توابع نمایی و لگاریتمی

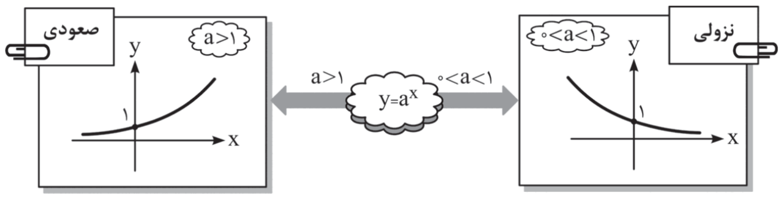
درسنامه‌ی ۱

تعریف تابع نمایی و رسم نمودار آن

تابع به‌صورت $\mathbf{y=a^x}$ که در آن a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک $(a \neq ۱ , a > ۰)$ و x یک متغیر باشد را **تابع نمایی** می‌گوییم.

تذکر: دقت کنیم در توابع نمایی، پایه (یعنی a) هرگز عدد منفی، صفر و یک نمی‌تواند باشد. زیرا اگر پایه‌ی عبارت نمایی منفی باشد، آن‌گاه توان x هر عدد حقیقی نمی‌تواند به خود بگیرد. به عنوان مثال در عبارت $(-۳)^x$، توان x نمی‌تواند به خود مقدار $\frac{۱}{۴}$ را اختصاص دهد. چون حاصل $(-۳)^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{-۳}$ بی‌معنی و تعریف نشده است. اگر پایه‌ی عبارت نمایی صفر و یا یک باشد، تابع نمایی تبدیل به تابع ثابت خواهد شد.

رسم نمودار تابع نمایی $\mathbf{y=a^x}$ $(a \neq ۱ , a > ۰)$



نکات زیر را به‌خاطر بسپاریم ...

با توجه به نمودار تابع $y=a^x$، داریم:

۱) **دامنه‌ی تعریف** تابع نمایی $y=a^x$، **مجموعه‌ی اعداد حقیقی** است $(\mathbf{D_f = \mathbb{R}})$.

۲) **برد** تابع نمایی $y=a^x$، **مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت** است $(\mathbf{R_f = \mathbb{R}^+})$. پس اگر عدد مثبتی را به هر توانی برسانیم، حاصل همواره مثبت است.

۳) در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $\mathbf{a > ۱}$ باشد، تابع **صعودی** بوده و اگر $\mathbf{۰ < a < ۱}$ باشد، تابع **نزولی** است.

۴) تابع نمایی $y=a^x$، یک تابع **یک‌به‌یک** و در نتیجه **معکوس‌پذیر** است.

۵) تابع نمایی $y=a^x$ همواره محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. به عبارتی **عرض از مبدأ تابع نمایی، همواره برابر ۱** است.

۶) تابع نمایی $y=a^x$، **هرگز محور xها را قطع نمی‌کند و همواره بالای محور xها** قرار دارد.

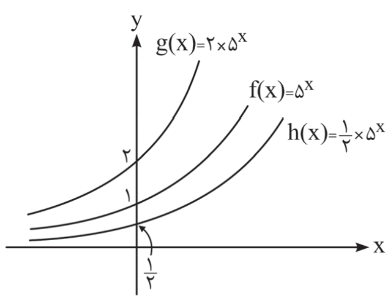
۷) تابع نمایی $y=a^x$ همواره **از ناحیه‌های اول و دوم** دستگاه مختصات می‌گذرد.

۸) در تابع نمایی $y=a^x$، تقعر منحنی همواره روبه بالا است.

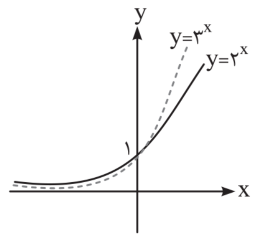
۹) اگر پایه‌ی عبارت نمایی برابر **e** باشد، تابع $\mathbf{y=e^x}$ را **تابع نمایی طبیعی** می‌نامیم که نمودارش قطعاً صعودی است.

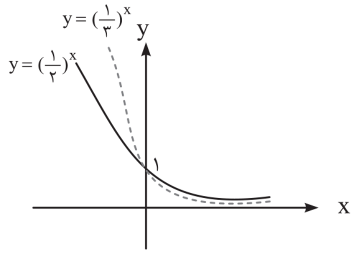
۱۰) در حالت کلی‌تر، تابع به شکل $y=ka^x$ نیز تابع نمایی است. در این تابع عرض نقاط تابع $y=a^x$، k برابر شده است. در نتیجه عرض از مبدأ تابع نمایی $y=ka^x$ برابر k می‌باشد.

اگر $k > ۱$ باشد، نمودار تابع $y=ka^x$ بالای نمودار تابع $y=a^x$ قرار گرفته و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار تابع $y=ka^x$، پایین نمودار تابع $y=a^x$ قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، داریم:

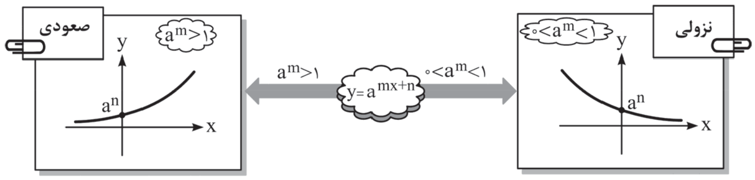


۱۱ مقایسه نمودار توابع نمایی به صورت زیر است. داریم:





رسم نمودار تابع نمایی $y=a^{mx+n}$ $(a^m>0\ ,\ a\neq 1)$



نکات زیر را به خاطر بسپاریم ...

با توجه به نمودار تابع $y=a^{mx+n}$ داریم:

۱) **دامنه‌ی تعریف** تابع $y=a^{mx+n}$، **مجموعه‌ی اعداد حقیقی** $(D_f=\mathbb{R})$ و **برد** آن **مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت** $(R_f=\mathbb{R}^+)$ است.

۲) در تابع نمایی $y=a^{mx+n}$ اگر $\mathbf{a^m>1}$ باشد، تابع **صعودی** و اگر $\mathbf{0<a^m<1}$ باشد، تابع **نزولی** است.

۳) تابع نمایی $y=a^{mx+n}$ همواره محور yها را در نقطه‌ای به عرض a^n قطع می‌کند. به عبارتی **عرض از مبدأ** این تابع برابر $\mathbf{a^n}$ است.

۴) تابع نمایی $y=a^{mx+n}$ **هرگز محور xها را قطع نمی‌کند و همواره بالای محور xها است.** نمودار این تابع همواره در ناحیه‌های **اول و دوم** قرار دارد.

تست آموزشی ۱

تابع نمایی $y=(m^2-1)^x$ به ازای چه مقادیری از m، صعودی است؟

۱) $|m|>0$ ۲) $|m|>\sqrt{2}$ ۳) $|m|>\sqrt{3}$ ۴) $|m|>2$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، تابع نمایی $y=a^x$ زمانی صعودی است که $a>1$ باشد. داریم:

$$y=(\underbrace{m^2-1}_{a})^x \xrightarrow{\text{صعودی}} a>1 \Rightarrow m^2-1>1 \Rightarrow m^2>2 \xrightarrow{\sqrt{}} |m|>\sqrt{2}$$

تست آموزشی ۲

کدام تابع، یک تابع نزولی است؟

۱) $y=e^{2x}$ ۲) $y=(\sqrt{2})^x$ ۳) $y=(\frac{1}{e})^x$ ۴) $y=e^{\frac{x}{2}}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)، می‌دانیم در تابع نمایی $y=a^x$، اگر $a>1$ باشد، تابع نمایی صعودی بوده و اگر $0<a<1$ باشد، تابع نمایی نزولی می‌باشد و در تابع نمایی $y=a^{mx+n}$، اگر $a^m>1$ باشد، تابع نمایی صعودی و اگر $0<a^m<1$ باشد، تابع نمایی نزولی خواهد بود. پس داریم:

گزینه‌ی (۱): $y=e^{2x} \Rightarrow a^m=e^2>1 \Rightarrow$ تابع نمایی صعودی است

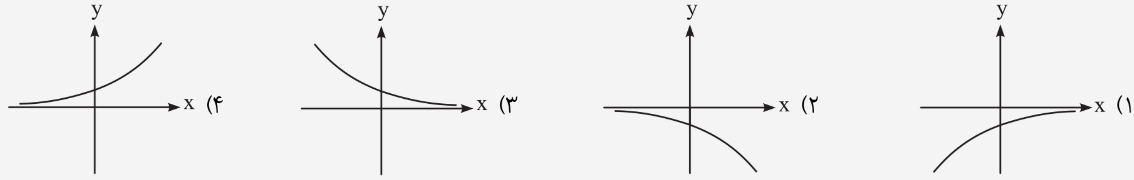
گزینه‌ی (۲): $y=(\underbrace{\sqrt{2}}_{a})^x \Rightarrow a=\sqrt{2}>1 \Rightarrow$ تابع نمایی صعودی است

گزینه‌ی (۳): $y=(\underbrace{\frac{1}{e}}_{a})^x \Rightarrow a=\frac{1}{e}<1 \Rightarrow$ تابع نمایی **نزولی** است

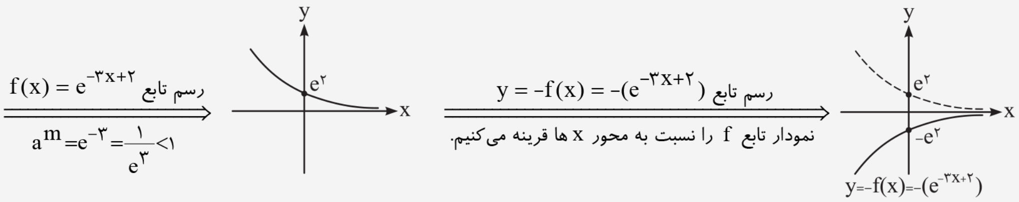
گزینه‌ی (۴): $y=e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow a^m=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}>1 \Rightarrow$ تابع نمایی صعودی است

تست آموزشی ۳

نمودار تابع $y=-(e^{-3x+2})$ کدام است؟



پاسخ: گزینه‌ی (۱)



۱- تابع $y=a^x$ برای $a>1$ .... و برای $0<a<1$ .... است.

۱) نزولی ـ صعودی　　۲) نزولی ـ نزولی　　۳) صعودی ـ نزولی　　۴) صعودی ـ صعودی

۲- اگر $f(x)=\left(\frac{2-a}{2+a}\right)^{x+1}$ تابعی نمایی باشد، مجموعه‌ی مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) $(-2,2)$　　۲) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　۳) $(-2,2)-\{0\}$　　۴) $(2,+\infty)$

۳- تابع $y=(-m^2+6m-4)^x$ به ازای چه مقادیری از m، صعودی است؟

۱) $1<m<5$　　۲) $m>5$ یا $m<1$

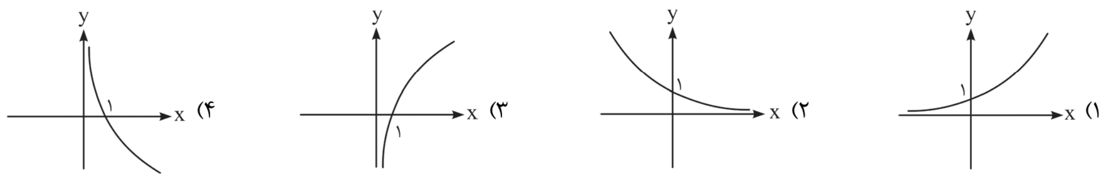
۳) $-5<m<-1$　　۴) $m>-1$ یا $m<-5$

۴- در مورد تابع $y=e^{-x}$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

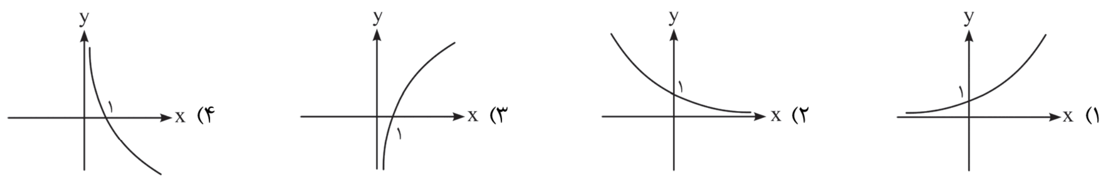
۱) همواره صعودی است.　　۲) همواره نزولی است.

۳) برای $x>0$ نزولی و برای $x<0$ صعودی است.　　۴) هر دو محور را قطع می‌کند.

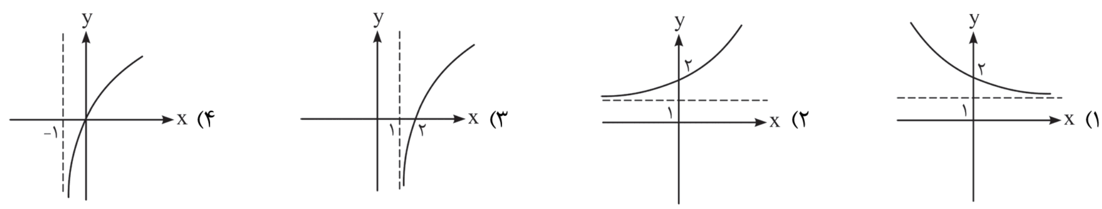
۵- نمودار تابع $y=3^x$ کدام است؟



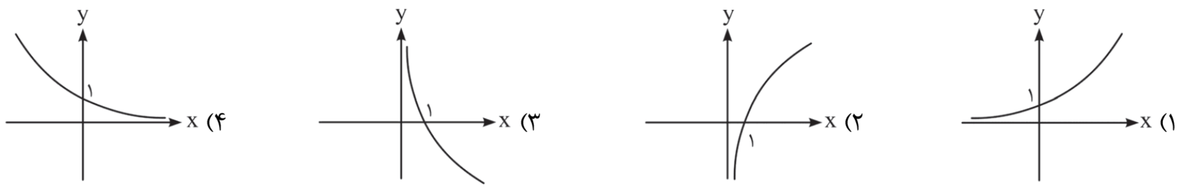
۶- نمودار تابع $y=e^{-3x}$ به کدام صورت است؟



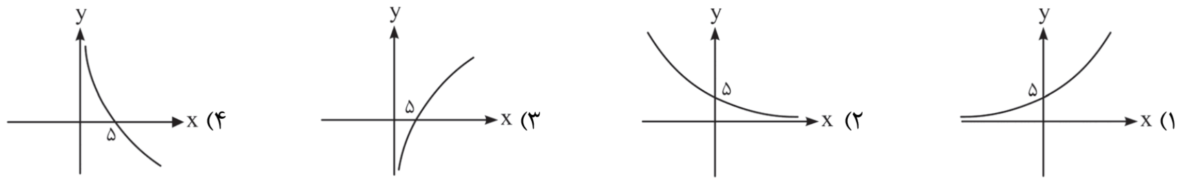
۷- نمودار تابع $y=5^x+1$ چگونه است؟



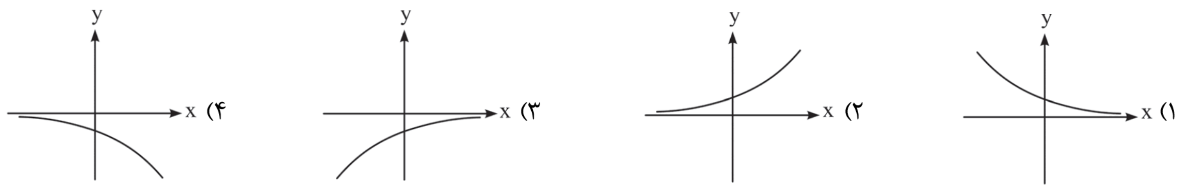
۸- نمودار تابع $y = \dfrac{(\frac{۱}{۴})^{x}}{۳^{-x}}$ کدام است؟



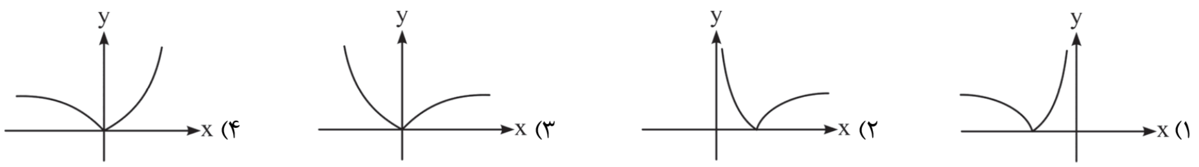
۹- نمودار تابع $y = ۵^{۲x+۱}$ کدام است؟



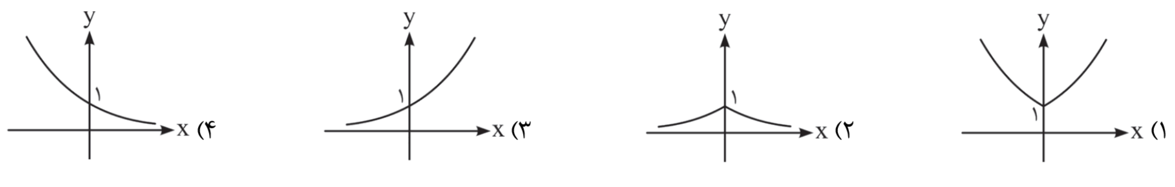
۱۰- نمودار تابع $y = -\left(۳^{-۳x+۲}\right)$ به کدام صورت است؟



