فصل ۲

تابع

مولای من:

زمانی که با خود می اندیشم که کدام رابطه و ضابطه باعث خواهد شد بین من و شما زوج مرتب شکل گیرد.

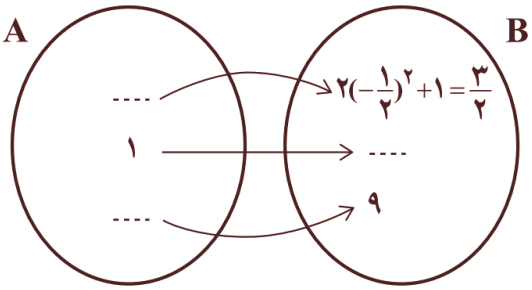
دیدم و درک کردم که به راستی شرط بر قرار این است که اگر مؤلفه ای اول یک رنگ و همیمی بود مؤلفه دوم هم یک رنگ و همیمی باشد.

درس ۱ توابع ثابت ، چندضابطه ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع ، دامنه و برد آشنا شدید.

تمرین ۱ : اگر $A=\left\{-\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$ و $f(x)=\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=۲x^{۲}+۱ \end{cases}$ باشد، با توجه به نمایش های مختلف تابع قسمت های زیر را کامل کنید:

الف) در نمایش پیکانی با توجه به ضابطهٔ f و مجموعهٔ A داریم:



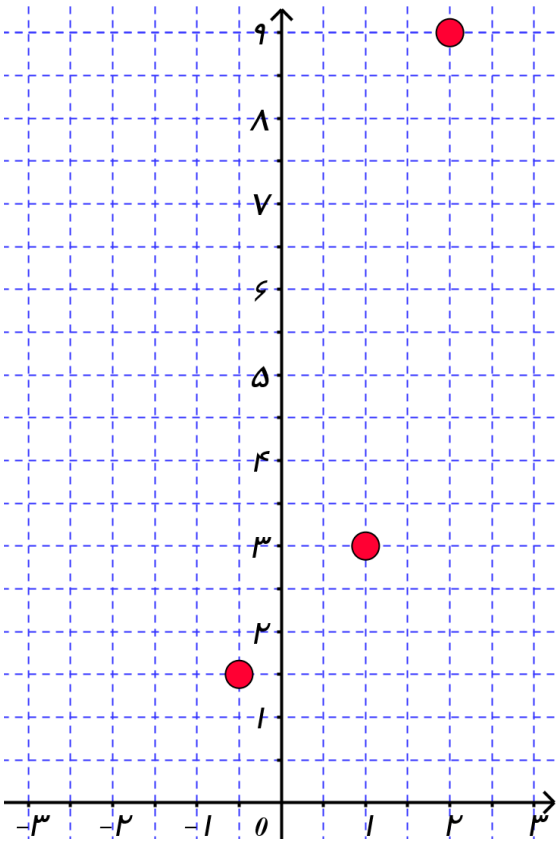
بنابراین برد f مجموعهٔ $\{\quad,\quad,\quad\}$ است. $B=\{\quad,\quad,\quad\}$ نمایش پیکانی رابطهٔ فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعهٔ A ، دقیقاً ..... خارج شده است.

ب) نمایش زوج مرتبی آن به صورت زیراست:

$$f=\left\{(\quad,\frac{۳}{۲}),(۱,\quad),(\quad,۹)\right\}$$

$$D_f=\{\quad,۱,\quad\} \quad و \quad R_f=\left\{\frac{۳}{۲},\quad,۹\right\}$$

مجموعه های D_f و R_f دامنه و برد تابع f را تشکیل می دهند.



پ) نمایش مختصاتی آن نیز چنین است: تصویر این نقاط بر روی محور xها؛ یعنی $\{\quad,۱,\quad\}$ دامنهٔ تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور yها $\left\{\frac{۳}{۲},\quad,۹\right\}$ برد تابع نامیده می شود.

تمرین ۲ : ابتدا با پیکان های مناسب رابطهٔ خواسته شده را کامل کنید.

الف) رابطه ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می دهد.

(۱)

کوهرنگ
رودسر
بافق

یزد
چهارمحال و بختیاری
گیلان

(۲)

میرجاوه
بندر خمیر
زابل

هرمزگان
سیستان و بلوچستان
ایلام

ب) رابطه ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می دهد.

(۱)

بوستان
گلستان
اتاق آبی

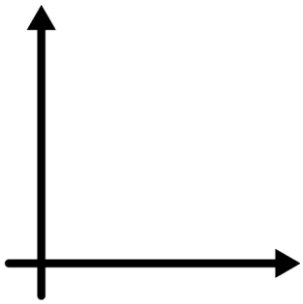
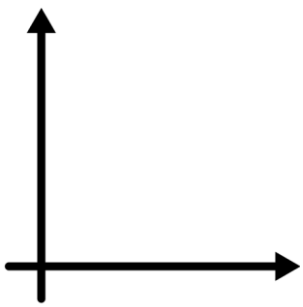
سعدی
سهراب سپهری
عطار

(۲)

سیاست نامه
ارزیابی شتاب زده
بینوایان

ویکتور هوگو
جلال آل احمد
خواجه نظام الملک

تمرین ۳ : حال جدول زیر را با توجه به رابطه های تمرین قبل که تابع هستند، کامل کنید.

	نمایش جدولی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
الف			
ب			

باتوجه به جدول بالا:

نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که .....

نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که .....

نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که .....

انواع توابع (ثابت ، چندضابطه ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

مدیران یک فروشگاه به دلایلی تصمیم گرفته اند هزینهٔ استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هزینهٔ استفاده از توقفگاه ثابت بوده است. (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین های مدار بسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی

در سومین هفتهٔ هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود دادهٔ دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول زیر نمایش داده شده است:

جدول	ساعت اول ۸–۹	ساعت دوم ۹–۱۰	ساعت سوم ۱۰–۱۱	ساعت چهارم ۱۱–۱۲	ساعت پنجم ۱۲–۱۳	ساعت ششم ۱۳–۱۴	ساعت هفتم ۱۴–۱۵	ساعت هشتم ۱۵ –۱۶	ساعت نهم ۱۶–۱۷	ساعت دهم ۱۷–۱۸	ساعت یازدهم ۱۸–۱۹	ساعت دوازدهم ۱۹–۲۰
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یک شنبه	۱۱۰	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰
سه شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنج شنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۱۰	۶۱۰	۷۴۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۴۰	۴۱۰

با در نظر گرفتن جدول صفحه قبل، هزینهٔ توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول زیر تعیین شده است:

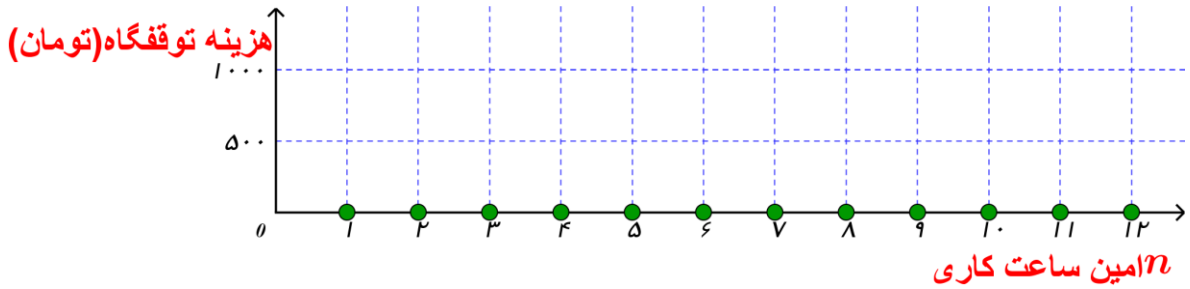
جدول ۲

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینهٔ دریافتی از هر خودرو (تومان)
۰ – ۱۰۰	رایگان
۱۰۰ – ۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰ – ۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰ – ۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰ – ۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰ – ۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰ – ۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

فصل ۲

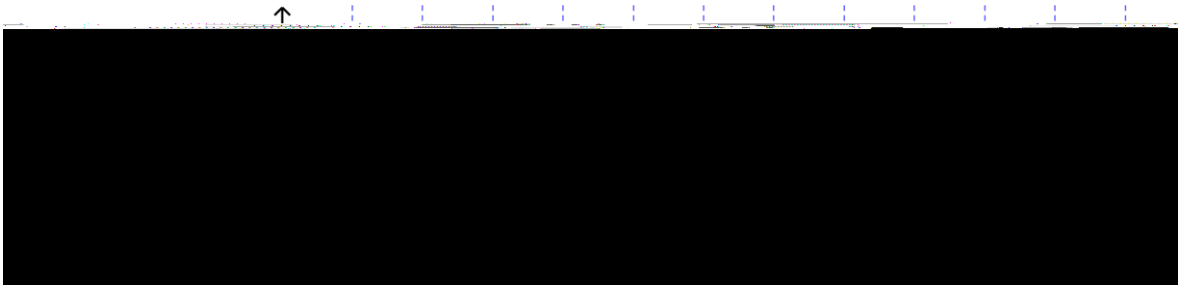
تابع ثابت

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲ ، نمودار « n امین ساعت کاری فروشگاه – هزینهٔ دریافتی» را برای روز شنبه در نخستین هفتهٔ هوشمندسازی رسم می کنیم.



