳ - ۲\log_{۴} ۴^{۲}$$

$$= ۳ - ۴\log_{۴} ۴ = ۳ - ۴ = -۱$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

الف
$$\frac{\log ۱۰۰}{۲} - \log_{۳} ۳ + \log_{۵} ۵۰۰ - \log_{۵} ۴ =$$

$$\frac{۲\log ۱۰}{۲} - \log_{۳} ۳ + \log_{۵} \frac{۵۰۰}{۴} = \frac{۲(۱)}{۲} - ۱ + \log_{۵} ۱۲۵ = ۱ - ۱ + \log_{۵} ۵^{۳} =$$

$$\log_{۵} ۵^{۳} = ۳\log_{۵} ۵ = ۳(۱) = ۳$$

ب
$$\log_{\frac{۱}{۳}} ۳ + \log_{۲} \frac{۱}{۸} + \log_{۵} \sqrt{۵} =$$

$$\log_{۳^{-۱}} ۳ + \log_{۲} ۲^{-۳} + \log_{۵} ۵^{\frac{۱}{۲}} = -\log_{۳} ۳ - ۳\log_{۲} ۲ + \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۵ = -۱ - ۳ + \frac{۱}{۲} = -\frac{۷}{۲}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : مقدار عددی عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\log_{۳}(\log_{۳}(\log_{۲} ۸)) =$

$$\log_{۳}(\log_{۳}(\log_{۲} ۲^{۳})) = \log_{۳}(\log_{۳}(۳\log_{۲} ۲)) = \log_{۳}(\log_{۳} ۳) = \log_{۳} ۱ = ۰$$

ب) $\log(tan\, ۱۰^{\circ}) + \log(tan\, ۸۰^{\circ}) =$

$$\log(tan\, ۱۰^{\circ}) + \log(cot\, ۱۰^{\circ}) = \log\left((tan\, ۱۰^{\circ})(cot\, ۱۰^{\circ})\right) = \log ۱ = ۰$$

تمرین تکمیلی

سوال ۹ : مقدار عددی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۹}} ۹\sqrt{۳} =$

ب) $۲^{۲+\log_۲ ۳} =$

الف) برای یافتن مقدار عددی این عبارت از ویژگی مقابل می کنیم: $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b$

$$\log_{\frac{۱}{۹}} ۹\sqrt{۳} = \log_{۳^{-۲}} ۳^۲(۳)^{\frac{۱}{۲}} = \log_{۳^{-۲}}(۳)^{\frac{۵}{۲}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{-۲}\log_۳ ۳ = -\frac{۵}{۴}$$

ب) برای یافتن مقدار عددی این عبارت از ویژگی مقابل می کنیم: $a^{\log_a x} = x$

$$۲^{۲+\log_۲ ۳} = ۲^۲ \times ۲^{\log_۲ ۳} = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

تمرین تکمیلی

سوال : با فرض این که $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۵$، مقدار $\log_۶ ۱۲$ را به دست آورید.

برای یافتن مقدار عددی این عبارت از ویژگی مقابل می کنیم: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\log_۶ ۱۲ = \frac{\log ۱۲}{\log ۶} = \frac{\log(۴ \times ۳)}{\log(۲ \times ۳)} = \frac{\log ۲^۲ + \log ۳}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{۲\log ۲ + \log ۳}{\log ۲ + \log ۳} =$$

$$\frac{۲(۰/۳) + ۰/۵}{۰/۳ + ۰/۵} = \frac{۱۱}{۸}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱ : معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۲$

برای حل این گونه معادلات، می بایست معادلهٔ لگاریتمی را به معادلهٔ نمایی تبدیل کنیم.

$$\rightarrow \; x = ۳^{۲} = ۹$$

---

۲) $\log_{۵}(x + ۶) = \log_{۵}(۲x - ۳)$

در طرفین این معادله، عبارت های لگاریتمی با مبنای یکسان وجود دارد. برای حل این گونه معادلات می توان از لگاریتم موجود در طرفین معادله صرف نظر کرد و بدون آنها معادله تشکیل داد.

$$x + ۶ = ۲x - ۳ \;\Rightarrow\; x = ۹$$

آموخته ایم که عبارت مقابل لگاریتم همواره مقداری مثبت است.

لذا عبارت مقابل لگاریتم را بزرگ تر از صفر در نظر گرفته و مجموعه جواب قابل قبول مقادیر x را به دست می آوریم.
جواب معادله می بایست در این مجموعه قرار داشته باشد؛ در غیر این صورت آن جواب قابل قبول نیست.

در این سوال xهای بزرگتر از $\frac{۳}{۲}$ قابل قبول هستند.