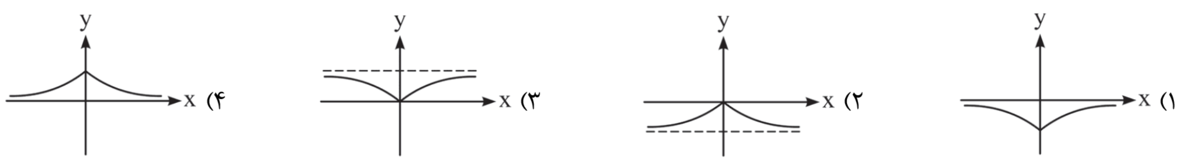
۱۱- نمودار تابع $y = |e^{-۲x} - ۱|$ به کدام صورت است؟



۱۲- نمودار تابع $y = ۳^{-|x|}$ به کدام صورت است؟



۱۳- منحنی نمایش $y = ۱ - e^{-|x|}$ کدام است؟

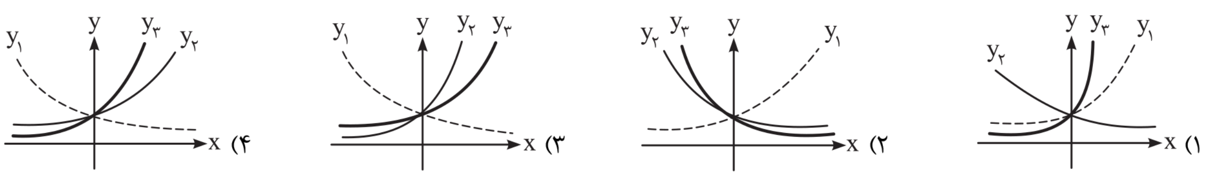


۱۴- تابع $f(x) = a^{x}$، به ازای چند مقدار نامنفی a، وارون‌پذیر نیست؟

۱) به ازای تمام مقادیر a وارون‌پذیر است.　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) بی‌شمار

۱۵- اگر $۰ < a < ۱ < b < c$ باشد، در کدام گزینه نمودارهای $y_۱ = a^{x}$، $y_۲ = b^{x}$ و $y_۳ = c^{x}$ درست رسم شده‌اند؟



۱۶- کدام‌یک از جدول‌های زیر، بیان‌گر تغییرات یک تابع نمایی با ضابطه‌ی $y = k.a^x$ است؟

۱)

x	1	2	3
y	-2	8	-32

۲)

x	1	3	5
y	-192	-24	-3

۳)

x	1	2	4
y	1	4	16

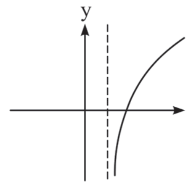
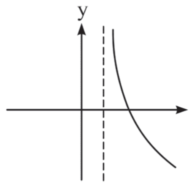
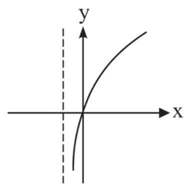
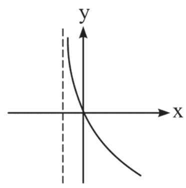
۴)

x	1	3	5
y	1	1	1

۱۷- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور yها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور xها، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$ (سراسری تجربی ۸۲)

۱۸- نمودار معکوس تابع $y = 1 + e^x$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۹- کدام گزینه، معکوس‌پذیر نیست؟

۱) $y = 2^{4x}$ ۲) $y = |2^x|$ ۳) $y = -(\frac{1}{2})^x$ ۴) $y = 2^{|x|}$

۲۰- اگر تابع $y = a^x$ معکوسش را قطع کند و نقطه‌ی تقاطع را $x = x_0$ بنامیم، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $1 < x_0 < 2 \,,\, 0 < a < 1$ ۲) $0 < x_0 < 1 \,,\, 0 < a < 1$ ۳) $0 < x_0 < 1 \,,\, a > 1$ ۴) $1 < x_0 < 2 \,,\, a > 1$

۲۱- اگر $f(x) = 4^x$، آن‌گاه $f(x+1) - f(x)$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $f(x)$ ۳) $2f(x)$ ۴) $3f(x)$

۲۲- اگر $f(x) = (\sqrt{3})^x$ و داشته باشیم $f(x+5) - f(x+3) = Af(x+1)$، آن‌گاه A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۷۲

۲۳- ساده شده‌ی ضابطه‌ی تابع $f(x) = \dfrac{3^{x+3} - 3^{x+2} - 3^{x+1}}{9^x + 9^x + 9^x}$ کدام است؟

۱) $f(x) = 5 \times 3^x$ ۲) $f(x) = 5 \times 9^x$ ۳) $f(x) = \dfrac{5}{9^x}$ ۴) $f(x) = \dfrac{5}{3^x}$

درسنامه‌ی ۲

حل معادلات نمایی

برای حل معادلات نمایی، کافی است در دو طرف تساوی، تنها دو عبارت نمایی **هم‌پایه** ایجاد کنیم (بدون ضریب). حال ادعا می‌کنیم توان‌ها نیز باید با هم برابر باشند. با تساوی توان‌ها، ریشه‌ی معادله به دست می‌آید:

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$$

تست آموزشی ۴

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\left(\dfrac{1}{3^{x+1}}\right)^{x+2} = 81^{x+1}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ‎-۵ ۴) ‎-۷

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\left(\frac{1}{3^{x+1}}\right)^{x+2} = 81^{x+1} \Rightarrow \left(3^{-(x+1)}\right)^{(x+2)} = (3^4)^{x+1} \Rightarrow 3^{-(x+1)(x+2)} = 3^{4(x+1)}$$

$$\Rightarrow -x^2 - 3x - 2 = 4x + 4 \Rightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -7$$

یا $\text{مجموع ریشه‌ها} = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{1} = -7$

تذکر: کمی بعد می‌آموزیم اگر در معادله‌ی نمایی یک طرف تساوی $a^{\text{مجهول}}$ و سمت دیگر عدد ثابت مثبتی باشد را نیز می‌توانیم حل کنیم. داریم: $a^{\text{مجهول}} = \text{عدد مثبت} \xrightarrow{\log a} \cdots$

۲۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $8^{x^2+1} = 2^{5x+1}$ چه‌قدر است ؟

۱) ۲   ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) صفر   ۴) $\frac{1}{3}$

۲۵- مقدار x از معادله‌ی $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 32^{x+1}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{14}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{5}{14}$

۲۶- جواب x از معادله‌ی $25^{3x} = \frac{1}{5^{2x+2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۴   ۴) ۴-

۲۷- اگر $2^A = \left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2$، عدد A کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴ خارج از کشور)

۱) ۸   ۲) ۱۶   ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $12\sqrt{2}$

۲۸- ریشه‌ی معادله‌ی $3^{x-2} - 9 \times 3^{2x+2} = 0$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۶   ۳) ۶-   ۴) ۳-

۲۹- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\left(\frac{1}{3^{x+1}}\right)^{x+3} = (9^2)^{x(x+1)}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $-\frac{8}{5}$ ۳) $-\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{8}{5}$

۳۰- مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $5^{x+|x-2|} = 25$ کدام است؟

۱) $(-\infty,2]$ ۲) $[2,+\infty)$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $(-\infty,-2]$

۳۱- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{2^x \times (\sqrt{2})^{x-1}}{8}$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $-\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۲- جواب معادله‌ی $4^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 72$ کدام است؟

۱) ۴-   ۲) ۴   ۳) ۲-   ۴) ۲

۳۳- معادله‌ی $\left(\frac{1}{9}\right)^{|x-1|} = 3^{1-|x+1|}$:

۱) فقط یک جواب مثبت دارد.   ۲) فقط یک جواب منفی دارد.

۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.   ۴) دو جواب مثبت دارد.

۳۴- معادله‌ی $e^{|4-x|} \times e^{|2x-19|} = e^{|15-x|}$ دارای چند ریشه‌ی صحیح است؟

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۶

۳۵- معادله‌ی $9^x + 3^x - 2 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) صفر

۳۶- معادله‌ی $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ چند جواب دارد؟

۱) بی‌شمار   ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

۳۷- معادله‌ی $9^x + 6^x = 2 \times 4^x$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

۳۸- فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$، از نقطه‌ی $A(0,4)$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵   (سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

تعریف تابع لگاریتمی و رسم نمودار آن

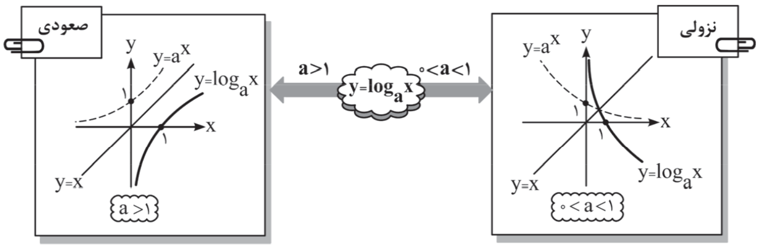
تابع نمایی $y = a^x$ $(a > 0 ، a \neq 1)$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم تابع نمایی، یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. **معکوس تابع نمایی** $\mathbf{y = a^x}$ که با تعویض جای x و y به‌دست می‌آید را **تابع لگاریتمی (در مبنای a)** می‌نامیم و آن را به‌صورت $\mathbf{y = \log_a x}$ $\mathbf{(a > 0 ، a \neq 1)}$ نمایش می‌دهیم. داریم:

$$y = a^x \xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} \boxed{x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x}$$

تذکر: دقت کنیم در توابع لگاریتمی، پایه یا مبنای لگاریتم (یعنی a) هرگز عدد منفی، صفر و یک نمی‌تواند باشد.

رسم نمودار تابع $\mathbf{y = \log_a x}$ $\mathbf{(a > 0 ، a \neq 1)}$

می‌دانیم نمودار دو تابع معکوس هم، نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه‌اند. از آن‌جا که تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است، نمودار تابع لگاریتمی از قرینه کردن نمودار تابع نمایی $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ به‌دست می‌آید. داریم:



نکات زیر را به خاطر بسپاریم ...

با توجه به نمودار تابع $y = \log_a x$، داریم:

① تابع نمایی و لگاریتمی معکوس یک‌دیگرند.

② درتابع لگاریتمی $y = \log_a x$ اگر $\mathbf{a > 1}$ باشد، تابع **صعودی** بوده و اگر $\mathbf{0 < a < 1}$ باشد، تابع **نزولی** است.

③ **دامنه‌ی تعریف** تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ ، **مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت** است $\mathbf{(D_f = \mathbb{R}^+)}$. چون برد تابع نمایی، دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی به‌حساب می‌آید، بنابراین لگاریتم اعداد منفی و صفر وجود ندارد.

④ **برد** تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ ، **مجموعه‌ی اعداد حقیقی** است $\mathbf{(R_f = \mathbb{R})}$. چون دامنه‌ی تابع نمایی، برد تابع لگاریتمی می‌باشد، بنابراین جواب لگاریتم می‌تواند عددی مثبت، صفر و یا منفی باشد.

⑤ تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ همواره محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. به عبارتی **طول از مبدأ تابع لگاریتمی، همواره برابر ۱** است $(\log_a 1 = 0)$.

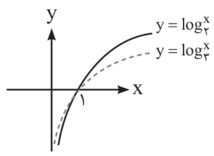
⑥ تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ هرگز محور yها را قطع نمی‌کند و همواره در سمت راست محور yها قرار دارد.

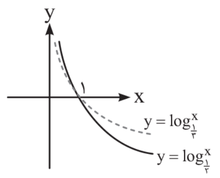
⑦ تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ همواره از **ناحیه‌های اول و چهارم** دستگاه مختصات می‌گذرد.

⑧ اگر **مبنای لگاریتم** برابر **e** باشد، تابع $\mathbf{y = \log_e x}$ یا همان $\mathbf{y = \ln x}$ را **تابع لگاریتمی طبیعی** می‌نامیم که نمودارش قطعاً صعودی است.

⑨ لگاریتم در **مبنای ۱۰** را **لگاریتم اعشاری** گفته و در این حالت معمولاً مبنا را نمی‌نویسیم.

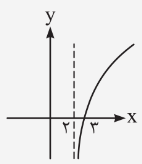
⑩ مقایسه نمودار توابع لگاریتمی به صورت زیر است: داریم:

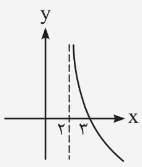


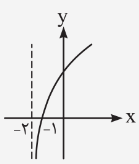


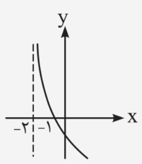
تست آموزشی ۵

نمودار تابع $\mathbf{y = \log_{0/5}(x - 2)}$ کدام است؟

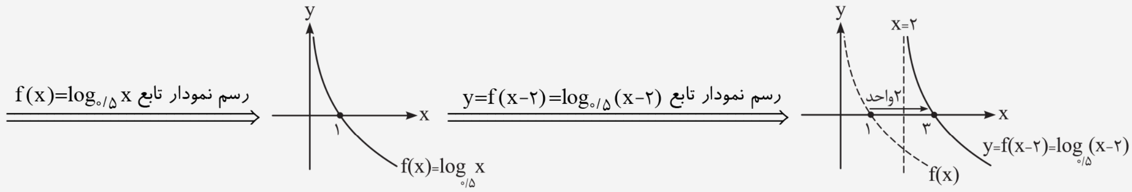
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، ضابطه‌ی تابع $y=\log_{0/5}(x-2)$ بسیار شبیه به ضابطه‌ی تابع $f(x)=\log_{0/5}x$ است. با این تفاوت که باید به جای x، $x-2$ را در تابع f جایگزین نماییم. به عبارتی $y=f(x-2)=\log_{0/5}(x-2)$ است. پس برای رسم این تابع باید نمودار f را رسم کرده و ۲ واحد در راستای افقی به‌سمت راست انتقال دهیم. داریم:



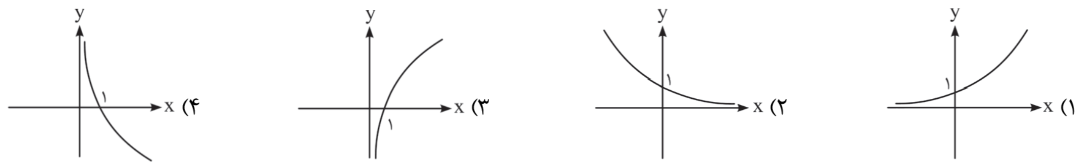
۳۹- تابع $y=\log_a x$ به ازای $1>a>0$ و $a>1$، به ترتیب چگونه است؟

۱) صعودی ـ نزولی ۲) نزولی ـ صعودی ۳) نزولی ـ نزولی ۴) صعودی ـ صعودی

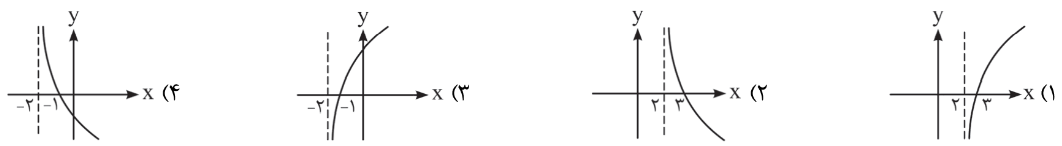
۴۰- تابع $y=\log_{(1-m^2)}x$ به ازای چه مقادیری از m، نزولی است؟

۱) $|m|<1$ ۲) $0<|m|<1$ ۳) $0<m<1$ ۴) $-1<m<0$

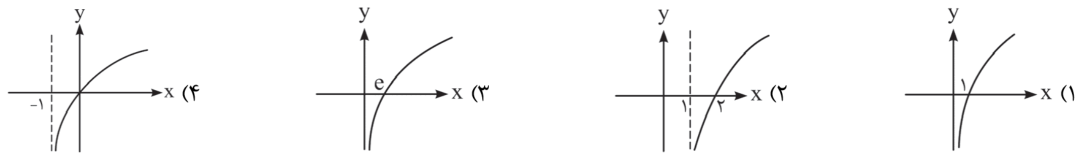
۴۱- نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ کدام است؟



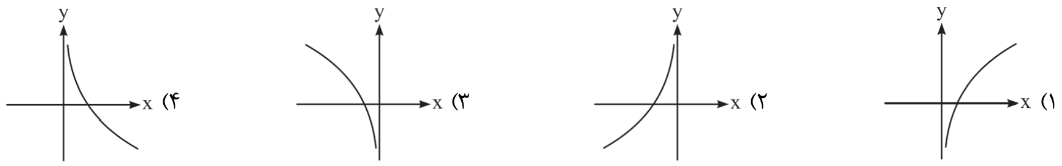
۴۲- نمودار تابع $y=\ln(x-2)$ کدام است؟



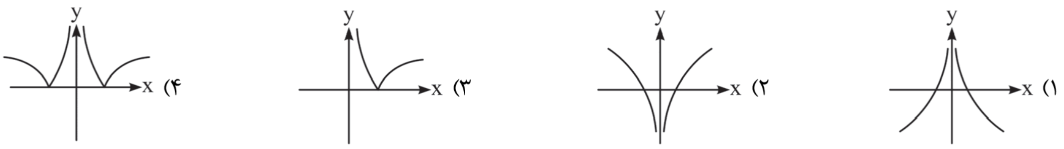
۴۳- نمودار تابع $y=\ln x-1$ کدام است؟



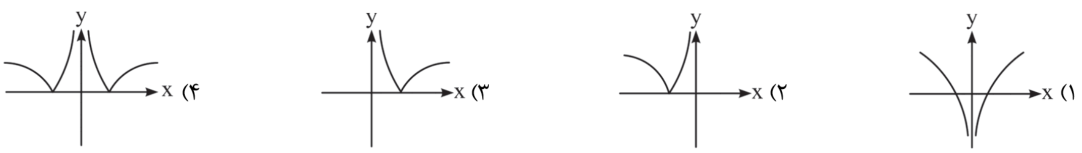
۴۴- نمودار تابع $y=-\ln(-x)$ کدام است؟



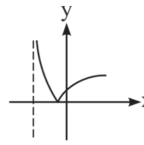
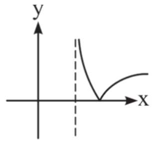
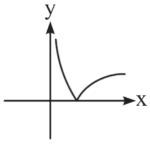
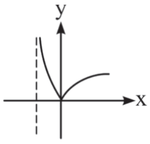
۴۵- نمودار تابع $y=\log_{0/5}|x|$ کدام است؟



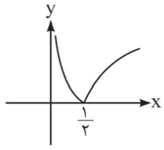
۴۶- نمودار تابع $y=|\ln(-x)|$ کدام است؟

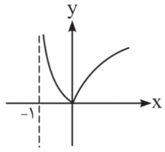


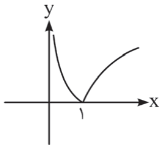
۴۷- نمودار تابع $y=\left|\log_{\frac{۱}{۳}}(x-۲)\right|$ به کدام صورت است؟

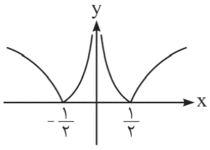
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۴۸- نمودار تابع $y=\left|۱-\log_{۲}\frac{۱}{x}\right|$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۹- معادله‌ی $\log_{\sqrt{۵}}x=(\sqrt{۵})^x$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) بی‌شمار

۵۰- معادله‌ی $e^x+\ln|x|=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۴

درسنامه‌ی ۴

دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی

برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی، ابتدا عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم. سپس چون مبنا باید مخالف یک باشد، مقادیری که مبنا به ازای آن‌ها برابر یک می‌شود را از مجموعه‌ی جواب به‌دست آمده، حذف می‌کنیم. به عبارتی دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی $f(x)=\log_{h(x)}g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_f=\{x|\underbrace{g(x)>۰}_{۱},\underbrace{h(x)>۰}_{۲},\underbrace{h(x)\neq ۱}_{۳}\}$$

از اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های ۱ ، ۲ و ۳ ، دامنه‌ی تابع f مشخص خواهد شد.