این نوع تابع که به ازای $n=۱$ تا $n=۱۲$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می شود. پس ضابطهٔ تابع «هزینهٔ توقفگاه» در این روز به صورت $\begin{cases} C : A \to B \\ C(n) = ۰ \end{cases}$ است که در آن $D_C = \{n \in \mathbb{N} \mid ۱ \le n \le ۱۲\}$ دامنهٔ تابع و $R_C = \{۰\}$ برد تابع C را تشکیل می دهند.

تمرین ۴ : با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینهٔ دریافتی در جدول ۲ نمودار زیر را برای روز یک شنبه کامل کنید.



تابع را که در آن مجموعه برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

تمرین ۵ : با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینهٔ دریافتی مطابق جدول ۲ نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید.

الف) جاهای خالی زیر را کامل کنید.

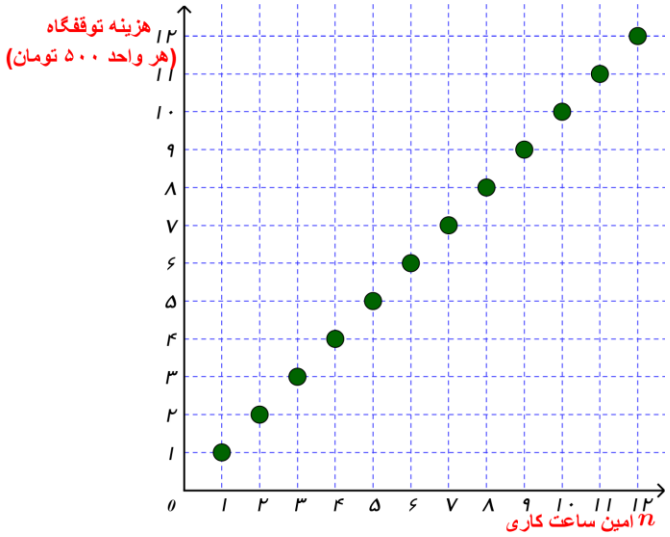
$$\begin{cases} C : A \to B \\ C(x) = \end{cases} \qquad D_C = \{x \in \mathbb{R} | \quad \} \qquad R_C = \{ \quad \}$$

ب) دامنهٔ نمودار روز دوشنبه چه تفاوت هایی با دامنهٔ نمودار در روز شنبه و یکشنبه دارد؟

پ) تفاوت این دامنه ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

تابع همانی

تمرین ۱۴ : برای روز پنج شنبه به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینهٔ دریافتی n واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد. بنابراین نمودار زیر به دست می آید:

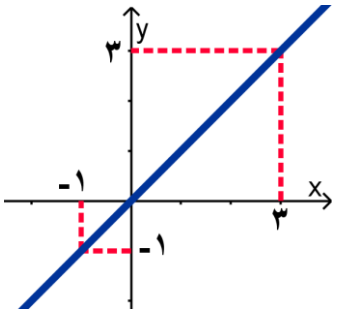


الف) مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه ای میان دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می توانید ضابطهٔ این تابع را حدس بزنید؟

ب) اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تعبیری می کند؟

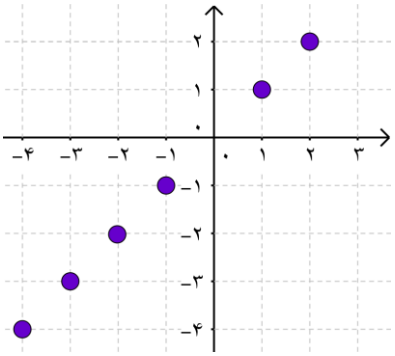
تابع با ضابطهٔ $f(x)=x$ را تابع همانی می نامند. با توجه به ضابطهٔ تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. $D_f=\mathbb{R}$ ، $R_f=\mathbb{R}$

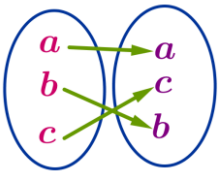
از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.



تمرین ۱۵ : نمونه هایی از توابع همانی در این جا ارائه شده اند، دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

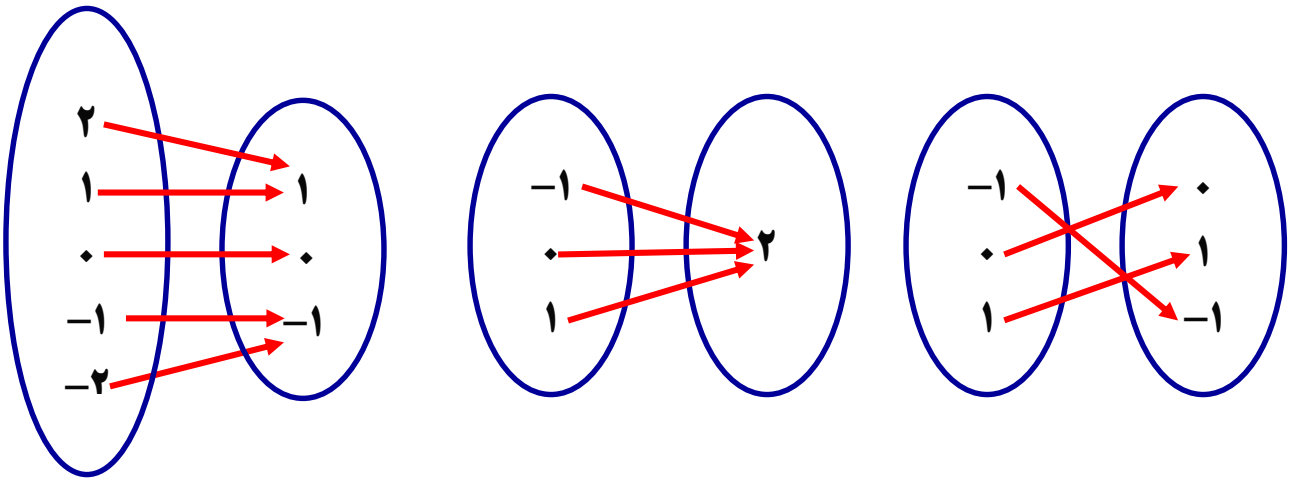
x	-۱	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$
y	-۱	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$





تمرین ۱۶ : نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. (ثابت ، همانی ، چند ضابطه ای)

(الف) (ب) (پ)



تابع پلکانی

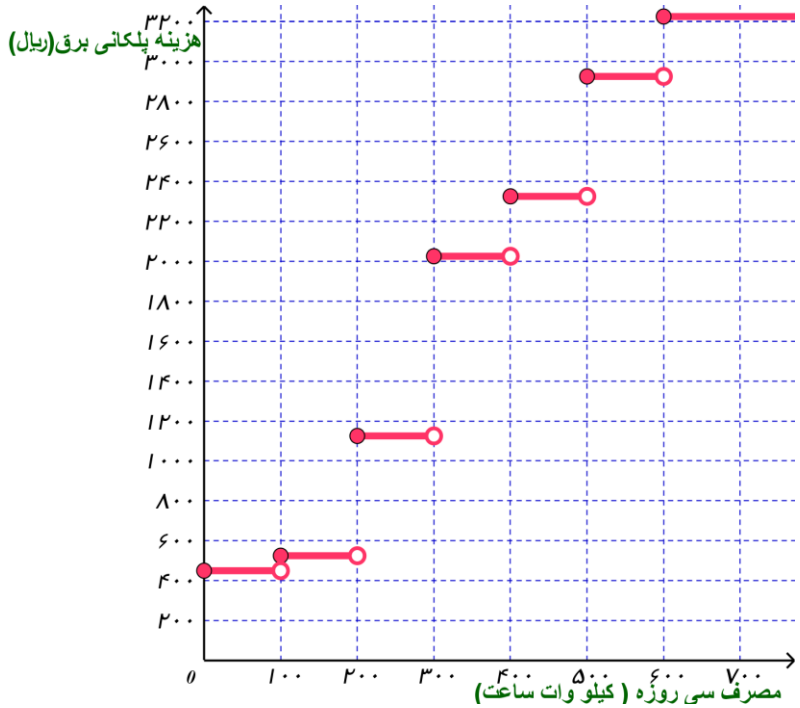
محاسبهٔ هزینهٔ برق مصرفی در هر خانه براساس میزان «کیلو وات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می شود. یک کیلو وات ساعت (kwh) در واقع مصرف یک وسیلهٔ هزار واتی در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلو وات ساعت برق مصرف کرده ایم.