تمرین تکمیلی

۳ $\log_{۵}(x+۶)+\log_{۵}(x+۲)=۱$

$$\Rightarrow \log_{۵}\big((x+۶)(x+۲)\big)=۱ \quad \Rightarrow \log_{۵}(x^{۲}+۸x+۱۲)=۱$$

معادلهٔ لگاریتمی را به معادلهٔ نمایی تبدیل می کنیم. پس داریم:

$$x^{۲}+۸x+۱۲=۵^{۱} \Rightarrow x^{۲}+۸x+۷=۰ \Rightarrow (x+۷)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۷ \\ x=-۱ \end{cases}$$

در این سوال xهای بزرگتر از ۲- قابل قبول هستند.

$x=-۷$ قابل قبول <u>نیست</u> زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

---

۴ $\log_{۴}(x+۲)=\log_{۴}۸$

از لگاریتم موجود در طرفین معادله صرف نظر کرده و بدون آنها معادله تشکیل می دهیم.

$$x+۲=۸ \quad \Rightarrow \quad x=۶$$

در این سوال xهای بزرگتر از ۲- قابل قبول هستند.

تمرین تکمیلی

۵ $۳\log_۲ x = -\log_۲ ۲۷$

ضرایب را به جایگاه اصلی خود (توان عبارت مقابل لگاریتم) باز می گردانیم.

$$\Rightarrow \log_۲ x^۳ = \log_۲ \left(\frac{۱}{۲۷}\right)$$

از لگاریتم موجود در طرفین معادله صرف نظر کرده و بدون آنها معادله تشکیل می دهیم.

$$\Rightarrow x^۳ = \frac{۱}{۲۷} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

---

۶ $\log(x+۱) - \log(x-۳) = ۳ \quad \Rightarrow \log\left(\frac{x+۱}{x-۳}\right) = ۳$

معادلهٔ لگاریتمی را به معادلهٔ نمایی تبدیل می کنیم. پس داریم:

$$۱۰^۳ = \frac{x+۱}{x-۳} \Rightarrow ۱۰۰۰ = \frac{x+۱}{x-۳} \Rightarrow x+۱ = ۱۰۰۰(x-۳)$$

$$\Rightarrow x+۱ = ۱۰۰۰x - ۳۰۰۰ \Rightarrow ۳۰۰۱ = ۹۹۹x \Rightarrow x = \frac{۳۰۰۱}{۹۹۹} \cong ۳/۰۰۴$$

در این سوال xهای بزرگتر از ۳ قابل قبول هستند.

تمرین تکمیلی

۷) $\log_۲(۲x+۱)=۳ \rightarrow ۲x+۱=۲^۳ \rightarrow ۲x+۱=۸ \rightarrow ۲x=۷ \rightarrow x=۳/۵$

در این سوال xهای بزرگتر از ۰/۵- قابل قبول هستند.

---

۸) $\log_۲(x+۱)+\log_۲(x+۴)=۲ \rightarrow \log_۲((x+۱)(x+۴))=۲$

$\rightarrow \log_۲(x^۲+۵x+۴)=۲ \rightarrow x^۲+۵x+۴=۴ \rightarrow x^۲+۵x=۰$

$\rightarrow x(x+۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۵ \end{cases}$

در این سوال xهای بزرگتر از ۱- قابل قبول هستند.

$x=-۵$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

---

۹) $\log_۳ ۲۴۳ = ۲x+۱ \rightarrow ۳^{۲x+۱}=۲۴۳ \rightarrow ۳^{۲x+۱}=۳^۵$

$\rightarrow ۲x+۱=۵ \rightarrow ۲x=۴ \rightarrow x=۲$

تمرین تکمیلی

۱۰ $\log_{۳}(x-۱)=۴ \rightarrow x-۱=۳^{۴} \rightarrow x-۱=۸۱ \rightarrow x=۸۲$

در این سوال xهای بزرگتر از یک قابل قبول هستند.

---

۱۱ $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱ \rightarrow \log\left(\frac{۲x}{x-۳}\right)=۱ \rightarrow ۱۰^{۱}=\frac{۲x}{x-۳} \rightarrow ۱۰=\frac{۲x}{x-۳}$

$\rightarrow ۲x=۱۰(x-۳) \rightarrow ۲x=۱۰x-۳۰ \rightarrow ۸x=۳۰ \rightarrow x=\frac{۳۰}{۸}$

در این سوال xهای بزرگتر از ۳ قابل قبول هستند.