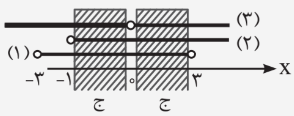
تست آموزشی

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\log_{x+۱}(۹-x^۲)$ کدام است؟

۱) $(-۳,۱)-\{۰\}$　۲) $(-۱,۳)-\{۰\}$　۳) $(-۳,۳)-\{۰\}$　۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_{x+۱}(۹-x^۲)$، داریم:

$$\begin{cases} ۱\quad ۹-x^۲>۰\Rightarrow -۳<x<۳ \\ ۲\quad x+۱>۰\Rightarrow x>-۱ \\ ۳\quad x+۱\neq ۱\Rightarrow x\neq ۰ \text{ یا } x\in\mathbb{R}-\{۰\} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}}$$



$\Rightarrow -۱<x<۰ \text{ یا } ۰<x<۳$

بنابراین $D_f=(-۱,۳)-\{۰\}$ است.

۵۱- دامنه‌ی تعریف تابع $y=\ln\frac{x-۳}{۲-x}$ کدام است؟

۱) $۲<x<۳$　۲) $۲<x\leq ۳$　۳) $x<۲$ یا $x\geq ۳$　۴) $x\leq ۲$ یا $x\geq ۳$

۵۲- تمام دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_x(x^۲+۹)$ کدام فاصله است؟

۱) $(-\infty,+\infty)$　۲) $(۰,+\infty)$　۳) $[-۳,۳]$　۴) $\{x|x>۰,x\neq ۱\}$

۵۳- دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\log(x-۱)}{\log(۴-x^۲)}$ کدام است؟

۱) $\{x|-۲<x<۲\}$　۲) $\{x|۱<x<۲,x\neq\sqrt{۳}\}$　۳) $\{x|۱<x<۲\}$　۴) $\{x|x>۱\}$

۵۴- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\sqrt{\ln(x-۱)}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$　۲) $[۲,+\infty)$　۳) $(۱,۲]$　۴) $[e,+\infty)$

مفهوم حاصل لگاریتم، تبدیل تساوی‌های نمایی و لگاریتمی به یک‌دیگر

هرگاه تساوی $x=a^y$ $(a\neq ۱ , a>۰ , x>۰)$ برقرار باشد، y را حاصل لگاریتم x در پایه‌ی (مبنای) a می‌نامیم و داریم:

$$\boxed{x=a^y \Leftrightarrow \log_a x = y}$$

به عنوان مثال، حاصل $\log_{۱۰}۱۰$، $\log_{۱۰}۱۰۰$ و $\log_{۱۰}۱۰۰۰$ به‌ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. چون:

$$۱۰=۱۰^۱ \Rightarrow \log_{۱۰}۱۰=۱ \quad , \quad ۱۰۰=۱۰^۲ \Rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰=۲ \quad , \quad ۱۰۰۰=۱۰^۳ \Rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$$

پس این جمله را به خاطر بسپاریم که **اگر مبنای لگاریتم را به توان جواب لگاریتم برسانیم، حاصل برابر با مقدار عبارت جلوی لگاریتم است.**

تست آموزشی ۷

اگر $\log_{۱۶} N = \frac{۳}{۲}$ باشد، N کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\log_{۱۶} N = \frac{۳}{۲} \Rightarrow N = ۱۶^{\frac{۳}{۲}} = (۲^۴)^{\frac{۳}{۲}} = ۲^{۴\times\frac{۳}{۲}} = ۲^۶ = ۶۴ \Rightarrow N = ۶۴$$

قواعد و قضایای لگاریتم (قسمت اول)

اگر $a>۰$ و $a\neq ۱$ باشد، داریم:

قاعده‌ی ۱ : لگاریتم یک در هر مبنای دلخواهی، برابر با صفر است. یعنی: $\boxed{\log_a ۱ = ۰}$

قاعده‌ی ۲ : لگاریتم هر عدد مثبتِ مخالف یک در مبنای خودش، برابر با یک است. یعنی: $\boxed{\log_a a = ۱}$

قاعده‌ی ۳ : $\boxed{\log_a (A.B) = \log_a |A| + \log_a |B|}$ یا $\boxed{\log_a A + \log_a B = \log_a (A.B)}$

قاعده‌ی ۴ : $\boxed{\log_a \frac{A}{B} = \log_a |A| - \log_a |B|}$ یا $\boxed{\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}}$

قاعده‌ی ۵ : $\boxed{\log_a x^n = n\log_a x \quad ; \quad (x>۰)}$

قاعده‌ی ۶ : $\boxed{\log_{a^m} x = \frac{۱}{m}\log_a x \quad ; \quad (x>۰)}$

به عبارت دیگر طبق قاعده‌های (۵) و (۶)، توان عبارت جلوی لگاریتم و عکس توان مبنا را می‌توانیم به عنوان ضریب لگاریتم در نظر بگیریم، یعنی:

قاعده‌ی ۷ : $\boxed{\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x \quad ; \quad (x>۰)}$

دقت کنیم: اگر پشت لگاریتم ضریبی وجود داشته باشد، می‌توانیم مستقیماً آن را به عنوان توان عبارت جلوی لگاریتم در نظر بگیریم و یا عکس آن‌را توانِ مبنا فرض کنیم:

$$\boxed{n.\log_a x = \log_a x^n = \log_{a^{\frac{۱}{n}}} x}$$

به عنوان مثال، داریم:

$$\log_۴ ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۲}(۱) = \frac{۳}{۲} \quad , \quad \log_۹ \frac{۱}{۲۷} = \log_{۳^۲} ۳^{-۳} = -\frac{۳}{۲}\log_۳ ۳ = -\frac{۳}{۲}(۱) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\log_{a^۳} b^۲ = \frac{۲}{۳}\log_a b = \log_a b^{\frac{۲}{۳}} = \log_{a^{\frac{۳}{۲}}} b = \log_{a^{\frac{۱}{۲}}} b^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow \log_{a^۳} b^۲ = \frac{۲}{۳}\log_a b = \log_a \sqrt[۳]{b^۲} = \log_{a\sqrt{a}} b = \log_{\sqrt{a}} \sqrt[۳]{b}$$

تست آموزشی ۸

حاصل $\log_{\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{64}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $-\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، برای محاسبه‌ی حاصل $\log_{\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{64}\right)$، کافی است عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را تجزیه کرده و به صورت عوامل توانی با پایه‌های یکسان بنویسیم. داریم:

$$\log_{\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{64}\right)=\log_{\sqrt[3]{2^4}}\left(\frac{1}{2^6}\right)=\log_{2^{\frac{4}{3}}}2^{-6}=\frac{-6}{\frac{4}{3}}\times\log_2 2=\frac{-18}{4}\times 1=-\frac{9}{2}$$

تست آموزشی ۹

اگر لگاریتم a در پایه‌ی $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن‌گاه لگاریتم (a^3+7) در پایه‌ی ۸ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$\log_{\sqrt{3}} a=\frac{4}{3}\Rightarrow a=(\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\Rightarrow a=3^{\frac{2}{3}}\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم}}a^3=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3=3^2=9$$

$$\Rightarrow \log_8(a^3+7)\xrightarrow{a^3=9}\log_8(\overbrace{9+7}^{16})=\log_{2^3}2^4=\frac{4}{3}\underbrace{\log_2 2}_{1}=\frac{4}{3}$$

تست آموزشی ۱۰

حاصل $\log_6 2\sqrt{3}+\log_6 3\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳)

$$\log_6 2\sqrt{3}+\log_6 3\sqrt{2}\xrightarrow{\log_6 A+\log_6 B=\log_6(AB)}\log_6(2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2})=\log_6 6\sqrt{6}=\log_6 6^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

تست آموزشی ۱۱

اگر $\log_b a=\frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}}(ab^2)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\log_{\sqrt{b}}(ab^2)=\log_{b^{\frac{1}{2}}}(ab^2)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_b(ab^2)=2(\log_b a+\log_b b^2)=2(\log_b a+2\log_b b)=2\left(\frac{3}{2}+2\right)=\cancel{2}\times\frac{7}{\cancel{2}}=7$$

۵۵- اگر $z=\log_y x$ باشد، آن‌گاه:

۱) $x=z^y$ ۲) $z=x^y$ ۳) $y=x^{\frac{1}{z}}$ ۴) $y=x^z$

۵۶- در کدام مبنا، لگاریتم عدد ۲۷ برابر ۳- است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۵۷- اگر $\log_{50} A=\frac{1}{2}$ و $\log_{32} B=\frac{1}{2}$ باشد، $\frac{A+B}{A-B}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۵۸- اگر $\log_2 12=\alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶ خارج از کشور)

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۵۹- به عدد ۳۰۱ چند واحد اضافه کنیم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۸، برابر ۳ گردد؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۱۲ ۳) ۲۱۱ ۴) ۳۰۱

۶۰- اگر $f(x)=\log_{۲}(x+۴)$ باشد، حاصل $f(۴)+f(-۳)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۶۱- اگر $\log_y x = ۳$ باشد، حاصل $\log_y \sqrt{x}$ چه‌قدر است؟ (آزاد تجربی ۸۸ خارج از کشور)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\sqrt{۳}$

۶۲- حاصل $\log_{۵}(\sqrt{۱۲۵})^{۳}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۶۳- حاصل $\log_{\frac{۱}{۴}} ۸\sqrt[۳]{۲}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

۶۴- حاصل عبارت $\left|\log_{\frac{۱}{۲}} ۸\right|+\log_{۸}\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶}$ ۳) ۳ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۶۵- حاصل $\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۶۶- حاصل $\log_{x\sqrt{x}} x\sqrt[۳]{x}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۶۷- حاصل $\log_{x\sqrt[۳]{x}} \sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۶۸- اگر $x=y^{۳}=\sqrt{a}$ باشد، حاصل $\log_a x+\log_a y^{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۹- اگر $A=۸^{\frac{۵}{۳}}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{۲}} ۴A^{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۷۰- اگر $۳^{a}=۹\sqrt{۳}$ باشد، لگاریتم $a^{۲}$ در مبنای ۲/۵ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۷۱- اگر $۴^{a}=۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $(۴a+۱)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۲- اگر $x=y^{۳}=\sqrt{a}$ باشد، حاصل $\log_a x+\log_{a^{۲}} y$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۷۳- $\log_{\frac{۱}{b}} a$ برابر کدام است؟

۱) $\log_b \frac{۱}{a}$ ۲) $-\log_b \frac{۱}{a}$ ۳) $\log_a b$ ۴) $(\log_b a)^{-۱}$

۷۴- نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_{۲}\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ (سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $f(x)$ بالاتر ۲) $g(x)$ بالاتر ۳) منطبق‌اند ۴) فقط در یک نقطه متقاطع

۷۵- حاصل $\log_{(1+\sqrt{2})}(3+2\sqrt{2})^{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 3 ۳) 6 ۴) $\frac{2}{3}$

۷۶- اگر $x = 8\log_4 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه‌ی x کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷ خارج از کشور)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

۷۷- اگر $\log_5 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{25}\frac{\sqrt{3}}{3}$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{a}{4}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{a}{2}$ ۴) $\frac{a}{4}$

۷۸- اگر $\log_3 5 = a$ باشد، حاصل $\log_3 15$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a}{3}$ ۲) $a-1$ ۳) $a+1$ ۴) $3a$

۷۹- اگر $\log_y x . \log_{y^3\sqrt{y}} y^2 = 4$ باشد، $\log_{y^2}\sqrt{x}$ چه‌قدر است؟

۱) 7 ۲) 28 ۳) $\frac{7}{16}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۸۰- اگر $f(x) = \log_6(x-3)$ باشد، آن‌گاه $f(12)+f(7)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۸۱- حاصل $\log 5 + \log 200 + \log 500 + \log 2000$ کدام است؟

۱) 9 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 15

۸۲- حاصل $\log_2\frac{31}{32} + \cdots + \log_2\frac{10}{11} + \log_2\frac{9}{10} + \log_2\frac{8}{9}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) 3 ۴) -3

۸۳- اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6-2\sqrt{5}) + 2\log(1+\sqrt{5})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) $2k$ ۲) $4k$ ۳) $1+k$ ۴) $2+4k$

۸۴- اگر $\log 2 = 0/301$ و $\log 3 = 0/477$ باشد، $\log 6000$ برابر کدام است؟

۱) $3/222$ ۲) $2/778$ ۳) $4/778$ ۴) $3/778$

۸۵- اگر $\log 3 = 0/477$، آن‌گاه حاصل، $\log 0/03 + \log 30 + \log 300$ کدام است؟

۱) $1/477$ ۲) $1/431$ ۳) $2/431$ ۴) $2/477$

۸۶- اگر $\log_{10} 2 = a$ و $\log_{10} 3 = b$ باشد، حاصل $\log_{10} 0/36 - \log_{10}\frac{9}{4}$ کدام است؟

۱) $b-4a-2$ ۲) $b-4a+2$ ۳) $2-4a$ ۴) $4a-2$

۸۷- اگر $\log 2 + \log 3 = a$، $\log 3 + \log 7 = b$ و $\log 2 + \log 7 = c$ باشد، $\log 42$ چه‌قدر است؟ (آزاد تجربی ۸۰)

۱) $\frac{abc}{2}$ ۲) $\frac{a+b+c}{2}$ ۳) $\sqrt{a+b+c}$ ۴) $\sqrt{abc}$

۸۸- اگر $\log 2 = a$ باشد، مقدار $\log 25$ کدام است؟

۱) $1-a$ ۲) $a-1$ ۳) $2a-2$ ۴) $2-2a$

۸۹- با فرض $\log 2 = a$، مقدار $\log 1/25$ کدام است؟

۱) $1-3a$ ۲) $2-3a$ ۳) $3a-1$ ۴) $3a-2$

۹۰- اگر $\log 6 = a$ و $\log 3 = b$، حاصل $\log 25$ کدام است؟

۱) $2(1+a-b)$ ۲) $2(1+a+b)$ ۳) $2(1-a+b)$ ۴) $2(1-a-b)$

۹۱- اگر $\log 2 = 0/301$ باشد، حاصل $\log\sqrt[3]{\frac{16}{5}}$ کدام است؟

۱) $0/168$ ۲) $0/186$ ۳) $0/243$ ۴) $0/324$

۹۲- اگر $\log 5 = 3k$ باشد، حاصل $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

۱) $1-4k$ ۲) $2-5k$ ۳) $1-2k$ ۴) $1-k$

۹۳- اگر $\log_{15} 3 = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{15} 625$ کدام است؟

۱) $4(1-a)$ ۲) $(\frac{1}{a})^4$ ۳) $(a-1)^4$ ۴) $4(a-1)$

۹۴- اگر $\log_{20} 4 = k$ باشد، حاصل $\log_4 5$ چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{1+k}{k}$ ۲) $\frac{k}{1-k}$ ۳) $\frac{k-1}{k}$ ۴) $\frac{1-k}{k}$

درسنامه‌ی ۶

قواعد و قضایای لگاریتم (قسمت دوم)

قاعده‌ی ۸ :

$$\boxed{\log_B A = \frac{1}{\log_A B}} \Rightarrow \boxed{\log_B A \times \log_A B = 1}$$

در حل بعضی از تست‌ها مجبور هستیم، جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را با هم عوض کنیم. برای این منظور کافی است به این نکته دقت کنیم که با این جابه‌جایی، حاصل لگاریتم جدید، عکس لگاریتم قبلی است. به عنوان مثال اگر $\log_a x = 2$ باشد، حاصل $\log_x a$ برابر با $\frac{1}{2}$ است.