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز kwh ۲۴۶/۲۳ بوده است، برای محاسبهٔ هزینهٔ مصرف برق، میزان کیلو وات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می شود.

پله های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازادبر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰
مازادبر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵	۴۶/۲۳	۵۳۰۰۴
مازادبر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۲۵		
مازادبر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۲۳۲۵		
مازادبر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۹۲۶		
مازادبر ۶۰۰	۳۲۲۶		

مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه(سی روز) را مشخص می کند. (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و ... اضافه می شود و عموماً قبض های برق برای بیشتر از سی روز صادر می شوند.)

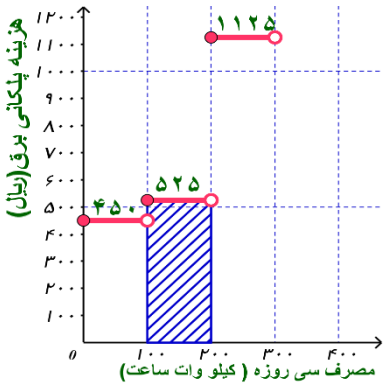
جدول بالا را با نمودار رو به رو نیز می توان مشخص کرد:



هر تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را تابع پلکانی می نامند.

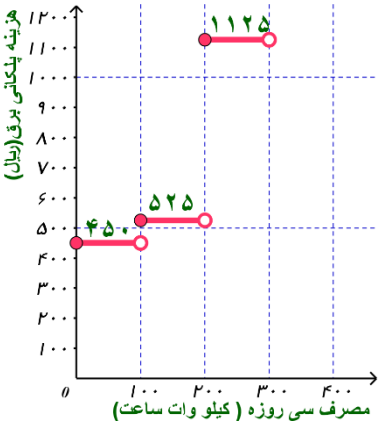
تمرین ۱۷ : به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینهٔ برق مصرفی یک خانه:

الف) هزینهٔ kwh ۱۰۰ اول چگونه محاسبه می شود؟ آیا می توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟



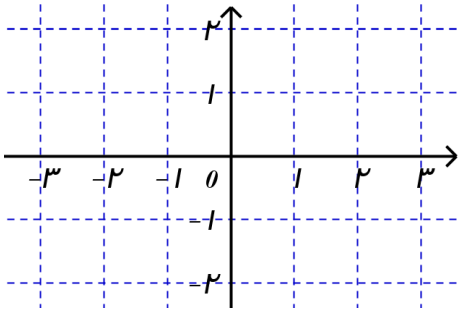
ب) مساحت قسمت هاشور خوردهٔ زیر بیانگر چه مفهومی است؟

پ) هزینهٔ کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.



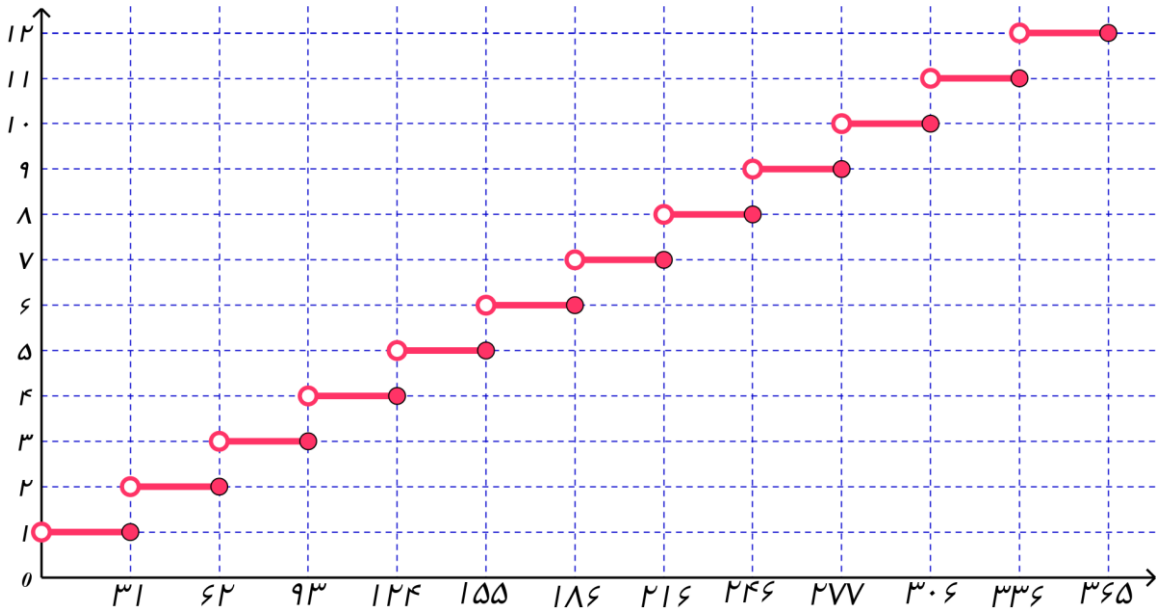
تمرین ۱۸ : براساس ضابطهٔ تابع پلکانی $y = f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

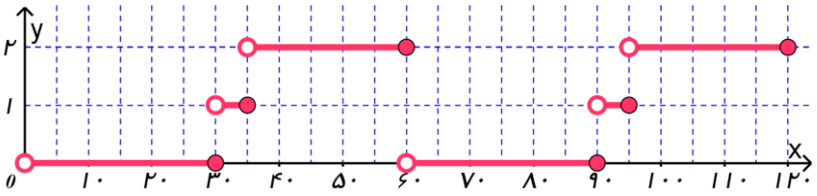


تابع بالا را تابع علامت یا تابع $f(x) = sign(x)$ می نامند.

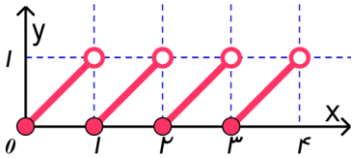
تمرین ۱۹ : نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطهٔ تابع را بنویسید؟



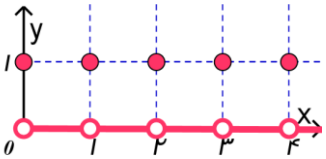
تمرین ۲۰ : هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.



یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می ریزد.



پرنده ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می آید.



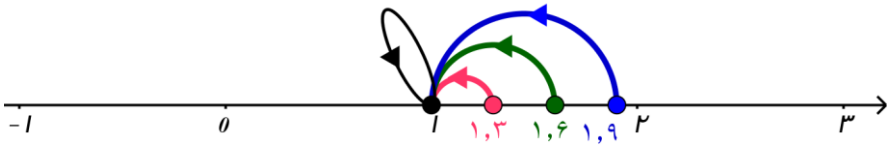
چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالته.

تابع جزء صحیح

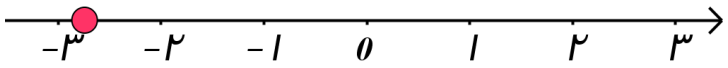
فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک تر را نسبت می دهد.

مثال: در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱و۲ باشد، تابع g، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می دهد.