---

۱۲ $۲\log_{۴}(x-۱)=۳ \rightarrow \log_{۴}(x-۱)^{۲}=۳ \rightarrow (x-۱)^{۲}=۴^{۳}$

$\rightarrow (x-۱)^{۲}=۶۴=۸^{۲} \rightarrow \begin{cases} x-۱=۸ \rightarrow x=۹ \\ x-۱=-۸ \rightarrow x=-۷ \end{cases}$

در این سوال xهای بزرگتر از یک قابل قبول هستند.

$x=-۷$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲ : معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۳}(p^{۲} - ۲) = \log_{۳} p$

$$p^{۲} - ۲ = p \quad \Longrightarrow \quad p^{۲} - p - ۲ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad (p-۲)(p+۱) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} p = ۲ \\ p = -۱ \end{cases}$$

در این سوال pهای بزرگتر از ۲ قابل قبول هستند.

$p = -۱$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

ب) $\log_{۵}(x+۱) + \log_{۵}(x-۱) = ۱ \quad \to \quad \log_{۵}\big((x+۱)(x-۱)\big) = ۱$

$$\to \log_{۵}(x^{۲} - ۱) = ۱ \quad \to \quad x^{۲} - ۱ = ۵ \quad \to \quad x^{۲} = ۴ \quad \to \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

در این سوال xهای بزرگتر از یک قابل قبول هستند.

$x = -۲$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳ : معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

پ) $\log_{۴} x = \frac{۱}{۲}\log_{۳} ۹$

$\log_{۴} x = \log_{۳}\sqrt{۹} \rightarrow \log_{۴} x = \log_{۳} ۳ \rightarrow \log_{۴} x = ۱ \rightarrow ۴^{۱} = x \rightarrow x = ۴$

ت) $\log_{۴} m^{۲} - \log_{۴} m = ۰$

به جای صفر می توانیم از لگاریتم یک در مبنای هر عدد حقیقی مثبت و مخالف یک استفاده کنیم.

$\rightarrow \log_{۴}\frac{m^{۲}}{m} = \log_{۴} ۱ \rightarrow \log_{۴} m = \log_{۴} ۱ \rightarrow m = ۱$

ث) $۳\log_{۴} a - \log_{۴} ۵ = \log_{۴} ۲۵ \rightarrow \log_{۴} a^{۳} - \log_{۴} ۵ = \log_{۴} ۲۵$

$\Rightarrow \log_{۴}\frac{a^{۳}}{۵} = \log_{۴} ۲۵ \Rightarrow \frac{a^{۳}}{۵} = ۲۵ \Rightarrow a^{۳} = ۱۲۵ \Rightarrow a = ۵$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۴ : معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log(x-۴)+\log x-\log(x-۱)=\log ۵-۲\log ۲$$

$$\log\frac{x(x-۴)}{x-۱}=\log\frac{۵}{۴}\ \rightarrow\ \frac{x(x-۴)}{x-۱}=\frac{۵}{۴}\ \rightarrow\ ۵x-۵=۴x^۲-۱۶x\ \rightarrow$$

$$۴x^۲-۲۱x+۵=۰\ \rightarrow\ \Delta=۴۴۱-۴(۴)(۵)=۳۶۱\ \rightarrow\ \begin{cases}x=\frac{۲۱+۱۹}{۸}=۵\\ x=\frac{۲۱-۱۹}{۸}=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

در این سوال xهای بزرگتر از ۴ قابل قبول هستند.

$x=\frac{۱}{۴}$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵ : معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_x(2x^2-3x)=1+\log_x(x-1)$$

$$\log_x(2x^2-3x)-\log_x(x-1)=1 \rightarrow \log_x\left(\frac{2x^2-3x}{x-1}\right)=1$$

$$\rightarrow x^1=\frac{2x^2-3x}{x-1} \rightarrow x^2-x=2x^2-3x \rightarrow x^2-2x=0$$

$$\rightarrow x(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

در این سوال xهای بزرگتر از $\frac{3}{2}$ قابل قبول هستند.

$x=0$ قابل قبول نیست زیرا به ازای آن مقدار عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۶ : که اگر اندازهٔ بزرگی زمین لرزه بر حسب ریشتر یک واحد بزرگ تر شود، انرژی آن چند برابر می شود؟

$$\log E_1 = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow E_1 = ۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M}\ Erg$$

$$\log E_2 = ۱۱/۸ + ۱/۵(M+۱) \Rightarrow E_2 = ۱۰^{۱۱/۸+۱/۵(M+۱)}\ Erg$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{۱۰^{۱۱/۸+۱/۵(M+۱)}}{۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M}}$$

پایه ها برابرند، توان ها را از هم کم می کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = ۱۰^{۱/۵} \cong ۳۱/۶$$

یعنی با یک واحد افزایش در مقیاس ریشتر، انرژی آزاد شده تقریباً ۳۱/۶ برابر می شود.

پایان درس سوم