به خاطر بسپاریم ...

$$\boxed{\log_A B = k \Rightarrow \log_B A = \frac{1}{k}}$$

قاعده‌ی ۹ :

$$\boxed{\log_B A \times \log_C B = \log_C A}$$

مهم‌ترین کاربرد قاعده‌ی فوق، **تغییر مبنا** است. از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$\boxed{\log_B A = \frac{\log_C A}{\log_C B}}$$

به عنوان مثال داریم:

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} \quad , \quad \log_5 3 \times \log_3 5 = 1 \quad , \quad \underbrace{\log_5 3 \times \log_7 5}_{\log_7 3} \times \log_9 7 = \log_7 3 \times \log_9 7 = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

تست آموزشی ۱۲

اگر $\log_3 2 = a$ باشد، حاصل $\log_4 \sqrt{3}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $4a$ ۴) $\frac{1}{4a}$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\log_3 2 = a \Rightarrow \log_2 3 = \frac{1}{a}$$

$$\log_4 \sqrt{3} = \log_{2^2} 3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} \log_2 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4a}$$

تست آموزشی ۱۳

اگر $\log_a 2 = \frac{1}{\log_4 a} - \frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) 8 ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{64}$ ۴) 64

پاسخ: گزینه‌ی (۴)، می‌دانیم $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$، بنابراین داریم:

$$\log_a 2 = \frac{1}{\log_4 a} - \frac{1}{6} \Rightarrow \log_a 2 = \log_a 4 - \frac{1}{6} \Rightarrow \log_a 4 - \log_a 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_a \frac{4}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \log_a 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_2 a = 6 \xrightarrow{\text{با توجه به تعریف لگاریتم}} a = 2^6 = 64$$

تست آموزشی ۱۴

حاصل $\log_4 3 \times \log_3 16$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\log_4 3 \times \log_3 16 = \log_3 16 \times \log_4 3 \xlongequal{\log_B A \times \log_C B = \log_C A} \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2(1) = 2$$

تست آموزشی ۱۵

اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$، آن‌گاه $\log_6 5$ کدام است؟

۱) $\frac{1-a}{a+b}$ ۲) $\frac{ab}{a+b}$ ۳) $\frac{1+a}{a+b}$ ۴) $\frac{a-b}{a+b}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱)، می‌دانیم $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ است. چون مبنای لگاریتم‌ها عدد ۱۰ است، پس برای تعیین حاصل $\log_6 5$ ابتدا مبنا را به عدد ۱۰ تغییر می‌دهیم. داریم:

$$\log_6 5 \xlongequal{\text{تغییر مبنا به ۱۰}} \frac{\log 5}{\log 6} = \frac{1-\log 2}{\log(2\times 3)} = \frac{1-\log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{1-a}{a+b}$$

۹۵- حاصل عبارت $\log_2 3 \times \log_9 3 \times \log_2 4 \times \log_3 4$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۹۶- حاصل عبارت $\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \dots \times \log_{128} 127$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) ۷ ۳) $-\frac{1}{7}$ ۴) ۷-

۹۷- حاصل $\log_{3\sqrt{3}} \sqrt{5} \times \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{9} \times \log_{\frac{1}{25}} 8$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- اگر $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\log_2 \frac{2}{a}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۵

۹۹- اگر $\log_5 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt[3]{9}} 625$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{6a}$ ۲) $\frac{6}{a}$ ۳) $6a$ ۴) $\frac{a}{6}$

۱۰۰- اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{A}{4}$ ۲) $\frac{A}{2}$ ۳) $\frac{2}{A}$ ۴) $\frac{4}{A}$

۱۰۱- اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد، $\log_3 2$ کدام است؟

۱) $\frac{a-1}{2a}$ ۲) $\frac{1-a}{2a}$ ۳) $\frac{1-a}{a}$ ۴) $\frac{a-1}{a}$

۱۰۲- اگر $a = \frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_4 12}$ باشد، حاصل $\log_{(a^2+7)} \sqrt{a+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۳- اگر $\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = 2$، حاصل $\log_{\sqrt[3]{abc}} 6$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۰۴- حاصل $\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log 36}{\log 4} - \frac{\log \sqrt{15}}{\log \sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۰۵- اگر $\log x = a$ و $\log y = b$ باشد، $\log_{y^2} x^2$ برابر کدام است؟

۱) $a.b$ ۲) $\frac{a}{b}$ ۳) $\frac{4a}{b}$ ۴) $\frac{2b}{a}$

۱۰۶- اگر $\log 5 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log_{30} 12$ بر حسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{2a+b}{a+1}$ ۲) $\frac{b+2-2a}{b+1}$ ۳) $\frac{2b+a}{a+1}$ ۴) $\frac{b+1-2a}{b+1}$

۱۰۷- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log_{18}\sqrt{12}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a+b}{a+2b}$ ۲) $\frac{a+2b}{2a+2b}$ ۳) $\frac{2a+b}{2a+4b}$ ۴) $\frac{2a+b}{a+2b}$

۱۰۸- عبارت $\frac{\log_3 16}{\log_5 8 + \log_5 4}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}\log_3 5$ ۲) $\frac{4}{5}\log_5 3$ ۳) $\frac{2}{5}\log_5 3$ ۴) $\frac{2}{5}\log_3 5$

۱۰۹- اگر $\log_5 8 = a$ باشد، حاصل $\log_{10} 2$ چه‌قدر است؟

۱) $a+3$ ۲) $\frac{a}{a+3}$ ۳) $3a$ ۴) $\frac{1}{3a}$

درسنامه‌ی ۷

قواعد و قضایای لگاریتم (قسمت سوم)

قاعده‌ی ۱۰ :

$$A^{\log_a B} = B^{\log_a A} \xRightarrow{\text{در حالت کلی}} A^{m\log_a B} = B^{m\log_a A}$$

اگر در یک عبارت نمایی، توان، یک لگاریتم باشد، می‌توانیم جای پایه‌ی عبارت نمایی و عبارت جلوی لگاریتمِ توان را با هم جابه‌جا کنیم. به عنوان مثال، داریم:

$$5^{\log_{25} 9} = 9^{\log_{25} 5} = 9^{\log_{5^2} 5} = 9^{\frac{1}{2}\log_5 5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

تذکر مهم: قاعده‌ی ۱۰ حالت خاصی هم دارد. اگر در این قاعده، پایه‌ی عبارت نمایی و مبنای لگاریتم توان با هم برابر باشند، با جابه‌جایی پایه و عبارت جلوی لگاریتمِ توان، حاصل بسیار ساده می‌شود. به قاعده‌ی زیر دقت کنیم.

$$a^{\log_a B} = B \xRightarrow{\text{در حالت کلی}} a^{m\log_a \bigcirc} = \bigcirc^m$$

به عنوان مثال، داریم:

$$3^{\log_3 4} = 4^{\log_3 3} = 4^1 = 4 \quad , \quad e^{\ln \sin x} = \sin x \quad , \quad e^{3\ln 2} = 2^3 = 8$$

تست آموزشی ۱۶

حاصل $4^{\log_4 6 - \log_2 3}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) -3 ۴) -2

پاسخ: گزینه‌ی (۱)

$$4^{\log_4 6 - \log_2 3} \xlongequal{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}} \frac{4^{\log_4 6}}{4^{\log_2 3}} = \frac{6^{\log_4 4}}{3^{\log_2 4}} = \frac{6^1}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

تست آموزشی ۱۷

حاصل عبارت $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}} = \sqrt{10^2 \times 10^{\frac{1}{2}\log 16}} = \sqrt{100 \times 16^{\frac{1}{2}\log 10}} = \sqrt{100 \times \sqrt{16}} = \sqrt{100 \times 4} = \sqrt{400} = 20$$

۱۱۰- حاصل $a^{\log_x b} - b^{\log_x a}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) $a^a - b^b$ ۳) $a^b - b^a$ ۴) $a - b$

۱۱۱- حاصل $2^{\log_8 x}$ کدام است؟

۱) x^2 ۲) x^3 ۳) $\sqrt[3]{x}$ ۴) $\sqrt{x}$

۱۱۲- حاصل $3^{\log_3 2} + 4^{\log_4 2}$ چه‌قدر است؟

۱) ۷   ۲) ۵   ۳) ۴   ۴) ۱

۱۱۳- حاصل عبارت $b^{x\log_b a} \times a^{x\log_a b}$ کدام است؟

۱) ab ۲) $(\frac{a}{b})^x$ ۳) $(ab)^x$ ۴) ۱

۱۱۴- حاصل $25^{1-\log_5 2}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{25}{2}$ ۲) $\frac{25}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) ۴

۱۱۵- حاصل $(0/25)^{-1+\log_{\sqrt{2}} 10}$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۰۴   ۲) ۰/۰۰۴   ۳) ۰/۰۰۰۴   ۴) ۰/۰۰۱۶

۱۱۶- ساده شده‌ی عبارت $5^{(2\log_5 2+3\log_5 3)}$ برابر کدام است؟

۱) ۶   ۲) 5^5 ۳) 5^6 ۴) ۱۰۸

۱۱۷- حاصل $\ln\sqrt[5]{e^4} + e^{-\ln 5}$ کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}e$ ۴) ۱

۱۱۸- حاصل $\sqrt{10}^{(4\log\sqrt[3]{16} - \log 4)}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{4}$ ۲) $\sqrt[3]{8}$ ۳) $\sqrt[3]{16}$ ۴) $\sqrt[3]{32}$

۱۱۹- حاصل عبارت $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$ کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۴   ۳) ۱۲   ۴) ۱۶

۱۲۰- حاصل عبارت $-e^{2\ln 2} + \frac{\log_{\sqrt{e}} x\sqrt{x}}{\ln x} + \ln\frac{1}{e^2}$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۳-   ۳) ۱   ۴) ۱-

درسنامه‌ی ۸

حل معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات شامل لگاریتم، باید لگاریتم را برداریم. برای این منظور دو روش کلی زیر وجود دارد:

روش اول: شکل معادله را به صورت $\log_a f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$ تبدیل کنیم. حال بنا به تعریف و مفهوم حاصل لگاریتم، نتیجه می‌گیریم که $f(x) = a^k$ می‌باشد. از حل این معادله، جواب‌های معادله‌ی لگاریتمی را مشخص می‌کنیم:

$$\boxed{\log_a f(x) = k \Rightarrow f(x) = a^k \quad (k \in \mathbb{R})}$$

شرط استفاده از این روش آن است که یک طرف تساوی، یک لگاریتم (بدون ضریب) و طرف دیگر تساوی، عددی حقیقی داشته باشیم.

روش دوم: شکل معادله را به‌صورت $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ تبدیل کنیم. حال ادعا می‌کنیم عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها، با هم برابرند، یعنی $f(x) = g(x)$ است. از حل این معادله، جواب‌های معادله‌ی لگاریتمی را مشخص می‌نماییم.

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)}$$

شرط استفاده از این روش آن است که در دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم‌مبنا (بدون ضریب) داشته باشیم.

تذکر بسیار مهم: در حل معادلات لگاریتمی، **حتماً حتماً** (تاکید می‌کنم) ریشه‌های به‌دست آمده از روش‌های بالا را در معادله چک کنیم. برای این منظور، بعد از حل معادله، جواب‌های به‌دست آمده را در صورت اصلی و اولیه قرار می‌دهیم و کنترل می‌کنیم به ازای این جواب‌ها، لگاریتم‌ها تعریف‌شده خواهند بود یا خیر. به زبان ساده، اگر به ازای این جواب‌ها، جلوی لگاریتم‌ها، مثبت و مبناها مثبت و مخالف یک باشند، آن‌ها را می‌پذیریم. اگر یکی از این موارد نقض شود، جواب به‌دست آمده غیرقابل‌قبول است. به عنوان مثال، داریم:

$$۱)\ \log_۴(x^۲-۱)-\log_۴(۳x-۳)=۰ \Rightarrow \log_۴\overbrace{(x^۲-۱)}^{f}=\log_۴\overbrace{(۳x-۳)}^{g} \xrightarrow{f=g} x^۲-۱=۳x-۳ \Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \xrightarrow{\text{عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها صفر می‌شود}} (\text{غ ق ق}) \\ x=۲ (\text{ق ق}) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله ۱ ریشه دارد}$$

$$۲)\ \log_۳(x^۲-۱)=۲ \Rightarrow x^۲-۱=۳^۲ \Rightarrow x^۲=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۱۰} \\ x=-\sqrt{۱۰} \end{cases} \xrightarrow[\text{عبارت جلوی لگاریتم را مثبت می‌کنند}]{\text{هر دو جواب به‌دست آمده،}} \text{معادله ۲ ریشه دارد}$$

تست آموزشی ۱۸

از معادله‌ی $\log(۲x-۱)+\log(x+۳)=\log ۳۰-\log ۲$، مقدار $\log_۸ x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$\log(۲x-۱)+\log(x+۳)=\log ۳۰-\log ۲ \Rightarrow \log(۲x-۱)(x+۳)=\log\frac{۳۰}{۲} \Rightarrow \log(۲x^۲+۵x-۳)=\log ۱۵$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۱۵ \Rightarrow ۲x^۲+۵x-۱۸=۰ \Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۵^۲-۴\times۲\times(-۱۸)}}{۲(۲)}=\frac{-۵\pm\overset{۱۳}{\cancel{\sqrt{۱۶۹}}}}{۴}=\begin{cases} x=۲ (\text{ق ق}) \\ x=\frac{-۱۸}{۴} (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

حال با معلوم بودن مقدار $x=۲$، مقدار $\log_۸ x$ برابر است با:

$$\log_۸ x \overset{x=۲}{=\!=} \log_{۲^۳} ۲=\frac{۱}{۳}\overset{۱}{\cancel{\log_۲ ۲}}=\frac{۱}{۳}$$

تست آموزشی ۱۹

اگر $\log_۲(۵x+۱)+\log_۲ x=۲$ باشد، عدد $\frac{۴}{x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۰)

۱) -۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی (۴)، در سمت راست معادله‌ی $\log_۲(۵x+۱)+\log_۲ x=۲$، عدد ۲ دیده می‌شود. پس کافی است سمت چپ تساوی را تبدیل به یک لگاریتم کرده و در سمت راست عدد ۲ را بنویسیم. حال با توجه به تعریف لگاریتم، داریم:

$$\log_۲(۵x+۱)+\log_۲ x=۲ \Rightarrow \log_۲\overbrace{(۵x+۱)x}^{۵x^۲+x}=۲ \Rightarrow ۵x^۲+x=۲^۲ \Rightarrow ۵x^۲+x-۴=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ (\text{غ ق ق}) \\ x=\frac{۴}{۵} (\text{ق ق}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{x} \overset{x=\frac{۴}{۵}}{=\!=} \frac{\cancel{۴}}{\frac{\cancel{۴}}{۵}}=۵$$

تست آموزشی ۲۰

از معادلات $۲^x\times۲^y=۴$ و $\log_{۱۰} x=\log_{۱۰} ۲+\log_{۱۰} y$، مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، ابتدا سعی می‌کنیم دو معادله‌ی داده شده را از شکل نمایی و لگاریتمی خارج کنیم. برای این منظور، داریم:

$$\begin{cases} ۲^x\times۲^y=۴ \Rightarrow ۲^{x+y}=۲^۲ \Rightarrow x+y=۲ \\ \log_{۱۰} x=\log_{۱۰} ۲+\log_{۱۰} y \Rightarrow \log_{۱۰} x=\log_{۱۰} ۲y \Rightarrow x=۲y \end{cases} \Rightarrow ۳y=۲ \Rightarrow y=\frac{۲}{۳},\ x=\frac{۴}{۳} (\text{ق ق})$$

۱۲۱- در مورد معادله‌ی $x(x-1)\log_{10} x = 0$، کدام گزینه درست است؟

۱) دو ریشه دارد. ۲) یک ریشه دارد. ۳) سه ریشه دارد. ۴) ریشه ندارد.

۱۲۲- معادله‌ی $\log_x(4x+1) = \log_x(x^2+4)$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۳- ریشه‌ی معادله‌ی $\log(x-1) + \log(x+1) = \log 3$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۲ و ۲- ۴) ۱ و ۳

۱۲۴- جواب معادله‌ی $\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 64$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

۱۲۵- اگر $2\log(x-2) = \log(x+10)$، آن‌گاه $\log_4(x+2)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۶- با فرض آن‌که $\log(1+\frac{1}{x}) + 2\log x = \log 2$، مقدار $\frac{2}{x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۲۷- از معادله‌ی لگاریتمی $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۸- از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۲۹- از تساوی $\log_x(x^2+4) = 1 + \log_x 5$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۳۰- معادله‌ی $\log(x-2) + \log(x-3) = 1 + \log 3$ دارای:

۱) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه است. ۲) دو ریشه‌ی مثبت است. ۳) یک ریشه‌ی مثبت است. ۴) ریشه نیست.