به بیانی دیگر:

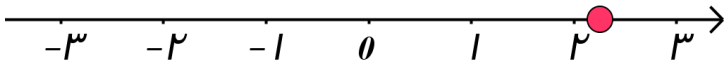


اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲− و ۳− باشد، تابع g مقادیر x را به عدد ..... نسبت می دهد.



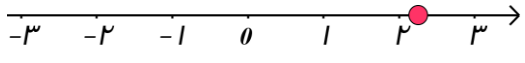
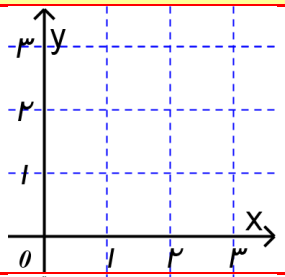
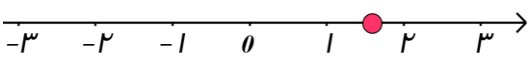
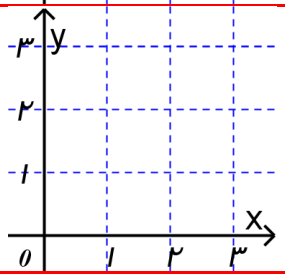
$\ldots\ldots \le x < \ldots\ldots \quad \Rightarrow \quad g(x) = \ldots\ldots$

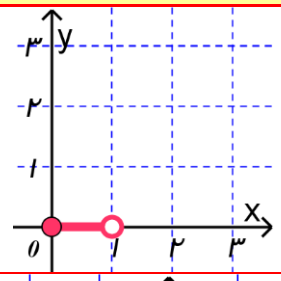
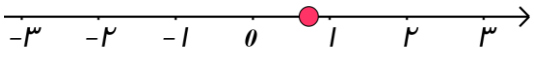
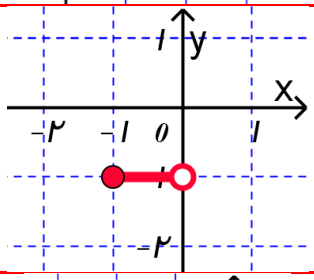
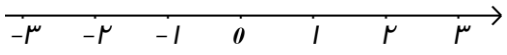
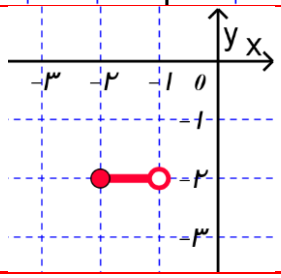
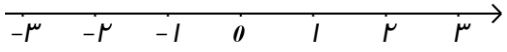
و اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲ و ۳ باشد، تابع g مقادیر x را به عدد ..... نسبت می دهد.



$\ldots\ldots \le x < \ldots\ldots \quad \Rightarrow \quad g(x) = \ldots\ldots$

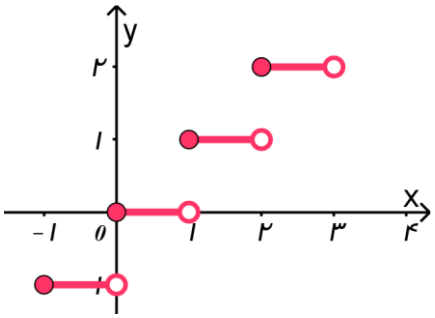
تمرین ۲۰ : به کمک تابع g که در بالا تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $۲ \le x < ۳$	$g(x) =$	
 $۱ \le x < ۲$	$g(x) =$	

نمودار تابع	جواب تابع g	حدود x
	$g(x)=$	 $\circ \le x < 1$
	$g(x)=$	 $\le x <$
	$g(x)=$	 $\le x <$

این حالت ها را می توانیم با یک تابع چند ضابطه ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}\vdots & \\ -1 & -1 \le x < \circ \\ \circ & \circ \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

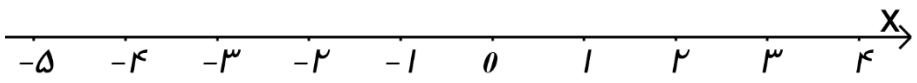


تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ عدد صحیح k را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح می نامند. ضابطهٔ این تابع را با $g(x)=[x]$ (بخوانید جزء صحیح x) معرفی می کنند.

تمرین ۲۱ : به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد ، حاصل عبارت های خواسته شده را به دست آورید.

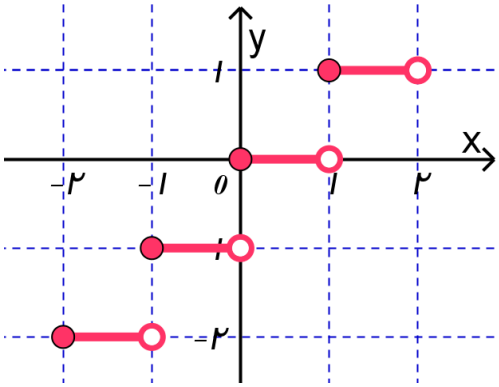
$[۲]=$ $[۲/۷]=$ $[-۲/۷]=$ $[۰/۷]=$

$[-۰/۷]=$ $[-۰/۰۷]=$ $[-۳/۲]=$ $[-\pi]=$ $[-۲/۲]=$



تمرین ۲۲ : نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $-۲\le x<۲$ رسم کنید.

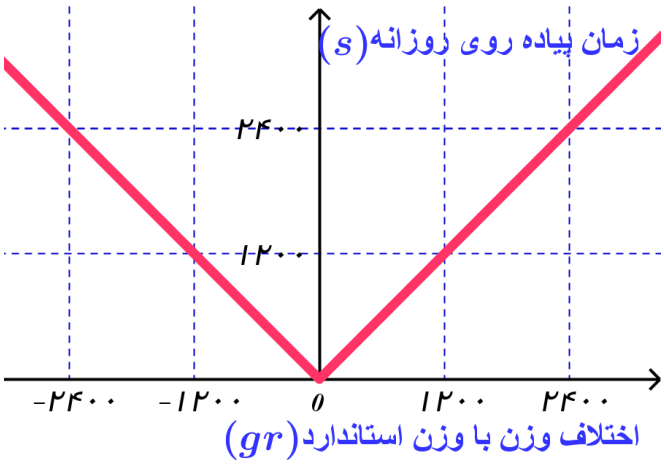
x	$y=[x]$	نقطه ابتدایی (توپر)	نقطه انتهایی (توخالی)
$۱\le x<۲$	$y=۱$	$(۱,۱)$	$(۲,۱)$
$۰\le x<۱$	$y=۰$	$(۰,۰)$	$(۱,۰)$
$-۱\le x<۰$	$y=-۱$	$(-۱,-۱)$	$(۰,-۱)$
$-۲\le x<-۱$	$y=-۲$	$(-۲,-۲)$	$(-۱,-۲)$



تابع قدرمطلق

فصل ۲

هر چند امروزه بخش عمده ای از افراد از اضافه وزن رنج می برند. بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده روی کند. بر این اساس فردی با ۱۲۰۰ گرم اضافه وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه، یعنی ۲۰ دقیقه روزانه به صورت منظم پیاده روی کند و فردی با ۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه یعنی ۴۰ دقیقه به صورت منظم پیاده روی کند.



این مفهوم را می توان به کمک نمودار زیر نشان داد:

اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده روی بر حسب ثانیه را نشان می دهد، اطلاعات پیش گفته را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$f(-۲۴۰۰)=۲۴۰۰ \qquad f(۲۴۰۰)=۲۴۰۰ \qquad f(-۱۲۰۰)=۱۲۰۰ \qquad f(۱۲۰۰)=۱۲۰۰$$

که این مفهوم را در یک تابع دوضابطه ای می نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\ge ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

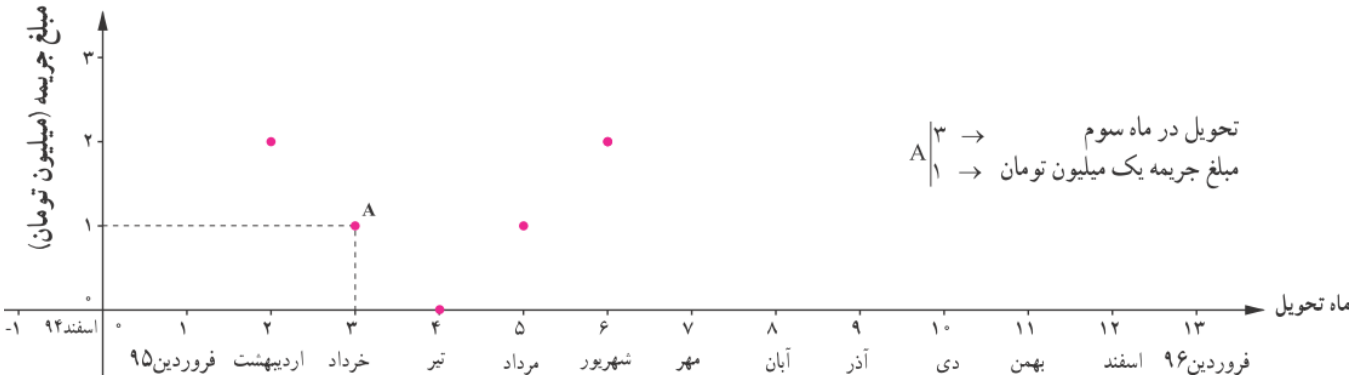
این تابع را می توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می کند.

تابع با ضابطه $f(x)=|x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می شود و مطابق تعریف:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

تمرین ۲۳ : بر اساس قرارداد میان پیمانکار پل رودخانه سیمینه رود و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل ، پیمانکار متعهد است یک میلیون جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد.

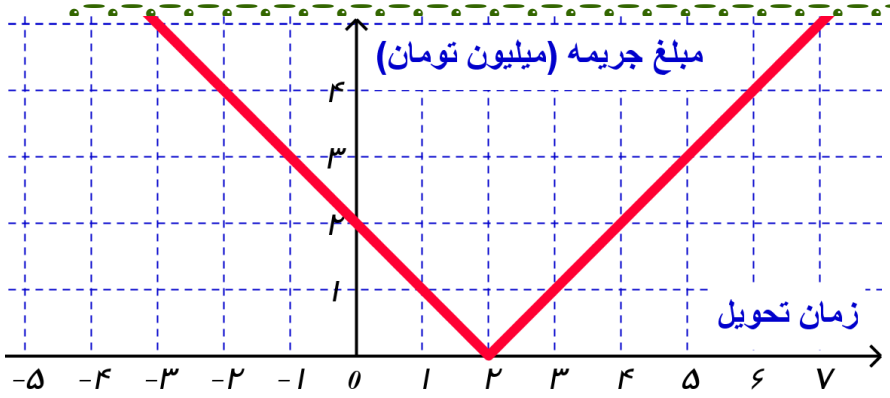
الف) نمودار جریمه بر حسب زمان تحویل پروژه در ماه های مختلف را کامل کنید . (زمان تحویل تیرماه ۱۳۹۵)



ب) آیا می توان این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلقی بیان کنید؟

پ) اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه را در چه ماه یا ماه هایی انجام شده است؟ چرا؟

تمرین ۲۴ : با توجه به نمودار



الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطهٔ هر یک از نیم خط ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

پ) به کمک تعریف تابع قدر مطلق ، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

ت) شیب خط در تابع به دست آمده در قرار داد میان پیمان کار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

تمرین ۲۵ : نمودار تابع $y=|۲x-۶|$ را رسم کنید.

حل: باتوجه به تعریف قدرمطلق: $|u|=\begin{cases} u & u\geq ۰ \\ -u & u<۰ \end{cases}$

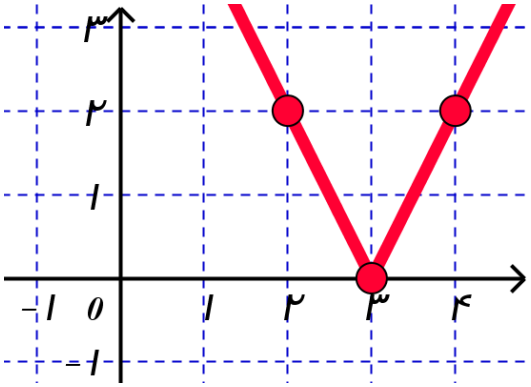
$$|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & ۲x-۶\geq ۰ \Rightarrow ۲x\geq ۶ \Rightarrow x\geq ۳ \\ -(۲x-۶) & ۲x-۶<۰ \Rightarrow ۲x<۶ \Rightarrow x<۳ \end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع این گونه مشخص می شود: $y=|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & x\geq ۳ \\ -۲x+۶ & x<۳ \end{cases}$

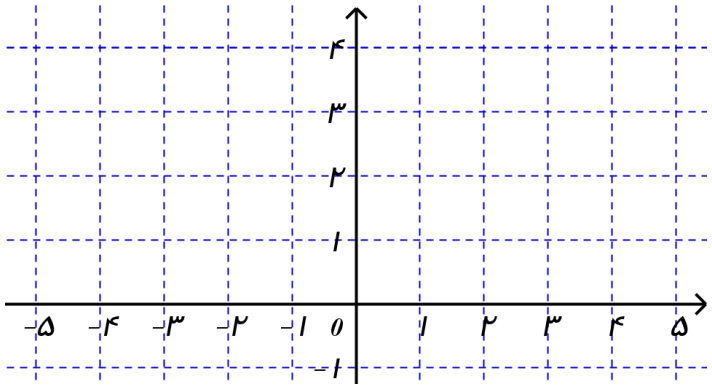
و نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود:

x	۳	۴
y	۰	۲

x	۲	۳
y	۲	۰

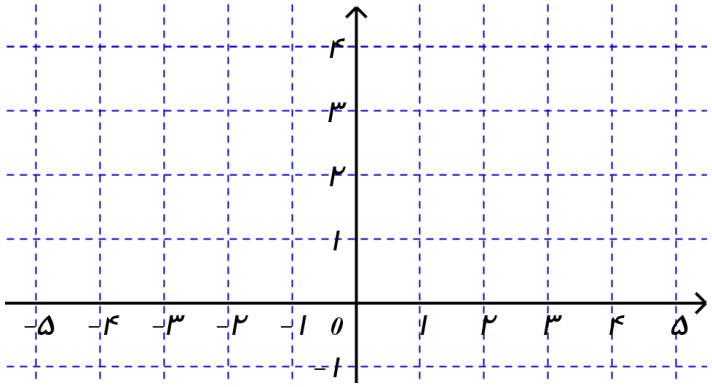


تمرین ۲۶ : الف) نمودار توابع $y=|x-۴|$ و $y=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

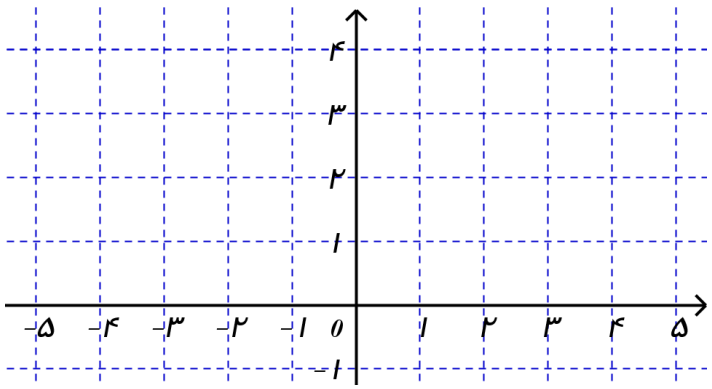


ب) آیا می توان بدون مراحل بالا، بر اساس نمودار $y=|x|$، نمودار $y=|x-۴|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

پ) نمودار تابع $y=|x-۳|$ و $y=|x+۱|$ را با توجه به نتیجه قسمت «ب» رسم کنید.



ت) نمودار تابع $y=|x|+۱$ را چگونه می توان بر اساس نمودار $y=|x|$ رسم نمود؟



درس ۳ اعمال روی توابع

تمرین ۲۷ : علیرضا ، دانشجوی رشتهٔ اقتصاد است و می خواهد پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) را به تماشای یک فیلم یا تئاتر جشنواره دههٔ فجر دعوت کند. او ابتدا به خانواده اش پرسش نامه ای می دهد تا فیلم یا تئاتر مورد علاقه شان را انتخاب کنند. زیرا او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقهٔ سینمایی آنها و خودش را تأمین کند.