۱۳۱- اگر $\log(x^2 - x + 1) + \log(x+1) = 1$، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۳ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۳۲- معادله‌ی $\log\frac{x+1}{x+2} + \log\frac{x+2}{x+3} + \log\frac{x+3}{x+4} = -1$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۴) ۱

۱۳۳- از معادله‌ی $\log_2(4x+2) = 2\log_2\sqrt{x+4} + 1$، مقدار $\log_{\sqrt[3]{9}} x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۳۴- از تساوی $\log_{10}(2x-1) + \frac{1}{2}\log_{10} x^2 = \log_{10} 3$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۳۵- از معادله‌ی لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x-3) = \log(2x-5)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱ (سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

۱۳۶- اگر $\log(81)^K = \log 3 + \log\sqrt[4]{3}$، آن‌گاه لگاریتم $\frac{5}{K}$ در پایه‌ی ۲ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۷- جواب معادله‌ی $\log_3 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_9 x$ کدام است؟

۱) 3^2 ۲) 3^3 ۳) 3^5 ۴) 3^4

۱۳۸- به ازای کدام مقدار x، تساوی $\log_{10} 1000000 = \log_{100} x + \log_{10} 1000$ برقرار می‌گردد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰۰۰

۱۳۹- جواب معادله‌ی $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۱۴۰- لگاریتم عددی در پایه‌ی ۹، از لگاریتم معکوس مجذور آن در پایه‌ی ۹، به اندازه‌ی ۴/۵ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۳۶ ۳) ۲۷ ۴) ۱۸

۱۴۱- معادله‌ی $\log_{10}(x-1) + \log_{10}(x-2) = \log_{10}(x^3+2)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲- از معادله‌ی لگاریتمی $2\log_{10} x = 1 + \log_{10}\left(x + \frac{12}{5}\right)$، مقدار $\log_5(2x+1)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۳- در معادله‌ی $\log_2 \log_3 (1+2x) = 1$، مقدار x کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۴۴- از معادله‌ی $\log_2\left(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}\right) = -2$، مقدار x برابر کدام است؟

۱) -4 ۲) -16 ۳) ۱۶ ۴) ۴

۱۴۵- اگر $\log_{10} x$، $\log_{10}(x+3)$ و $\log_{10} 4x$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، حاصل $\log_8(x+1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۴۶- اگر $4^x = 4\sqrt{2}$ و $\log y = 1 + \log\sqrt{x+1}$، مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۱۴۷- از دو معادله‌ی $\log_{10}(y+2) = 1$ و $\log_{10}(y-x) + \log_{10}(4x+y) = 2$، مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷ خارج از کشور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸- اگر $\begin{cases} \log_3 x - \log_9 y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$، آن‌گاه $x + y$ چه‌قدر است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۴۹- از دو معادله‌ی $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$، لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۵۰- معادله‌ی لگاریتمی $\log_5 x + \log_x 5 = 2$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۱- از دو معادله‌ی $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y + x^2) = 2$، مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵۲- اگر $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$ و $\log_{10} x^2 - \log_{10} y = 4$ باشد، حاصل $\log_{10}(x^3 y)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۷)

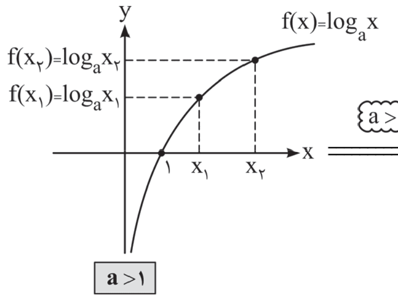
۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۸

۱۵۳- یکی از جواب‌های معادله‌ی $(\log_2 x)^2 - 9\log_8 x = 4$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) -16 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲۷

نامساوی‌ها و نامعادلات لگاریتمی

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\log_a x$، می‌توانیم روابط زیر را نتیجه‌گیری نماییم:

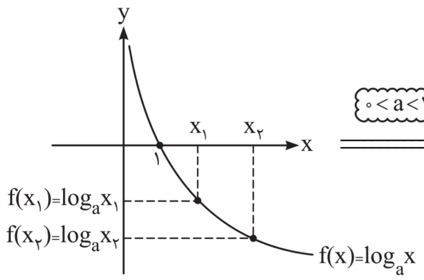


$\xRightarrow{a>۱}$

$x>۱ \Rightarrow \log_a x>۰$, $۰<x<۱ \Rightarrow \log_a x<۰$

$x_۱<x_۲ \Leftrightarrow \log_a x_۱<\log_a x_۲$

قاعده‌ی بالا به این مفهوم است که از دو طرف یک نامساوی می‌توانیم لگاریتم در مبنای بزرگ‌تر از واحد بگیریم و جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. از طرفی اگر در دو طرف یک نامساوی دو لگاریتم با مبنای بزرگ‌تر از واحد وجود داشته باشد، می‌توانیم لگاریتم‌ها را حذف کرده و نامساوی حاصل را بین عبارت‌های جلوی آن‌ها بنویسیم.



$\xRightarrow{۰<a<۱}$

$x>۱ \Rightarrow \log_a x<۰$, $۰<x<۱ \Rightarrow \log_a x>۰$

$x_۱<x_۲ \Leftrightarrow \log_a x_۱>\log_a x_۲$

قاعده‌ی بالا به این مفهوم است که از دو طرف یک نامساوی می‌توانیم لگاریتم در مبنای مثبت و کوچک‌تر از واحد بگیریم به شرط آن‌که جهت نامساوی عکس گردد. از طرفی اگر در دو طرف نامساوی دو لگاریتم با مبنای مثبت و کوچک‌تر از یک وجود داشت، می‌توانیم لگاریتم‌ها را حذف کرده و نامساوی را با جهت عکس‌اش برای عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها بنویسیم.

نکات زیر را به خاطر بسپاریم ...

- اگر مبنا و عدد جلوی لگاریتم، هر دو بزرگ‌تر از یک باشند و یا هر دو بین صفر و یک باشند، حاصل لگاریتم مثبت است.
- اگر مبنا و عدد جلوی لگاریتم، یکی بین صفر و یک و دیگری بزرگ‌تر از یک باشد، حاصل لگاریتم منفی است.

به عنوان مثال داریم:

$\ln\frac{۳}{۴}<۰$, $\ln ۳>۰$, $\log_{\frac{۱}{۴}} ۰/۲>۰$, $\log_{\frac{۱}{۲}} ۵<۰$

- برای حل نامعادلات لگاریتمی، داریم:

$$\log_a f(x) \lesseqgtr k \begin{cases} \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{a>۱} f(x) \lesseqgtr a^k \\ \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود}]{۰<a<۱} f(x) \gtreqless a^k \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \lesseqgtr \log_a g(x) \begin{cases} \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{a>۱} f(x) \lesseqgtr g(x) \\ \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود}]{۰<a<۱} f(x) \gtreqless g(x) \end{cases}$$

تست آموزشی ۲۱

دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log_{۱۰}(x-۱)}$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی ۸۶ خارج از کشور)

۱) $(۱,۲]$ ۲) $[۲,۱۰]$ ۳) $[۱,۱۱)$ ۴) $(۱,۱۱]$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\begin{cases} x-۱>۰ \Rightarrow x>۱ \quad (۱) \\ ۱-\log_{۱۰}(x-۱)\geq ۰ \Rightarrow \log_{۱۰}(x-۱)\leq ۱ \xRightarrow{\text{مبنا بزرگ‌تر از یک است}} x-۱\leq ۱۰^۱ \Rightarrow x\leq ۱۱ \quad (۲) \end{cases} \xRightarrow{(۱)\cap(۲)} D_f=(۱,۱۱]$$

۱۵۴- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $\log_{3} 2 > 0$ ۲) $\log_{0/2} 0/3 > 0$ ۳) $\log_{2} 0/1 < 0$ ۴) $\log(\log 2) > 0$

۱۵۵- کوچک‌ترین مقدار در بین اعداد زیر، کدام است؟

۱) $\log_{2} 3$ ۲) $\log_{10} \frac{3}{2}$ ۳) $\log_{3} 2$ ۴) $\log_{10} \frac{2}{3}$

۱۵۶- کدام گزینه درست است؟

۱) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} 100$ ۲) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{3} 2$ ۳) $\log_{5} 3 > \log_{3} 5$ ۴) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2$

۱۵۷- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\log_{2}(2x-1) < -2$ کدام است؟

۱) $x > \frac{5}{8}$ ۲) $x > \frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}$ ۴) $0 < x < \frac{5}{8}$

۱۵۸- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $2 + \log_{0/25}(x-3) \geq 0$ کدام است؟

۱) $[3,16]$ ۲) $[3,19]$ ۳) $(3,19]$ ۴) $(3,16]$

۱۵۹- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\log_{10} \frac{x-1}{2}}$ کدام است؟

۱) $(1,3]$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۱۶۰- دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{-1 - \log_{2} \frac{3x+4}{5}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3} < x \leq -\frac{1}{2}$ ۲) $x \leq -\frac{1}{2}$ ۳) $x > -\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3} < x < 1$

درسنامه‌ی ۱۰

محاسبه‌ی مقدار تقریبی لگاریتم

برای محاسبه‌ی تقریبی $\log_a A$، کافی است ابتدا عبارت A را بین دو توان صحیح و متوالی a قرار دهیم. سپس از طرفین نامساوی نوشته شده در مبنای a لگاریتم بگیریم (دقت کنیم! اگر $a > 1$ باشد، جهت نامساوی عوض نمی‌شود. ولی اگر $0 < a < 1$ باشد، جهت نامساوی عوض خواهد شد). با انجام این کار، مقدار تقریبی (یا همان قسمت صحیح جواب) $\log_a A$ مشخص می‌شود.

به عنوان مثال برای محاسبه‌ی مقدار تقریبی یا همان قسمت صحیح جواب $\log_{10} 321$، داریم:

$$10^2 < 321 < 10^3 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{\log_{10}} \log_{10} 10^2 < \log_{10} 321 < \log_{10} 10^3 \Rightarrow 2 < \log 321 < 3 \Rightarrow \log 321 = 2/...$$

برای تمرین بیشتر، به مثال‌های زیر توجه کنیم:

$$\ln 5 \Rightarrow e^1 < 5 < e^2 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{\log_e \text{ یا } \ln} \ln e^1 < \ln 5 < \ln e^2 \Rightarrow 1 < \ln 5 < 2 \Rightarrow \ln 5 = 1/...$$

$$\log 0/002 \Rightarrow \underbrace{10^{-3}}_{0/001} < 0/002 < \underbrace{10^{-2}}_{0/01} \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{\log_{10}} \log 10^{-3} < \log 0/002 < \log 10^{-2} \Rightarrow -3 < \log 0/002 < -2 \Rightarrow \log 0/002 = -2/...$$

نکته‌ی طلایی: برای تعیین **قسمت صحیح لگاریتم اعشاری** عدد x (یعنی قسمت صحیح جواب $\log_{10} x$)، دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

۱) اگر $x > 1$ باشد، قسمت صحیح جواب، یک واحد کم‌تر از تعداد ارقامِ عدد x است. به عنوان مثال، داریم:

$$\log \underbrace{321}_{\text{۳ رقم}} = 2/... \quad , \quad \log \underbrace{875}_{\text{۳ رقم}} = 2/... \quad , \quad \log \underbrace{1391}_{\text{۴ رقم}} = 3/... \quad , \quad \log \underbrace{7}_{\text{۱ رقم}} = 0/...$$

۲) اگر $0 < x < 1$ باشد، جواب $\log_{10} x$ قطعاً منفی است. قدرمطلق قسمت صحیح جواب برابر با تعداد صفرهای کنار هم جلوی ممیز است. به عنوان مثال داریم:

$$\log 0/\underbrace{00}_{\text{۲ صفر جلوی ممیز}}2 = -\underbrace{2}_{\text{قدرمطلق قسمت صحیح جواب}}/... \quad , \quad \log 0/03013 = -1/... \quad , \quad \log 0/1391 = -0/...$$

دقت کنیم: اگر عدد بین صفر و یک برابر با توان‌های صحیح منفی عدد ۱۰ باشد، استثنای حالت ۲ رخ می‌دهد. داریم:

$$\log 10^{-1} = \log 0/1 = -1 \quad , \quad \log 10^{-2} = \log 0/01 = -2 \quad , \quad \log 10^{-3} = \log 0/001 = -3$$

حاصل $[\log_2 6]+[\log_6 2]$ برابر است با: ([ ] نماد جزء صحیح است.) (آزاد ریاضی ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، برای محاسبه‌ی حاصل $[\log_2 6]+[\log_6 2]$، کافی است قسمت صحیح $\log_6 2$ و $\log_2 6$ (عبارت‌های داخل براکت) را مشخص کنیم. داریم:

$$\log_6 2: 6^0 < 2 < 6^1 \xrightarrow[a=6>1]{\log_6} \log_6 6^0 < \log_6 2 < \log_6 6^1 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow \log_6 2 = \overset{\substack{\text{قسمت صحیح}\\ \uparrow}}{0}/\cdots$$

$$\log_2 6: 2^2 < 6 < 2^3 \xrightarrow[a=2>1]{\log 2} \log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow \log_2 6 = \overset{\substack{\text{قسمت صحیح}\\ \uparrow}}{2}/\cdots$$

$$\begin{cases} 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0 \\ 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2 \end{cases} \Rightarrow [\log_6 2]+[\log_2 6] = 0+2 = 2$$

۱۶۱- حاصل $[\log 1319]+[\log 0/02]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۲- حاصل $[\log_{3\sqrt[3]{3}} 4]$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۳- حاصل $[\frac{1}{5}\log 2]+[5\log 2]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۴- مقدار $A=\log_5 626$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

۱) $\frac{1}{5} < A < \frac{1}{4}$ ۲) $5 < A < 6$ ۳) $4 < A < 5$ ۴) $-5 < A < -4$

۱۶۵- اگر $\log_5 \frac{1}{26} = a$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $-3 < a < -2$ ۲) $a > -2$ یا $a < -3$

۳) $2 < a < 3$ ۴) $a > 3$ یا $a < 2$

۱۶۶- لگاریتم عدد ۰/۰۰۵۰۶ در مبنای ۱۰، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱) صفر، ۱- ۲) ۱-، ۲- ۳) ۳-، ۴- ۴) ۲-، ۳-

۱۶۷- بیشترین مقدار تابع $y=(\log_5 3)^{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\log_3 5$ ۴) $\log_5 3$

۱۶۸- اگر $\log a = 3/64$ باشد، عدد a^3 چند رقمی است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۶۹- اگر $\log \frac{100}{a} = 4/124$، آن‌گاه عدد a^5 بعد از ممیز چند صفر کنار هم دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۷۰- اگر $\log \sqrt{a} = -1/074$، آن‌گاه تعداد صفرهای بعد از ممیز و در سمت چپ عدد اعشاری a^3 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷۱- اگر $\log 2 = 0/301$، عدد 5^{18} چند رقمی است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

حل معادلات نمایی پیچیده با استفاده از لگاریتم

یادآوری: همان‌طور که در مبحث معادلات نمایی اشاره شد، برای به‌دست آوردن جواب معادله، کافی است در دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی **هم‌پایه** ایجاد کرده و سپس توان‌ها را با هم برابر قرار دهیم. به عنوان مثال در معادله‌ی $۲^{۳x} = ۸$، داریم:

$$۲^{۳x} = ۸ = ۲^{۳} \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$$

ممکن است در حل برخی معادلات نمایی، نتوانیم دو طرف تساوی را هم‌پایه کنیم. در این حالت، کافی است ابتدا معادله را بر حسب $a^{u(x)}$ حل کنیم (یعنی مقدار $a^{u(x)}$ را به‌دست آوریم) و سپس از طرفین تساوی در مبنای پایه‌ی a، لگاریتم بگیریم (یا ln بگیریم). به عنوان مثال در معادله‌ی نمایی $۲^{۳x} = ۷$ داریم:

$$۲^{۳x} = ۷ \xrightarrow{\log_۲} \log_۲ ۲^{۳x} = \log_۲ ۷ \Rightarrow ۳x \cancel{\log_۲ ۲} = \log_۲ ۷ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}\log_۲ ۷ = \frac{۱}{۳}\frac{\ln ۷}{\ln ۲} = \frac{\ln ۷}{\ln ۸} = \log_۸ ۷$$

تست آموزشی ۲۳

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(e^x - ۵)(۲e^x - ۷) = ۰$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی (ریاضی عمومی))

۱) $\ln ۳۵$ ۲) $\ln\frac{۳۵}{۲}$ ۳) $\ln\frac{۳۵}{۴}$ ۴) $\ln\frac{۳۵}{۸}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$(e^x - ۵)(۲e^x - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} e^x - ۵ = ۰ \Rightarrow e^x = ۵ \xrightarrow{\ln} x = \ln ۵ \\ ۲e^x - ۷ = ۰ \Rightarrow e^x = \frac{۷}{۲} \xrightarrow{\ln} x = \ln\frac{۷}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \ln ۵ + \ln\frac{۷}{۲} = \ln\frac{۳۵}{۲}$$

تست آموزشی ۲۴

ریشه‌ی معادله‌ی $۲e^{x-۳} = \frac{۱}{e^{x+۱}}$ کدام است؟

۱) $۲ + \ln ۲$ ۲) $۲ + \ln ۲$ ۳) $۱ + \frac{۱}{۲}\ln ۲$ ۴) $۱ - \frac{۱}{۲}\ln ۲$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$۲e^{x-۳} = \frac{۱}{e^{x+۱}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} ۲e^{x-۳} \times e^{x+۱} = ۱ \Rightarrow ۲e^{(x-۳)+(x+۱)} = ۱ \Rightarrow e^{۲x-۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\ln} ۲x - ۲ = \ln\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\ln\frac{۱}{۲} + ۲}{۲} = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲}\ln ۲^{-۱} + ۱ = ۱ - \frac{۱}{۲}\ln ۲$$

۱۷۲- معادله‌ی $(e^x + ۳)^۲ - ۲۵ = ۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۷۳- ریشه‌های معادله‌ی $(e^x - ۷)(e^{۲x} + ۶) = ۰$ کدام است؟