با توجه به بودجهٔ محدودی که او برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بداند هزینهٔ صرف شده در این هفته چقدر خواهد بود.جدول زیر هزینهٔ بلیت سینما و تئاتر را برای گروه های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف هایی قائل شده اند. جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱ هزینهٔ بلیط با توجه به گروه های مختلف

مکان نمایش / گروه سنی	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو	۲۰ % تخفیف =	۲۰ % تخفیف =	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	۵۰ % تخفیف =	۵۰ % تخفیف =

علیرضا نتایج پرسش نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول های زیر مشخص نمود:

جدول ۲ علاقه مندی به سینمای کودک و نوجوان

اعضای خانواده / سبک فیلم	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی – تخیلی
مریم	✓		✓	✓
علیرضا		✓	✓	✓

جدول ۳ علاقه مندی به سینما

اعضای خانواده / سبک فیلم	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه ای	علمی – تخیلی
مادر	✓			✓		✓
پدر		✓	✓	✓		
مریم						
علیرضا		✓		✓		✓

جدول ۴ علاقه مندی به تئاتر

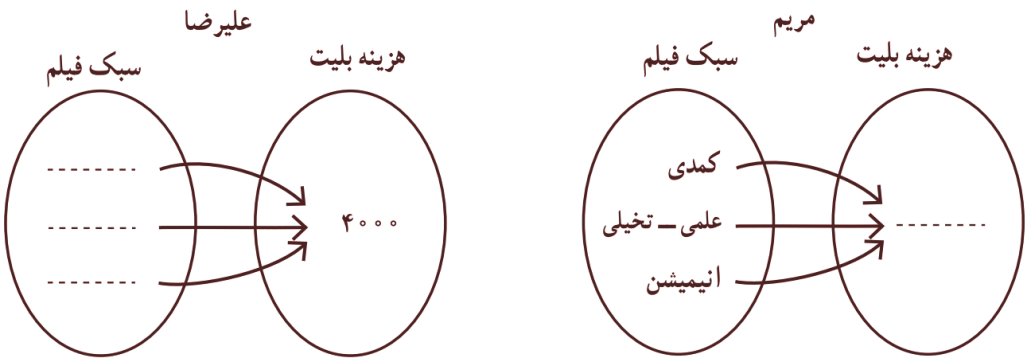
اعضای خانواده / سبک تئاتر	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
مادر	✓	✓	✓	
پدر		✓	✓	✓
مریم	✓		✓	
علیرضا			✓	

در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد. او باید دو نکته را مشخص کند:

۱ – به دیدن چه سبک فیلمی می روند؟ ۲ – هزینهٔ بلیت آنها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقهٔ دو نفرشان باشد. با توجه به جدول های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که دامنهٔ آن سبک فیلم مورد علاقه هر کدام باشد و برد آن هزینهٔ خرید بلیت، نمایش پیکانی این دو تابع به صورت زیر است:

ب) نمایش پیکانی این دو تابع را کامل کنید.



پس اشتراک فیلم مورد علاقه شان دو سبک فیلم ..... و ..... است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هردو نوع آنها می توانند به سینما بروند. این مطلب را می توانیم چنین نشان دهیم:

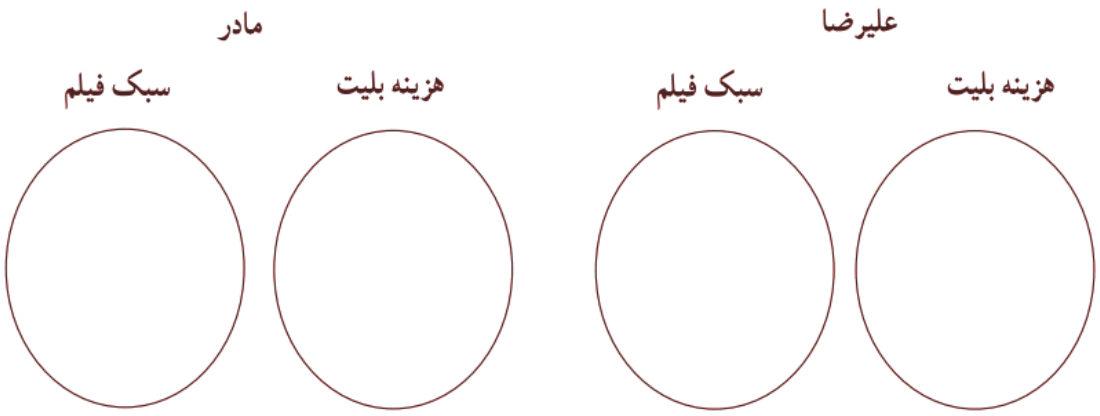
علیرضا = { (, ۴۰۰۰),(, ۴۰۰۰),(, ۴۰۰۰) }

مریم = { (کمدی ،) ، (انیمیشن ،) ، (علمی – تخیلی ،) }

مریم+ علیرضا = { (, ۴۰۰۰+),(, ۴۰۰۰+) }

تمرین ۲۸ : اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواهد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و ۳ :

الف) نمایش پیکانی مشابه تمرین صفحهٔ قبل را برای هر کدام رسم کنید.



ب) با توجه به اشتراک سبک فیلم مورد علاقهٔ هر کدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

فصل ۲

ج) هزینه ای که در این روز علیرضا صرف می کند، چقدر است؟

تمرین ۲۸ : پنج شنبه علیرضا می خواهد همهٔ اعضای خانواده اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و ۴ :

الف) نمایش زوج مرتبی هر کدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرایطی را که همهٔ آنها به تماشای یک تئاتر می روند، مشخص کنید.

ب) علیرضا در این روز چه میزان هزینه می کند؟

تمرین ۲۹ : با توجه به تمرین های قبل با چه شرایطی می توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

همان گونه که عمل جمع، تفریق ، ضرب و تقسیم در مورد دو عدد و دو چندجمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است.

اگر f و g دو تابع باشند. توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ دو تابع حقیقی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \rightarrow \quad D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad \rightarrow \quad D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

$$(f\times g)(x)=f(x)\cdot g(x) \quad \rightarrow \quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$$

تمرین ۳۰ : اگر $f=\{(۱,۲),(-۳,۴),(۳,۵),(۷,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,-۱),(۷,۲)\}$ ، ابتدا دامنهٔ تابع $f+g$ را به دست آورید و سپس $f+g$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نمایش دهید.

حل:

$$D_f=\{۱,-۳,۳,۷\} \qquad D_g=\{۲,۳,۷\} \qquad \Rightarrow \qquad D_{f\cap g}=\{۳,۷\}$$

$$f+g=\{(۳,۵+(-۱)),(۷,-۱+۲)\}=\{(۳,۴),(۷,۱)\}$$

تمرین ۳۱ : اگر $f=\{(-۲,۵),(۷,۹),(-۶,-۴),(۳,۰)\}$ و $g=\{(-۳,۸),(-۲,۰),(۳,۱۱),(۷,۱)\}$ باشند. دامنه توابع زیر را بدست آورید و سپس توابع خواسته شده را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نمایش دهید.

$D_f=$ $\qquad$ $D_g=$ $\qquad$ $D_{f\cap g}=$

الف) $(f+g)=$

ب) $(f-g)=$

پ) $(f\times g)=$

ت) $(\frac{f}{g})=$

ت) $(\frac{g}{f})=$

تمرین ۳۲ : با توجه به ضابطه های $f_1(x)=x^2-1$ و $f_2(x)=x+1$:

الف) ضابطهٔ توابع زیر را بدست آورید. ($\mathbb{R}$ دامنه مشترک هر دو تابع است.)

$$f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)=(x^2-1)+(x+1)=x^2+x \quad \Rightarrow \quad f_3(x)=x^2+x$$

$$f_4(x)=f_1(x)-f_2(x)=(x^2-1)-(x+1)=x^2-1-x-1=x^2-x-2 \quad \Rightarrow \quad f_4(x)=x^2-x-2$$

$$f_5(x)=f_2(x)-f_1(x)= \quad \Rightarrow \quad f_5(x)=$$

$$f_6(x)=f_1(x)\times f_2(x)= \quad \Rightarrow \quad f_6(x)=$$

$$f_7(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}= \quad \Rightarrow \quad f_7(x)=$$

$$f_8(x)=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}= \quad \Rightarrow \quad f_8(x)=$$