۱) $\ln ۷$ و $\ln ۳$ ۲) $\ln ۷$ ۳) $\ln ۳$ ۴) $\ln ۶$

۱۷۴- ریشه‌ی معادله‌ی $(e^x + ۳)^۳ = ۱۲۵$ کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) $\ln ۳$ ۳) $\ln ۵$ ۴) $\ln\frac{۱}{۲}$

۱۷۵- جواب معادله‌ی $۳^x = ۲^{۱-x}$ کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) $\log_۲ ۶$ ۳) $\log_۶ ۲$ ۴) $\ln ۶$

۱۷۶- معادله‌ی $|۲e^{۳x} - ۵| = |e^{۳x} - ۱|$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۷۷- اگر $\frac{e^{۲x} - ۳}{e^{۲x} - ۱} = ۵$ باشد، آن‌گاه حاصل $e^{\ln x}$ کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) $\frac{۱}{۲}\ln ۲$ ۳) $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱}{۲}$ ۴) $\ln\frac{۱}{۲}$

۱۷۸- جواب معادله‌ی $۲e^{۲x} + ۵e^x - ۳ = ۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\ln\frac{۱}{۲}$ ۳) $\ln\sqrt{۲}$ ۴) $\ln ۲$

۱۷۹- ریشه‌ی معادله‌ی $e^{۲x+۱} - ۵e^{x+۱} = ۶e$ کدام است؟

۱) $\ln ۲$ ۲) $\ln ۵$ ۳) $\ln ۶$ ۴) e

۱- (۳) با توجه به درسنامه‌ی مطرح شده گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۲- (۳) می‌دانیم در توابع نمایی، پایه باید مثبت و مخالف یک باشد، پس داریم:

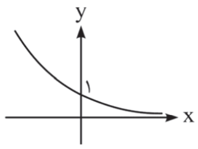
$$\begin{cases} \dfrac{2-a}{2+a} > 0 \Rightarrow -2 < a < 2 \\ \dfrac{2-a}{2+a} \neq 1 \Rightarrow 2-a \neq 2+a \Rightarrow a \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a \in (-2,2) - \{0\}$$

۳- (۱) برای آن که تابع نمایی $y = a^x$ صعودی باشد، باید پایه‌ی آن (یعنی a) را بزرگ‌تر از یک قرار دهیم:

$$y = (\underbrace{-m^2 + 6m - 4}_{\text{یا همان پایه } a})^x \xrightarrow[\text{صعودی است}]{\text{تابع نمایی}} a > 1 \Rightarrow -m^2 + 6m - 4 > 1 \Rightarrow -m^2 + 6m - 5 > 0 \Rightarrow 1 < m < 5$$

۴- (۲) برای آن که بتوانیم در مورد تابع $y = e^{-x}$ اظهارنظر کنیم، باید ضابطه‌ی آن را به شکل $y = a^x$ درآوریم. داریم:

$$y = e^{-x} = (e^{-1})^x = \Big(\underbrace{\frac{1}{e}}_{0<a<1}\Big)^x$$

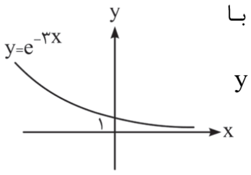


همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، چون پایه‌ی تابع نمایی (یعنی $a = \frac{1}{e}$) بین صفر و یک است، در نتیجه نمودار آن نزولی می‌باشد. این تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده و محور xها را هرگز قطع نمی‌کند. بنابراین جواب درست، گزینه‌ی (۲) است.

۵- (۱) چون پایه‌ی عبارت نمایی $y = 3^x$ (یعنی ۳)، بزرگ‌تر از یک است، نمودار تابع نمایی صعودی می‌باشد و جواب درست گزینه‌ی (۱) خواهد بود. دقت کنیم که برد تابع نمایی، مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. در نتیجه گزینه‌ی (۳) و گزینه‌ی (۴) نادرست‌اند.

۶- (۲) **روش اول:** برای رسم تابع $y = e^{-3x}$، کافی است شکل ضابطه‌ی تابع را به صورت $y = a^x$ تبدیل کنیم. با استفاده از قانون توان‌ها، داریم:

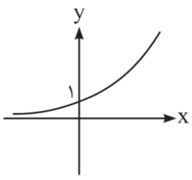
$$y = e^{-3x} = (e^{-3})^x = \Big(\frac{1}{e^3}\Big)^x \Rightarrow y = \Big(\underbrace{\frac{1}{e^3}}_{0<a<1}\Big)^x$$

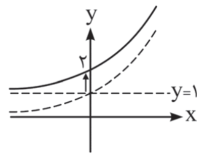


چون پایه‌ی تابع نمایی فوق، یعنی $a = \frac{1}{e^3}$، بین صفر و یک است، نمودار تابع نزولی خواهد بود.

روش دوم: در تابع $y = a^{mx+n}$ اگر $a^m > 1$ باشد، تابع صعودی بوده و اگر $0 < a^m < 1$ باشد، تابع نزولی می‌باشد. در تابع $y = e^{-3x}$ ابتدا مقدار $a^m = e^{-3}$ را محاسبه می‌کنیم. چون $a^m = \frac{1}{e^3}$ بین صفر و یک می‌باشد، پس تابع نزولی است. از طرفی تابع همواره بالای محور xها است، پس گزینه‌ی (۲) درست می‌باشد.

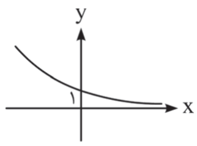
۷- (۲) برای رسم تابع $y = 5^x + 1$، ابتدا نمودار 5^x را رسم کرده و سپس ۱ واحد آن را رو به بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم، تا نمودار تابع $y = 5^x + 1$ به دست آید. دقت کنیم چون پایه‌ی عبارت نمایی 5^x، بزرگ‌تر از یک است، نمودار آن صعودی خواهد بود:

$f(x) = 5^x$


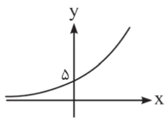
$\Rightarrow y = f(x) + 1 = 5^x + 1$


۸- (۴) با کمی دقت در ضابطه‌ی تابع $y = \dfrac{(\frac{1}{4})^x}{3^{-x}}$ به راحتی پی می‌بریم که ضابطه‌ی این تابع با استفاده از عملیات جبری به شکل $y = a^x$ در خواهد آمد. داریم:

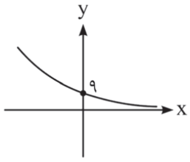
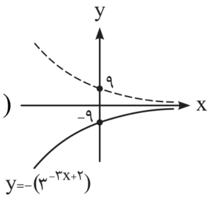
$$y = \frac{(\frac{1}{4})^x}{3^{-x}} = \Big(\frac{1}{4}\Big)^x \times 3^x = \Big(\overset{a}{\frac{3}{4}}\Big)^x \xrightarrow{0<a<1} \text{تابع نزولی است}$$



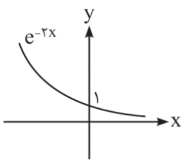
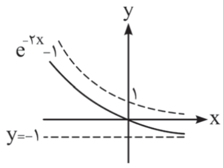
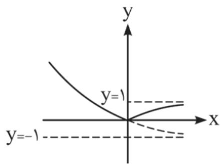
۹- (۱) نمودار تابع $y=5^{2x+1}$ به‌صورت $y=a^{mx+n}$ است. چون در تابع $a^m=5^2=25$ بزرگ‌تر از یک است، در نتیجه نمودار این تابع صعودی می‌باشد.



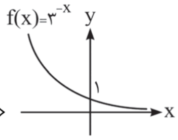
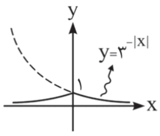
۱۰- (۳) برای رسم نمودار تابع $y=-(3^{-3x+2})$، ابتدا نمودار تابع $f(x)=3^{-3x+2}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نکاتی که برای رسم نمودار تابع $y=a^{mx+n}$ بیان کردیم، چون $a^m=3^{-3}=\frac{1}{27}<1$ است، در نتیجه نمودار تابع نمایی f نزولی می‌باشد. سپس کل نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)=-(3^{-3x+2})$ به دست آید. داریم:

$f(x)=3^{-3x+2}\xRightarrow{a^m<1}$  $\xRightarrow{\text{نسبت به محور x ها قرینه کنیم}}$ $y=-f(x)=-(3^{-3x+2})$ 

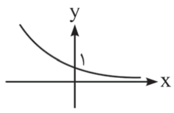
۱۱- (۳) برای رسم نمودار تابع $y=|e^{-2x}-1|$ ابتدا باید نمودار عبارت داخل قدرمطلق را رسم کنیم. برای این منظور باید نمودار e^{-2x} را رسم کرده و یک واحد رو به پایین انتقال دهیم. سپس آن قسمتی از نمودار را که زیر محور xها است، نسبت به محور xها قرینه نماییم. داریم:

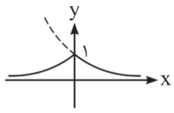
$\xRightarrow{\text{رسم } e^{-2x}}$  $\xRightarrow{\text{رسم } e^{-2x}-1}$  $\xRightarrow{\text{رسم } y=|e^{-2x}-1|}$ 

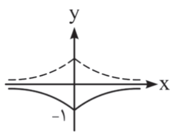
۱۲- (۲)

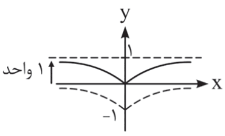
$\xRightarrow{\text{رسم } f(x)=3^{-x}}$  $\xRightarrow{\text{رسم } y=f(|x|)=3^{-|x|}}$ 

۱۳- (۳) برای رسم تابع $y=1-e^{-|x|}$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$\xLeftarrow{\text{گام ۱}}$ رسم $f(x)=e^{-x}=(\frac{1}{e})^x$ 

$\xLeftarrow{\text{گام ۲}}$ رسم $f(|x|)=e^{-|x|}=(\frac{1}{e})^{|x|}$ 

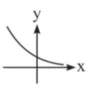
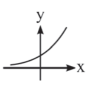
$\xLeftarrow{\text{گام ۳}}$ رسم $-f(|x|)=-e^{-|x|}$ 

$\xLeftarrow{\text{گام ۴}}$ رسم $y=1-f(|x|)=1-e^{-|x|}$ 

۱۴- (۳) به ازای $a=0$ و $a=1$ که اعدادی نامنفی هستند، داریم:

$f(x)=a^x$
- $\xrightarrow{a=1}$ $1^x=1 \Rightarrow$ تابع ثابت، غیریک‌به‌یک است $\Rightarrow$ وارون‌پذیر نیست
- $\xrightarrow{a=0}$ $0^x=0 \Rightarrow$ تابع ثابت، غیریک‌به‌یک است $\Rightarrow$ وارون‌پذیر نیست

بنابراین تابع f به ازای دو مقدار نامنفی برای a، وارون‌پذیر نیست. در غیر این‌صورت تابع نمایی، قطعاً وارون‌پذیر خواهد بود.

۱۵- (۴) چون $0<a<1$ است، نمودار y_1 به‌صورت  می‌باشد. هم‌چنین چون b و c بزرگ‌تر از یک هستند، بنابراین نمودار آن‌ها به‌صورت  می‌باشد. از آن‌جا که $b<c$ است، نمودار y_3 در قسمت مثبت محور xها بالاتر از نمودار y_2 قرار می‌گیرد و در قسمت منفی محور xها نمودار y_2 بالای y_3 قرار می‌گیرد.

۱۶- (۲)

نکته: در توابع نمایی $y=k(a^x)$ و $k\neq ۰$ همواره به ازای افزایش یا کاهش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی (متغیر مستقل x)، مقادیر خروجی (متغیر وابسته‌ی y) در عدد ثابت و مثبت غیر یک ضرب می‌شوند.

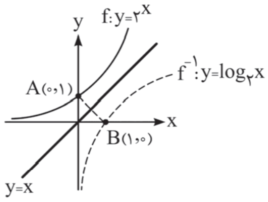
در گزینه‌ی (۲) به ازای افزایش ۲ واحد در مقادیر x، مقادیر y در عدد مثبت غیر یک $\frac{۱}{۸}$ ضرب می‌شوند. پس این گزینه بیان‌گر تغییرات یک تابع نمایی با ضابطه‌ی $y=k(a^x)$ است.

x	۱	۳	۵
y	۱۹۲-	۲۴-	۳-

x: ۲+ ، ۲+ — y: $\times\frac{۱}{۸}$ ، $\times\frac{۱}{۸}$

در گزینه‌ی (۱)، مقادیر y در عدد نامثبت (۴-) و در گزینه‌ی (۴)، مقادیر y در عدد ثابت ۱ ضرب شده‌اند. پس بیان‌گر تغییرات تابع نمایی $y=k(a^x)$ نیستند. گزینه‌ی (۳) بیان‌گر تغییرات تابع $y=x^۲$ است که یک تابع نمایی نیست.

۱۷- (۲) **روش اول:** برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محورy ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها، کافی است نمودار آن‌ها را تجسم کنیم. این فاصله برابر با طول AB است:



$$A(۰,۱),B(۱,۰)\Rightarrow AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$

روش دوم: بدون رسم نمودار تابع $y=۲^x$ و معکوسش نیز می‌توانیم فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع با محور x ها را مشخص نماییم. برای تعیین مختصات نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور y ها، کافی است در ضابطه‌ی تابع، به جای x صفر قرار دهیم. داریم:

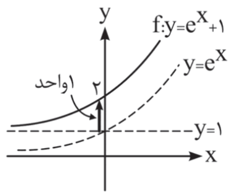
$$y=۲^x\xRightarrow{x=۰}y=۲^۰=۱\xrightarrow[\text{با محور y ها}]{\text{نقطه‌ی برخورد تابع نمایی}}A(۰,۱)\in f$$

حال اگر جای x و y نقطه‌ی A را عوض کنیم، به راحتی نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع با محور x ها مشخص می‌شود:

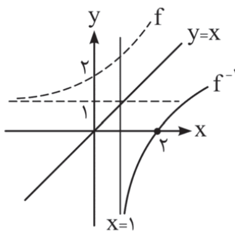
$$\xrightarrow[\text{با محور x ها}]{\text{نقطه‌ی برخورد معکوس تابع نمایی}}B(۱,۰)\in f^{-1}\Rightarrow AB=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$

۱۸- (۱)

$y=e^x+۱$ $\xleftarrow{\text{انتقال قائم}}$



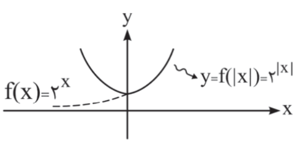
$$\xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{\text{نسبت به نیمساز نواحی ۱ و ۳}}$$ معکوس $y=e^x+۱$



۱۹- (۴) توابع نمایی با ضابطه‌ی $y=ka^{mx+n}$، همواره یک‌به‌یک و معکوس‌پذیرند. بنابراین توابع گزینه‌ی (۱)، گزینه‌ی (۲) و گزینه‌ی (۳) همگی یک‌به‌یک و معکوس‌پذیرند:

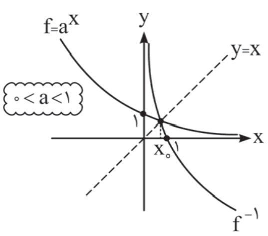
اما در گزینه‌ی (۴) به ازای مثلاً $x=۱$ و $x=-۱$، یک مقدار برای تابع حاصل می‌شود. پس تابع غیر یک‌به‌یک و معکوس‌ناپذیر است.

$$\begin{cases}x=۱\Rightarrow y(۱)=۲^{|۱|}=۲\\ x=-۱\Rightarrow y(-۱)=۲^{|-۱|}=۲\end{cases}\Rightarrow \text{غیر یک‌به‌یک و معکوس‌ناپذیر}$$



با توجه به رسم نمودار تابع گزینه‌ی (۴) نیز می‌توانیم به این موضوع پی ببریم. داریم:

۲۰- (۲) اگر تابع نمایی $y=a^x$ معکوسش را قطع کند، حتماً تابع نمایی نزولی بوده و پایه‌ی آن بین صفر و یک است، یعنی $۰<a<۱$. حال از روی نمودار تابع نمایی و تابع معکوسش پی می‌بریم که طول نقطه‌ی تلاقی، بین صفر و یک می‌باشد، یعنی $۰<x_۰<۱$.



۲۱- (۴) چون $f(x)=۴^{x}$ است. پس داریم:

$$f(x+۱)-f(x)=۴^{x+۱}-۴^{x}=۴\times ۴^{x}-۴^{x}=۴^{x}(۴-۱)=۳\times ۴^{x}=۳f(x)$$

۲۲- (۲) چون $f(x)=(\sqrt{۳})^{x}$ است. پس داریم:

$$f(x+۵)-f(x+۳)=A\,f(x+۱)\Rightarrow (\sqrt{۳})^{x+۵}-(\sqrt{۳})^{x+۳}=A(\sqrt{۳})^{x+۱}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(\sqrt{۳})^{x+۵}-(\sqrt{۳})^{x+۳}}{(\sqrt{۳})^{x+۱}}\Rightarrow A=\frac{\cancel{(\sqrt{۳})^{x+۱}}\left((\sqrt{۳})^{۴}-(\sqrt{۳})^{۲}\right)}{\cancel{(\sqrt{۳})^{x+۱}}}=۹-۳=۶$$

۲۳- (۴)

$$f(x)=\frac{۳^{x+۳}-۳^{x+۲}-۳^{x+۱}}{۹^{x}+۹^{x}+۹^{x}}=\frac{۳^{x+۱}(۳^{۲}-۳-۱)}{۳\times ۹^{x}}=\frac{۵\times ۳^{x+۱}}{۳\times \underset{\substack{\downarrow\\ ۳^{۲x}}}{(۳^{۲})^{x}}}=۵\times\frac{۳^{x+۱}}{۳^{۲x+۱}}=۵\times ۳^{(x+\cancel{۱})-(۲x+\cancel{۱})}=۵\times ۳^{-x}=\frac{۵}{۳^{x}}$$

۲۴- (۲) برای حل معادلهٔ $۲^{۵x+۱}=۸^{x^{۲}+۱}$، کافی است پایهٔ عبارت سمت راست را تجزیه کرده و به صورت عاملی از ۲ تبدیل کنیم. با انجام این کار، دو طرف تساوی، هم‌پایه خواهند شد.