ب) مقادیر تابع های f_3 تا f_8 به ازای $x=2$ به دست آورید؟

$$f_3(x)=x^2+x \quad \Rightarrow \quad f_3(2)=(2)^2+(2)=4+2=6$$

$$f_4(x)=f_4(x)=x^2-x-2 \quad \Rightarrow \quad f_4(2)=(2)^2-(2)-2=4-2-2=0$$

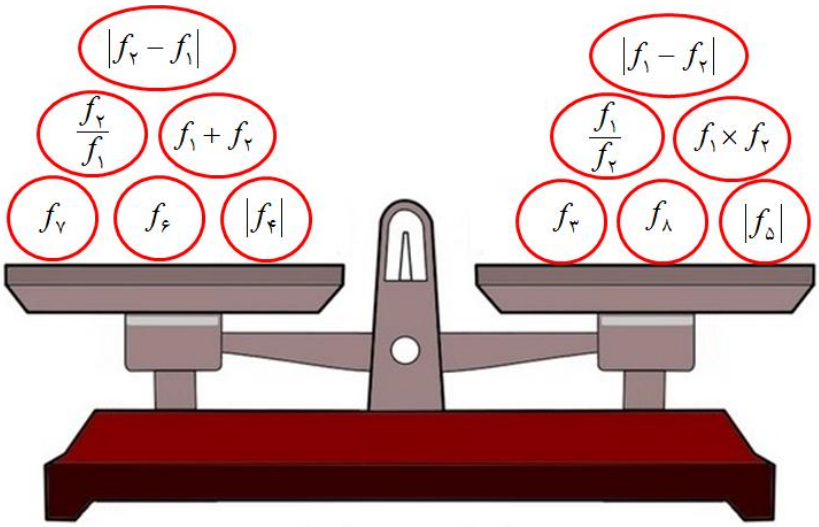
$$f_5(x)= \quad \Rightarrow \quad f_5(2)=$$

$$f_6(x)= \quad \Rightarrow \quad f_6(2)=$$

$$f_7(x)= \quad \Rightarrow \quad f_7(2)=$$

$$f_8(x)= \quad \Rightarrow \quad f_8(2)=$$

پ) اگر مقادیر تابع های f_3 تا f_8 به ازای $x=2$ نمادهای وزنه های کفه ترازو باشند، چرا دو کفهٔ ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه ای به دست می آید؟



فصل ۲

تمرین ۳۳ : با توجه به ضابطه های $f(x)=x+1$ و $g(x)=x-1$:

الف) مقادیر تابع های زیر به ازای $x=2$ به دست آورید؟

$f(2)=$ $\qquad\qquad$ $g(2)=$

$h_1(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow h_1(2)=$

$h_2(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow h_2(2)=$

$h_3(x) = g(x) - f(x)$

$h_4(x) = f(x) \times g(x)$

$h_5(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$h_6(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$h_7(x) = \dfrac{h_1(x)}{h_3(x)}$

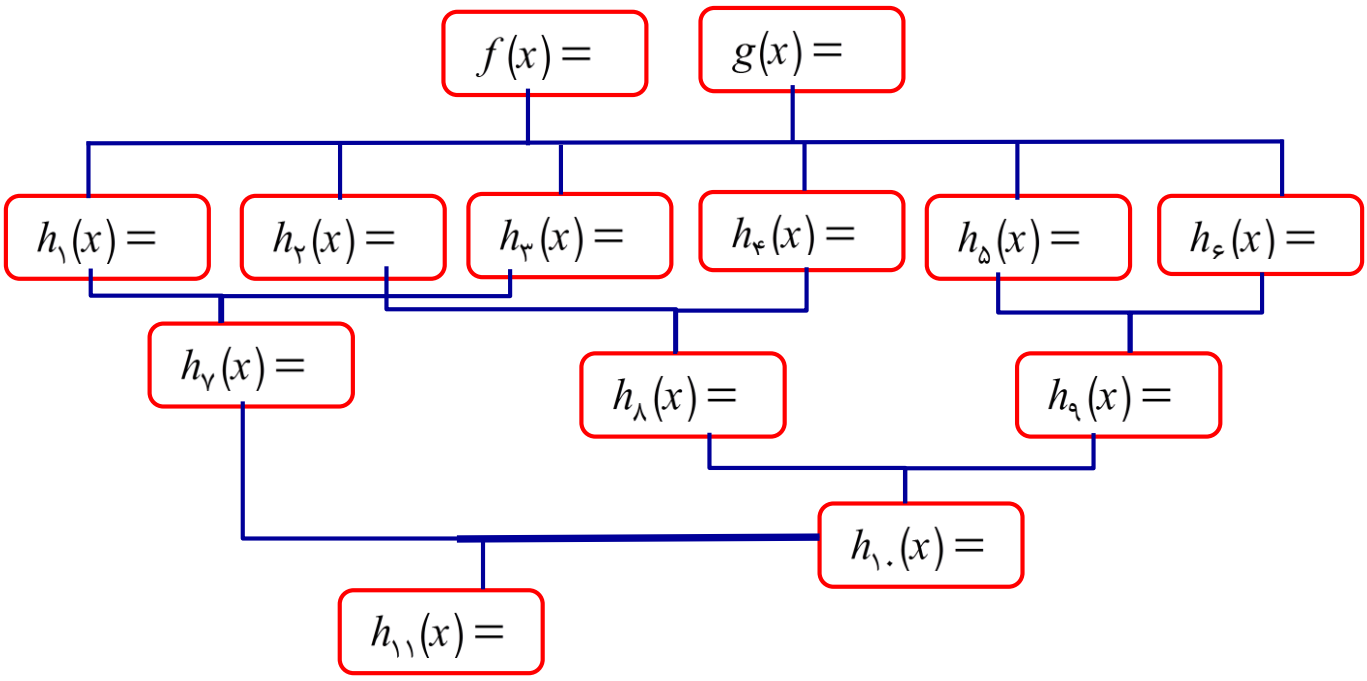
$h_8(x) = h_2(x) \times h_4(x)$

$h_9(x) = h_5(x) + h_6(x)$

$h_{10}(x) = h_8(x) \times h_9(x)$

$h_{11}(x) = h_7(x) \times h_{10}(x)$

ب) درخت زیر به ازای $x = 2$ کامل کنید.



تمرین ۳۴ : اگر $f=\{(۲,۰),(۴,-۱),(-۱,-۳)\}$ و $g=\{(۲,۵),(۳,-۱),(-۱,۲)\}$ باشند. دامنه توابع زیر را بدست آورید و سپس توابع خواسته شده را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نمایش دهید.

$D_f=$ $D_g=$ $D_{f\cap g}=$

الف) $(f+g)=$

ب) $(f-g)=$

پ) $(g-f)=$

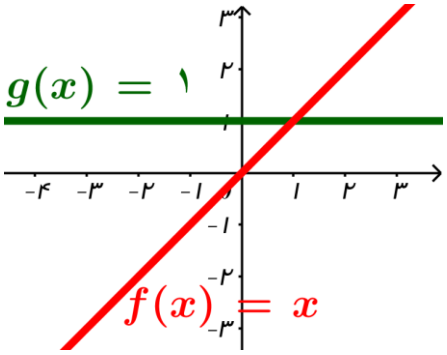
ت) $(f\times g)=$

ث) $(\frac{f}{g})=$

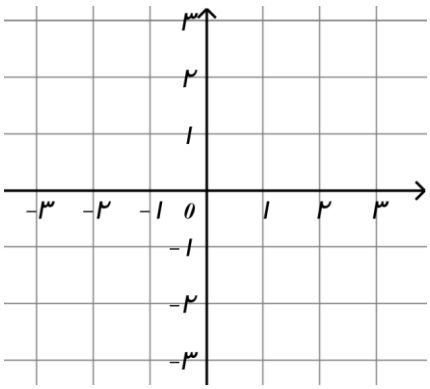
ج) $(\frac{g}{f})=$

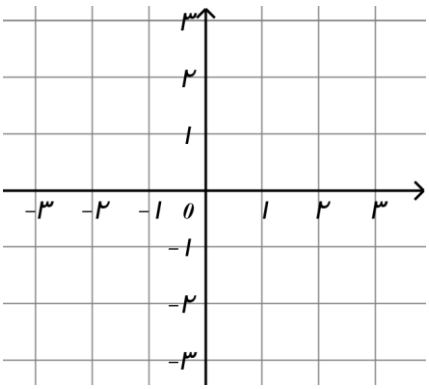
تمرین ۳۵ : به کمک نودارهای رسم شدهٔ توابع f و g نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطهٔ تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

الف)

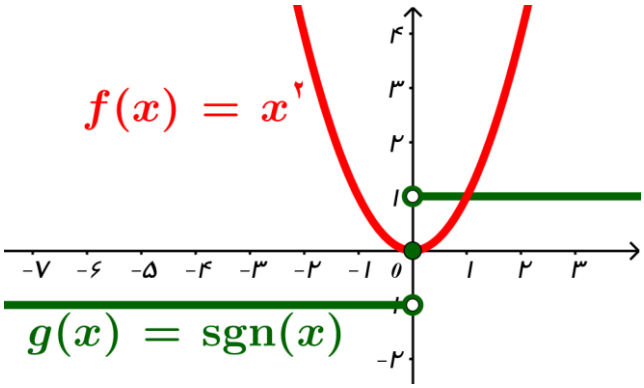


$x=-۱$
$x=۰$
$x=۱$

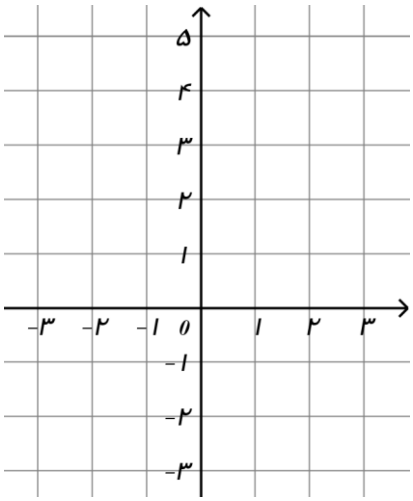


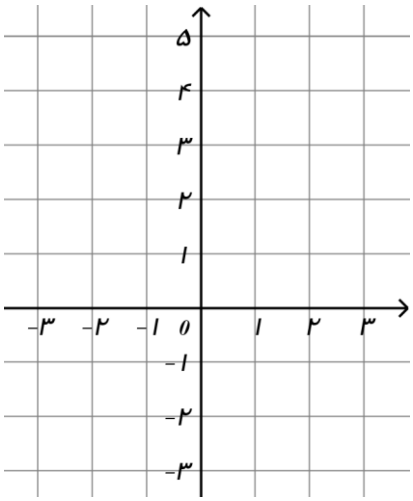


ب)



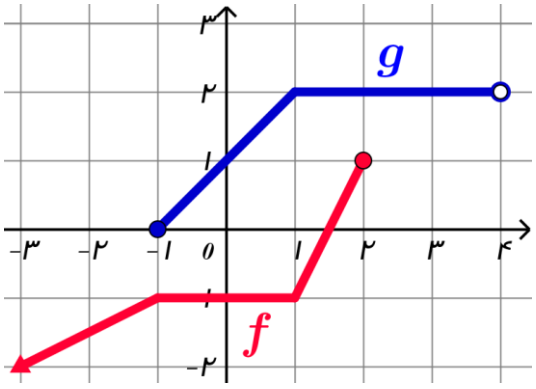
$x=-۱$
$x=۰$
$x=۱$
$x=۲$





تمرین ۳۶ : نمودار دو تابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر زیر را بدست آورید.



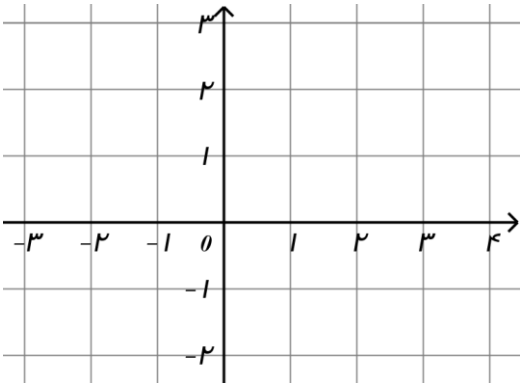
$(f+g)(۱)$

$(f+g)(-۱)$

$(f+g)(۲)$

$(f+g)(۰)$

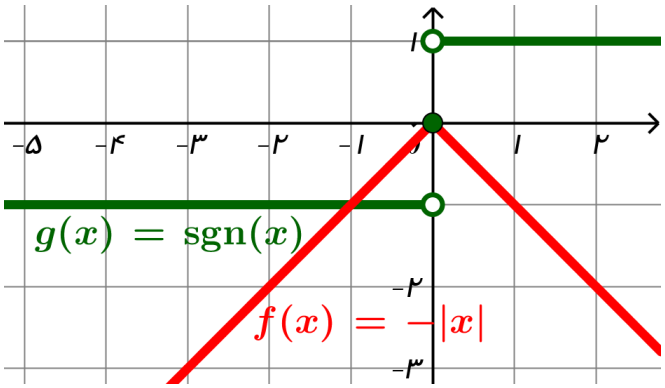
ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

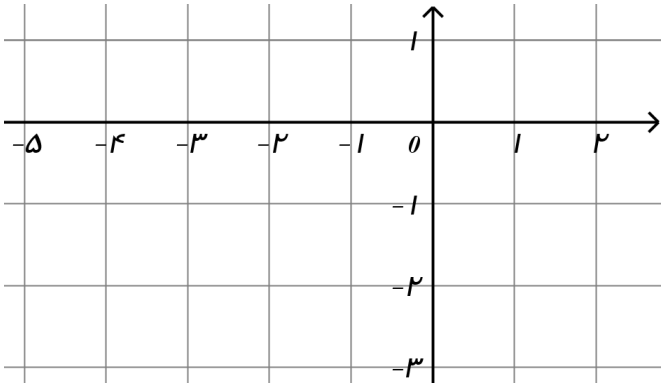


پ) ضابطهٔ توابع f ، g و $f+g$ را به دست آورید.

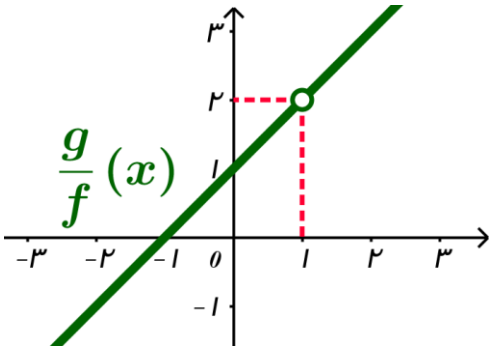
تمرین ۳۷ : به کمک نمودارهای رسم شدهٔ توابع f و g ، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا در نقاط داده شده مشخص کنید، سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطهٔ آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

$x=-۲$ $x=-۱$ $x=۰$ $x=۱$ $x=۲$





تمرین ۳۸ : اگر $g(x)=x^{۲}-۱$ و نمودار تابع $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ به صورت زیر باشد. ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به دست آورید.



تمرین ۳۹ : اگر $g(x)=x+۳$ و تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x-۳$ باشد. ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۴۰ : اگر $f(x)=x^{۲}-۱$ و تابع $(f+g)(x)=۳x^{۲}-۵x+۷$ باشد. ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۴۱ : اگر توابع $f(x)=۱-۲x$ و $g(x)=x^{۲}-۴x+۷$ باشند. مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(x)-(f-g)(x)=$

ب) $(\frac{f}{g})(۳)-(f\times g)(۲)=$

فصل ۲

تمرین ۴۲ : اگر توابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x\geq ۲\\ ۳x+۱ & ۰\leq x<۲\\ ۶ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۲ & x\geq ۲\\ x & ۰\leq x<۲\\ -۵ & x<۰\end{cases}$ باشند. مقدار عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۳)+(f-g)(-۲)-(\frac{f}{g})(۱)=$

ب) $(f\times g)(-۴)+(f+g)(۷)=$

تمرین ۴۳ : اگر توابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x\geq ۰\\ x+۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$ باشند. مقدار عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(-۲)\times(g)(۰)=$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(۳)=$

ریاضی و آمار ۲

تمرین ۴۴ : یک مجتمع صنعتی دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $R_۱(x)=۱۰x$ و $C_۱(x)=x^۲+۲x-۳۰$ باشد و در کارخانه B به ترتیب $R_۲(x)=۱۵x-x^۲$ و $C_۲(x)=۳x+۱۶$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان است).

الف) تابع سود مجتمع صنعتی را به دست آورید.

ب) این مجتمع صنعتی با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می رسد؟