داریم:

$$۲^{۵x+۱}=۸^{x^{۲}+۱}\Rightarrow ۲^{۵x+۱}=(۲^{۳})^{x^{۲}+۱}\Rightarrow ۲^{۵x+۱}=۲^{۳x^{۲}+۳}\Rightarrow ۳x^{۲}-۵x+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۱+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$$

البته می‌توانستیم مجموع ریشه‌ها را از $S=\frac{-b}{a}$ هم به دست آوریم. داریم: $\text{مجموع ریشه‌ها}=S=-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۳}$

۲۵- (۴) دو طرف تساوی را تجزیه کرده و به صورت عبارات نمایی با پایهٔ ۲ می‌نویسیم. با انجام این کار دو طرف تساوی، هم‌پایه می‌شوند. داریم:

$$\left(\frac{۱}{۸}\right)^{۳x}=۳۲^{x+۱}\Rightarrow (۲^{-۳})^{۳x}=(۲^{۵})^{x+۱}\Rightarrow ۲^{-۹x}=۲^{۵x+۵}\Rightarrow -۹x=۵x+۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۱۴}$$

۲۶- (۲)

$$\frac{۱}{۵^{۲x+۲}}=۲۵^{۳x}\Rightarrow ۵^{-(۲x+۲)}=(۵^{۲})^{۳x}\Rightarrow ۵^{-۲x-۲}=۵^{۶x}\Rightarrow -۲x-۲=۶x\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

۲۷- (۴) چون حاصل عبارت سمت راست تساوی به‌صورت ۲^{A} نوشته شده است، لذا صورت و مخرج کسر سمت چپ تساوی را تجزیه کرده و به‌صورت $۲^{\bigcirc}$ تبدیل می‌کنیم تا مقدار A مشخص شود. داریم:

$$\left(\frac{۴^{\sqrt{۳۲}}}{۲^{\sqrt{۸}}}\right)^{۲}=\left(\frac{(۲^{۲})^{۴\sqrt{۲}}}{۲^{۲\sqrt{۲}}}\right)^{۲}=\left(\frac{۲^{۸\sqrt{۲}}}{۲^{۲\sqrt{۲}}}\right)^{۲}=\left(۲^{۸\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}}\right)^{۲}=\left(۲^{۶\sqrt{۲}}\right)^{۲}=۲^{۱۲\sqrt{۲}}=۲^{A}\Rightarrow A=۱۲\sqrt{۲}$$

۲۸- (۳) برای حل معادله باید دو طرف تساوی را هم‌پایه می‌کنیم. برای این منظور یکی از عبارت‌های نمایی را به سمت دیگر تساوی انتقال می‌دهیم. داریم:

$$۳^{x-۲}-۹\times ۳^{۲x+۲}=۰\Rightarrow ۳^{x-۲}=۳^{۲}\times ۳^{۲x+۲}\Rightarrow ۳^{x-۲}=۳^{۲x+۴}\Rightarrow x-۲=۲x+۴\Rightarrow x=-۶$$

۲۹- (۲)

$$\left(\frac{۱}{۳^{x+۱}}\right)^{x+۳}=(۹^{۲})^{x(x+۱)}\Rightarrow (۳^{-(x+۱)})^{x+۳}=\left((۳^{۲})^{۲}\right)^{x(x+۱)}\Rightarrow ۳^{-(x+۱)(x+۳)}=۳^{۴x(x+۱)}$$

$$\Rightarrow ۳^{-x^{۲}-۴x-۳}=۳^{۴x^{۲}+۴x}\Rightarrow -x^{۲}-۴x-۳=۴x^{۲}+۴x\Rightarrow ۵x^{۲}+۸x+۳=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-۱\\ x=\frac{-۳}{۵}\end{cases}\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{۸}{۵}$$

البته می‌توانیم بدون محاسبهٔ ریشه‌ها، مجموع ریشه‌ها را از $S=\frac{-b}{a}$ هم به دست بیاوریم. داریم: $\text{مجموع ریشه‌ها}=S=\frac{-b}{a}=\frac{-۸}{۵}$

۳۰- (۱) برای حل معادلهٔ نمایی صورت تست، کافی است دو طرف تساوی، دو، عبارت نمایی هم‌پایه تشکیل دهیم. داریم:

$$۵^{x+|x-۲|}=۲۵=۵^{۲}\Rightarrow x+|x-۲|=۲\Rightarrow |\underbrace{x-۲}_{u}|=\underbrace{۲-x}_{-u}\xrightarrow{|u|=-u\Rightarrow u\leq ۰}x-۲\leq ۰\Rightarrow x\leq ۲$$

۳۱- (۱)

$$\frac{۲^x\times(\sqrt{۲})^{x-۱}}{۸}=\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x^۲}\Rightarrow\frac{۲^x\times\left(۲^{\frac{۱}{۲}}\right)^{x-۱}}{۲^۳}=(۲^{-۲})^{x^۲}\Rightarrow\frac{۲^x\times۲^{\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}}}{۲^۳}=۲^{-۲x^۲}\Rightarrow\frac{۲^{x+(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲})}}{۲^۳}=۲^{-۲x^۲}$$

$$\Rightarrow ۲^{(\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲})-۳}=۲^{-۲x^۲}\Rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲}x-\frac{۷}{۲}}\overset{=}{=}۲^{-۲x^۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}x-\frac{۷}{۲}=-۲x^۲\Rightarrow ۲x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۷}{۲}=۰$$

حال برای تعیین حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق، کافی است $P=\frac{c}{a}$ را محاسبه نماییم. داریم:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله}=P=\frac{c}{a}=\frac{-\frac{۷}{۲}}{۲}=-\frac{۷}{۴}$$

۳۲- (۳)

$$۴^{۱-x}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x+۱}=۷۲\Rightarrow(۲^۲)^{۱-x}+(۲^{-۱})^{۲x+۱}=۷۲\Rightarrow ۲^{-۲x+۲}+۲^{-۲x-۱}=۷۲\Rightarrow ۲^{-۲x-۱}(۲^۳+۱)=۷۲$$

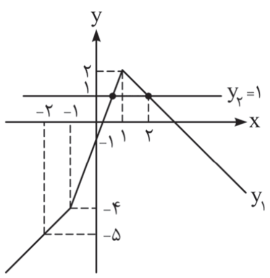
$$\Rightarrow ۲^{-۲x-۱}\times\cancel{۹}=۸\times\cancel{۹}\Rightarrow ۲^{-۲x-۱}\overset{=}{=}۲^۳\Rightarrow -۲x-۱=۳\Rightarrow -۲x=۴\Rightarrow x=-۲$$

۳۳- (۴)

$$\left(\frac{۱}{۹}\right)^{|x-۱|}=۳^{۱-|x+۱|}\Rightarrow(۳^{-۲})^{|x-۱|}=۳^{۱-|x+۱|}\Rightarrow ۳^{-۲|x-۱|}\overset{=}{=}۳^{۱-|x+۱|}\Rightarrow -۲|x-۱|=۱-|x+۱|\Rightarrow|x+۱|-۲|x-۱|=۱$$

برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی قدرمطلقی فوق، کافی است از روش رسم نمودار بهره بگیریم. برای این منظور دو طرف تساوی را رسم کرده و به تعداد نقاط برخورد آن‌ها، ریشه خواهیم داشت. داریم:

$$\underbrace{|x+۱|-۲|x-۱|}_{y_۱}=\underbrace{۱}_{y_۲}$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ در دو نقطه با طول‌های مثبت، یک‌دیگر را قطع می‌کنند. پس معادله، دارای دو ریشه‌ی مثبت است.

۳۴- (۴)

$$e^{|۴-x|}\times e^{|۲x-۱۹|}=e^{|۱۵-x|}\Rightarrow e^{|۴-x|+|۲x-۱۹|}\overset{=}{=}e^{|۱۵-x|}\Rightarrow|۴-x|+|۲x-۱۹|=|۱۵-x|$$

در مبحث قدرمطلق آموختیم که اگر $|a|+|b|=|a+b|$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $a.b\ge ۰$ است. با توجه به این توضیح، داریم:

$$|\underbrace{۴-x}_{a}|+|\underbrace{۲x-۱۹}_{b}|=|\underbrace{x-۱۵}_{a+b}|\xrightarrow{a.b\ge ۰}(۴-x)(۲x-۱۹)\ge ۰\Rightarrow ۴\le x\le\frac{۱۹}{۲}$$

در فاصله‌ی $۴\le x\le\frac{۱۹}{۲}$، شش عدد صحیح وجود دارد. پس معادله‌ی فوق، دارای ۶ ریشه‌ی صحیح است.

۳۵- (۱) برای حل معادله، نمی‌توانیم دو طرف تساوی را هم‌پایه کنیم. کافی است با تغییر متغیر $۳^x=t$، شکل معادله‌ی مفروض را به صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم درآوریم. ایده‌ی تغییر متغیر، یک سلیقه‌ی ذاتی و یک دید زیبا می‌خواهد ...

$$\underbrace{۹^x}_{(۳^۲)^x}+۳^x-۲=۰\Rightarrow(۳^x)^۲+۳^x-۲=۰\xrightarrow{۳^x=t}t^۲+t-۲=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}t=۳^x=۱\Rightarrow x=۰\\ t=۳^x=-۲\xrightarrow{\text{جواب ندارد}}x\in\varnothing\end{cases}$$

چون ۳^x همواره مثبت است، هرگز نمی‌تواند مقدار -۲ به خود بگیرد. در نتیجه معادله‌ی فوق، تنها یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

۳۶- (۳) از روش تغییر متغیر، استفاده می‌کنیم:

$$۴^x-۲^{x+۱}+۱=۰\Rightarrow(۲^x)^۲-۲\times۲^x+۱=۰\xrightarrow{۲^x=t}t^۲-۲t+۱=۰\Rightarrow(t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=۲^x=۱\Rightarrow x=۰$$

در نتیجه معادله‌ی $۴^x-۲^{x+۱}+۱=۰$، تنها دارای یک جواب حقیقی است.

۳۷- (۲) برای حل معادله‌ی نمایی صورت تست، به هیچ عنوان نمی‌توانیم دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم پایه بسازیم. از طرفی چون در معادله‌ی مذکور یک عبارت نمایی یکسان در همه‌ی جمله‌ها وجود ندارد، نمی‌توانیم از تغییر متغیر نیز استفاده کنیم. برای حل این معادله باید ابتکار عمل داشته و طرفین را بر 4^x تقسیم کنیم تا عبارت‌های نمایی با پایه‌های یکسان در معادله ایجاد شود. داریم:

$$9^x+6^x=2\times 4^x \xRightarrow{\div 4^x} \frac{9^x}{4^x}+\frac{6^x}{4^x}=2\Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x+\left(\frac{6}{4}\right)^x=2\Rightarrow \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0$$

حال با تغییر متغیر $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t$ شکل معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=t\Rightarrow t^2+t-2=0 \xRightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t=\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\Rightarrow x=0 \\ t=\left(\frac{3}{2}\right)^x=-2 \xRightarrow{\text{جواب ندارد}} x\in\varnothing \end{cases}$$

۳۸- (۴)

$$\begin{cases} y_1=2^x \\ y_2=(\sqrt{2})^{x+1}+4 \end{cases} \xRightarrow[y_1=y_2]{\text{قطع می‌دهیم}} 2^x=(\sqrt{2})^{x+1}+4\Rightarrow 2^x-\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^x-4=0$$

$$\xRightarrow{(\sqrt{2})^x=t} t^2-\sqrt{2}t-4=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}\pm\cancel{\sqrt{18}}^{\,3\sqrt{2}}}{2}$$

$$t_1=(\sqrt{2})^x=2\sqrt{2}\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=3$$

$$t_2=(\sqrt{2})^x=-\sqrt{2}\ \text{(غ‌ق‌ق)}$$

حال با معلوم بودن طول نقطه‌ی تقاطع دو منحنی، عرض نقطه‌ی تقاطع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$x=3 \xRightarrow{\text{صدق در تابع } y=2^x} y=2^3=8 \xRightarrow{\text{نقطه‌ی تقاطع}} B(3,8)$$

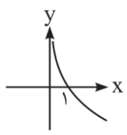
$$A(0,4),B(3,8)\Rightarrow AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

۳۹- (۲) تابع $y=\log_a x$ به ازای $0<a<1$ و $a>1$ به ترتیب نزولی و صعودی است. بنابراین جواب درست گزینه‌ی (۲) است.

۴۰- (۲) برای این‌که تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ نزولی باشد، باید مبنای لگاریتم را بین صفر و یک قرار دهیم. داریم:

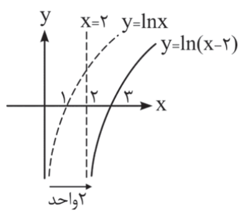
$$y=\log_{\underbrace{(1-m^2)}_{a}} x \xRightarrow[0<a<1]{\text{تابع لگاریتمی نزولی است}} 0<1-m^2<1 \xRightarrow{-1} -1<-m^2<0 \xRightarrow{\times(-1)} 0<m^2<1 \xRightarrow{\sqrt{\ }} 0<|m|<1$$

۴۱- (۴) چون در تابع لگاریتمی $y=\log_{\frac{1}{3}} x$، مبنا عددی بین صفر و یک است $\left(a=\frac{1}{3}\right)$، در نتیجه تابع لگاریتمی نزولی بوده و نمودار آن به‌صورت شکل مقابل است.



۴۲- (۱) ضابطه‌ی تابع $y=\ln(x-2)$ بسیار شبیه به ضابطه‌ی تابع $f(x)=\ln x$ است. با این تفاوت که باید به‌جای x، $x-2$ را جایگزین کنیم، یعنی $y=f(x-2)=\ln(x-2)$. پس کافی است نمودار f را رسم کرده و ۲ واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم. داریم:

$$f(x)=\ln x \xrightarrow[\text{انتقال افقی}]{x\to x-2} y=f(x-2)=\ln(x-2)$$

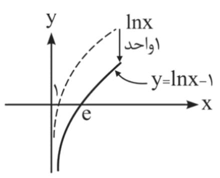


۴۳- (۳) برای رسم نمودار تابع $y=\ln x-1$ کافی است، نمودار $\ln x$ را یک واحد در راستای قائم روبه پایین انتقال دهیم. داریم:

برای محاسبه‌ی طول از مبدأ تابع $y=\ln x-1$ کافی است به جای y مقدار $y=0$ را جایگزین کنیم.

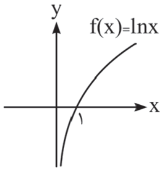
کمی بعد با حل معادله‌ی لگاریتمی $\ln x=1$، آشنا می‌شویم. ولی از این به بعد به خاطر بسپاریم که:

$$\boxed{\log_a \bigcirc=1\Rightarrow \bigcirc=a^1} \rightsquigarrow y=\ln x-1 \xRightarrow{y=0} 0=\ln x-1\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e^1=e$$

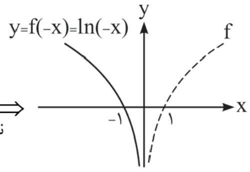


(۲) -۴۴

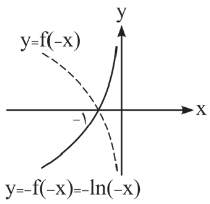
رسم تابع $f(x)=\ln(x)$ $\Longrightarrow$



رسم نمودار تابع $f(-x)=\ln(-x)$ $\Longrightarrow$ نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم

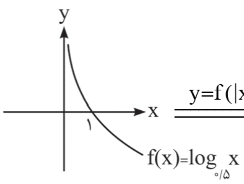


$y=-f(-x)=-\ln(-x)$ $\Longrightarrow$

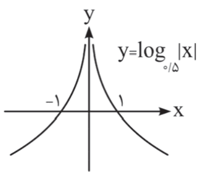


(۱) -۴۵ ضابطه‌ی تابع $y=\log_{0/5}|x|$ بسیار شبیه به ضابطه‌ی تابع $f(x)=\log_{0/5}x$ است. با این تفاوت که باید بـه جـای x، $|x|$ را جـایگزین کنیم، یعنی $y=f(|x|)=\log_{0/5}|x|$. پس کافی است نمودار f را رسم کرده و آن قسمتی از نمودار f که در سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن، قرینه‌ی سمت راست منحنی نسبت به محور yها را رسم نماییم. دقت کنیم در تابع f، چون مبنای لگاریتم بین صفر و یک است، نمودار آن نزولی می‌باشد. داریم:

رسم نمودار تابع $f(x)=\log_{0/5}x$ $\Longrightarrow$

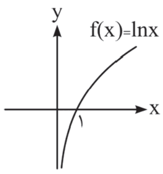


رسم نمودار تابع $y=f(|x|)=\log_{0/5}|x|$ $\Longrightarrow$

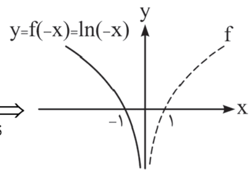


(۲) -۴۶

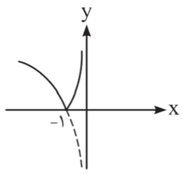
رسم تابع $f(x)=\ln(x)$ $\Longrightarrow$



رسم نمودار تابع $f(-x)=\ln(-x)$ $\Longrightarrow$ نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم

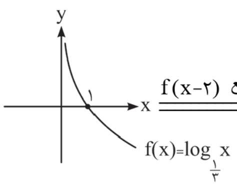


$y=|f(-x)|=|\ln(-x)|$ $\Longrightarrow$

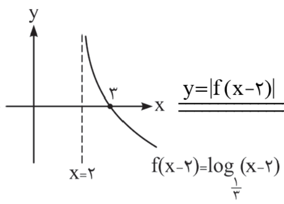


(۲) -۴۷

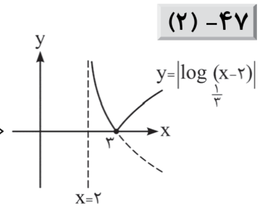
رسم نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$ $\Longrightarrow$



رسم نمودار تابع $f(x-2)$ $\Longrightarrow$



رسم نمودار تابع $y=|f(x-2)|$ $\Longrightarrow$



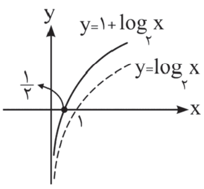
(۱) -۴۸ ابتدا با توجه به قواعد لگاریتم، ضابطه‌ی تابع را کمی تغییر می‌دهیم. داریم:

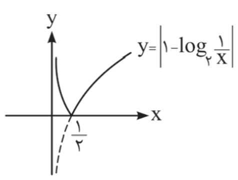
$$y=\left|1-\log_2\frac{1}{x}\right|=|1-\log_2 x^{-1}|=|1-(-\log_2 x)|=|1+\log_2 x|$$

حال شروع به رسم تابع می‌کنیم. برای این منظور ابتدا باید تابع داخل قدرمطلق را رسم کنیم:

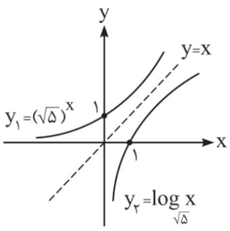
$$1+\log_2 x=0\Rightarrow \log_2 x=-1\Rightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

حال آن قسمت‌هایی از نمودار رسم‌شده که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=\left|1-\log_2\frac{1}{x}\right|$ به‌دست آید. داریم:





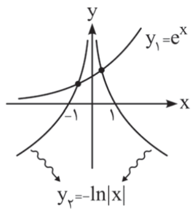
۴۹- (۱) برای بررسی تعداد ریشه‌های معادله‌ی $\log_{\sqrt{5}} x = (\sqrt{5})^x$، کافی است توابع دو طرف تساوی را رسم کرده و نقاط برخورد آن‌ها را به عنوان ریشه‌های معادله، معرفی نماییم. توابع $y_1 = (\sqrt{5})^x$ و $y_2 = \log_{\sqrt{5}} x$ معکوس یک‌دیگرند. چون پایه‌ی عبارت نمایی در تابع y_1 بزرگ‌تر از یک است، لذا تابع نمایی صعودی بوده و معکوس خود، یعنی تابع y_2 را هرگز قطع نمی‌کند. بنابراین معادله‌ی فوق، هیچ ریشه‌ای ندارد. به شکل مقابل دقت کنید:



$$\underbrace{\log_{\sqrt{5}} x}_{y_2} = \underbrace{(\sqrt{5})^x}_{y_1} \xrightarrow{y_1 \neq y_2} x \in \varnothing$$

۵۰- (۳)

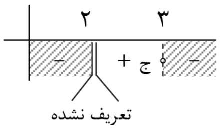
$$e^x + \ln|x| = 0 \Rightarrow \underbrace{e^x}_{y_1} = \underbrace{-\ln|x|}_{y_2} \Rightarrow$$



$\xrightarrow{\text{در دو نقطه متقاطع‌اند}}$ معادله دارای ۲ ریشه است

۵۱- (۱) چون تابع $\ln$، همان تابع $\log_e$ است و e عددی بزرگ‌تر از صفر و مخالف ۱ می‌باشد، پس فقط و فقط باید عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم. برای این منظور از جدول تعیین علامت $\frac{x-3}{2-x}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$y = \ln\frac{x-3}{2-x} \Rightarrow \frac{x-3}{2-x} > 0$$



$$\Rightarrow 2 < x < 3 \Rightarrow D_f = (2,3)$$

۵۲- (۴) برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \log_x (x^2 + 9)$، چون عبارت جلوی لگاریتم، یعنی $x^2 + 9$، همواره بزرگ‌تر از صفر است، تنها کافی است مبنای لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار داده و مقادیری از x که مبنا را برابر با ۱ می‌کنند، از مجموعه‌ی جواب کنار بگذاریم:

$$D_f = \{x \mid x > 0, x \neq 1\}$$

۵۳- (۲) برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\log(x-1)}{\log(4-x^2)}$، ابتدا دامنه‌ی تعریف صورت و مخرج را مشخص می‌کنیم و بین مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ \log(4-x^2) \Rightarrow 4-x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < 2$$

حال کافی است به این نکته توجه کنیم که برای تعیین دامنه‌ی توابع کسری، باید مخرج را مخالف صفر در نظر بگیریم. منظور از این جمله این است که مقادیری از x که مخرج، یعنی $\log(4-x^2)$ را صفر می‌کنند، از مجموعه‌ی جواب به دست آمده کنار بگذاریم. اگر به نمودار تابع لگاریتمی توجه کنیم، زمانی که جلوی لگاریتم برابر یک است، مقدار لگاریتم صفر می‌شود. به عبارت دیگر لگاریتم عدد یک، در هر مبنایی صفر است. پس داریم:

$$\log(4-x^2) = 0 \Rightarrow 4-x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

حال $x = \pm\sqrt{3}$ (ریشه‌های مخرج) را از مجموعه‌ی جواب $1 < x < 2$ کنار می‌گذاریم تا دامنه‌ی تابع فوق به دست آید:

$$D_f = \{x \mid 1 < x < 2, x \neq \sqrt{3}\}$$

۵۴- (۲) ابتدا دامنه‌ی تعریف لگاریتم را مشخص کرده و سپس عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (1) \\ \ln(x-1) \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2,+\infty)$$

تذکر: با توجه به نمودار تابع لگاریتمی که مبنای آن بزرگ‌تر از یک است، زمانی حاصل لگاریتم بزرگ‌تر یا مساوی صفر است که عبارت جلوی لگاریتم، بزرگ‌تر یا مساوی یک باشد.

۵۵- (۳)

$$\log_y x = z \Rightarrow x = y^z \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } \frac{1}{z} \text{ می‌رسانیم}} x^{\frac{1}{z}} = (y^z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{z}}$$

۵۶- (۴) لگاریتم عدد ۲۷ در مبنای مجهولی مانند a، برابر ۳- است. با توجه به مفهومِ حاصلِ لگاریتم، داریم:

$$\log_{a=?}۲۷=-۳\Rightarrow ۲۷=a^{-۳}\xrightarrow{\text{به توان } -\frac{۱}{۳} \text{ می‌رسانیم}}(۲۷)^{-\frac{۱}{۳}}=(a^{-۳})^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow a=۲۷^{-\frac{۱}{۳}}=(۳^۳)^{-\frac{۱}{۳}}=۳^{-۱}\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

۵۷- (۴)

$$\left.\begin{array}{l}\log_{۵۰}A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow A=۵۰^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times ۲}=۵\sqrt{۲}\\ \log_{۳۲}B=\frac{۱}{۲}\Rightarrow B=۳۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳۲}=\sqrt{۱۶\times ۲}=۴\sqrt{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{A+B}{A-B}=\frac{۵\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}}=\frac{۹\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۹$$

۵۸- (۳) با توجه به حاصل لگاریتم، داریم:

$$\log_۲ ۱۲=\alpha\Rightarrow ۱۲=۲^\alpha$$

$$۴^{\alpha-۲}=(۲^۲)^{\alpha-۲}=۲^{۲\alpha-۴}=\frac{۲^{۲\alpha}}{۲^۴}=\frac{(۲^\alpha)^۲}{۱۶}\xlongequal{۲^\alpha=۱۲}\frac{۱۲^۲}{۴^۲}=\left(\frac{۱۲}{۴}\right)^۲=۳^۲=۹$$

۵۹- (۳) اگر به عدد ۳۰۱، x واحد اضافه کنیم، لگاریتم آن در مبنای ۸، برابر ۳ می‌شود. در نتیجه می‌نویسیم:

$$\log_۸(۳۰۱+x)=۳\Rightarrow ۳۰۱+x=۸^۳=۵۱۲\Rightarrow x=۵۱۲-۳۰۱=۲۱۱$$

۶۰- (۲)

$$f(x)=\log_۲(x+۴)\Rightarrow\begin{cases}f(۴)=\log_۲(\overbrace{۴+۴}^{۸})=\log_۲ ۲^۳=۳\log_۲ ۲=۳\\ f(-۳)=\log_۲(\overbrace{-۳+۴}^{۱})\xlongequal{\log_a ۱=۰}۰\end{cases}\Rightarrow f(۴)+f(-۳)=۳+۰=۳$$

۶۱- (۱)

$$\log_y\sqrt{x}=\log_y x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log_y x\xlongequal{\log_y x=۳}\frac{۱}{۲}\times ۳=\frac{۳}{۲}$$

۶۲- (۲) برای تعیین حاصل $\log_۵(\sqrt{۱۲۵})^۳$، عبارت جلوی لگاریتم را به صورت عامل توانی با پایه‌ی ۵ می‌نویسیم. داریم:

$$\log_۵(\sqrt{۱۲۵})^۳=\log_۵(\sqrt{۵^۳})^۳=\log_۵(۵^{\frac{۳}{۲}})^۳=\log_۵ ۵^{\frac{۹}{۲}}=\frac{۹}{۲}\times\overset{۱}{\log_۵ ۵}=\frac{۹}{۲}\times ۱=۴/۵$$

۶۳- (۴) عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را به صورت عوامل توانی با پایه‌ی ۲ می‌نویسیم. داریم:

$$\log_{\frac{۱}{۴}}۸\sqrt[۳]{۲}=\log_{۲^{-۲}}(۲^۳\times ۲^{\frac{۱}{۳}})=\log_{۲^{-۲}}۲^{۳+\frac{۱}{۳}}=\log_{۲^{(-۲)}}۲^{(\frac{۱۰}{۳})}=\frac{\frac{۱۰}{۳}}{-۲}\overset{۱}{\log_۲ ۲}=-\frac{۱۰}{۶}=-\frac{۵}{۳}$$

۶۴- (۲)

$$\left|\log_{\frac{۱}{۲}}۸\right|+\log_۸\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\left|\log_{۲^{(-۱)}}۲^{(۳)}\right|+\log_{۲^{(۳)}}۲^{(-\frac{۱}{۲})}=\left|\frac{۳}{-۱}\overset{۱}{\log_۲ ۲}\right|+\frac{-\frac{۱}{۲}}{۳}\overset{۱}{\log_۲ ۲}=|-۳|-\frac{۱}{۶}=۳-\frac{۱}{۶}=\frac{۱۷}{۶}$$

۶۵- (۴) با کمی دقت متوجه می‌شویم که $(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)=(\sqrt{۲})^۲-۱^۲=۱$ است. در نتیجه اعداد $\sqrt{۲}-۱$ و $\sqrt{۲}+۱$ معکوس یکدیگرند. داریم:

$$(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)=۱\Rightarrow\sqrt{۲}-۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}$$

$$\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}-۱)=\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}+۱)^{-۱}=-\log_{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۲}+۱)=-۱$$

۶۶- (۴) با استفاده از عملیات جبری، عبارت جلوی لگاریتم و مبنای لگاریتم را به صورت عوامل توانی با پایه‌ی یکسانِ x می‌نویسیم:

$$\log_{x\sqrt{x}} x\sqrt[3]{x} = \log_{x.x^{\frac{1}{2}}} x.x^{\frac{1}{3}} = \log_{x^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{4}{3}} = \log_{x^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} \overset{1}{\log_x x} = \frac{8}{9}$$

۶۷- (۳)

$$\log_{x\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} = \log_{x.x^{\frac{1}{3}}} \left(x^2.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \log_{x^{\frac{4}{3}}} x^{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{3}} \underbrace{\log_x x}_{1} = \frac{5\times 3}{4\times 6} = \frac{5}{8}$$

۶۸- (۲)

$$x = y^3 = \sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ y^3 = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم } \frac{2}{3}]{\text{طرفین تساوی را به توان}} (y^3)^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y^2 = a^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_a x + \log_a y^2 \xrightarrow{x=a^{\frac{1}{2}},\, y^2=a^{\frac{1}{3}}} \log_a a^{\frac{1}{2}} + \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\underbrace{\log_a a}_{1} + \frac{1}{3}\underbrace{\log_a a}_{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۶۹- (۴)

$$A = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3\times\frac{5}{3}} = 2^5 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 4A^2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2(2^5)^2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} \overbrace{(2^2\times 2^{10})}^{2^{2+10}} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{12} = \frac{12}{\frac{1}{2}} \underbrace{\log_2 2}_{1} = 24$$

۷۰- (۴)

$$9\sqrt{3} = 3^a \Rightarrow 3^a = 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_{2/5} a^2 = \log_{\frac{5}{2}} a^2 = 2\log_{\frac{5}{2}} a \xrightarrow{a=\frac{5}{2}} 2\underbrace{\log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2}}_{1} = 2\times 1 = 2$$

۷۱- (۱)

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2\times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow \log_4(4a+1) \xrightarrow{a=\frac{3}{4}} \log_4\left(4\left(\frac{3}{4}\right)+1\right) = \log_4 4 = 1$$

۷۲- (۳) به صورت سؤال خوب نگاه کنیم. چون $x = y^3 = \sqrt{a}$ است، بنابراین مقادیر x و y به ترتیب برابر با $\sqrt{a}$ و $\sqrt[6]{a}$ است. با قرار دادن مقـادیر x و y در عبارت $\log_a x + \log_{a^2} y$، به راحتی جواب به دست می‌آید. داریم:

$$\log_a x + \log_{a^2} y = \log_a \overset{a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} + \log_{a^2} \overset{a^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{1}{2}\overset{1}{\cancel{\log_a a}} + \frac{\frac{1}{6}}{2}\overset{1}{\cancel{\log_a a}} \xrightarrow{\log_a a = 1} \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

۷۳- (۱)

> **یادآوری:**
>
> $\log_{a^n} x = \log_a x^{\frac{1}{n}}$ و $\log_a x^n = \log_{a^{\frac{1}{n}}} x$

حال طبق یادآوری بالا، حاصل عبارت $\log_{\frac{1}{b}} a$ برابر است با:

$$\log_{\frac{1}{b}} a = \log_{b^{\overset{\text{معکوس}}{-1}}} a = \log_b a^{-1} = \log_b \frac{1}{a}$$

۷۴- (۳) دامنه‌ی هر دو تابع f و g برابر با $x > 0$ است. به‌علاوه وقتی براساس قواعد لگاریتم، ضابطه‌ی توابع f و g را ساده کنیم، داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x \\ g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

چون ضابطه و دامنه‌ی دو تابع f و g یکسان هستند، در نتیجه نمودار این دو تابع، منطبق برهم می‌باشند.

۷۵- (۳) برای تعیین حاصل $\log_{(۱+\sqrt{۲})}(۳+۲\sqrt{۲})^۳$، باید عبارت جلوی لگاریتم را براساس مبنای آن بنویسیم. داریم:

$$(۱+\sqrt{۲})^۲=۱+(\sqrt{۲})^۲+۲\sqrt{۲}=۱+۲+۲\sqrt{۲}=۳+۲\sqrt{۲} \Rightarrow (۱+\sqrt{۲})^۲=۳+۲\sqrt{۲} \quad (*)$$

$$\log_{(۱+\sqrt{۲})}(۳+۲\sqrt{۲})^۳ \overset{(*)}{=} \log_{(۱+\sqrt{۲})}\left((۱+\sqrt{۲})^۲\right)^۳=\log_{(۱+\sqrt{۲})}(۱+\sqrt{۲})^۶=۶\log_{(۱+\sqrt{۲})}(۱+\sqrt{۲})=۶$$

۷۶- (۳)

$$x=۸\log_۴ ۲\sqrt{۲}=۸\log_{۲^۲}۲^{\frac{۳}{۲}}=۸\left(\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}\right)=۸\times\frac{۳}{۴}=۶\Rightarrow x=۶$$

$$\Rightarrow \log_x ۴(x+۳)\overset{x=۶}{=}\log_۶ ۴\overbrace{(۶+۳)}^{۹}=\log_۶ ۳۶=\log_۶ ۶^۲=۲\underbrace{\log_۶ ۶}_{۱}=۲$$

۷۷- (۱) می‌دانیم $\log_۵ ۳=a$ است. حال برای محاسبه‌ی حاصل $\log_{۲۵}\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، کافی است عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را تجزیه کرده تا بتوانیم از فرض صورت تست استفاده کنیم. داریم:

$$\log_{۲۵}\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\log_{۵^۲}۳^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲}\log_۵ ۳=-\frac{۱}{۴}\overset{a}{\log_۵ ۳}=-\frac{a}{۴}$$

۷۸- (۳) برای محاسبه‌ی $\log_۳ ۱۵$، باید شکل فرض سؤال، یعنی $\log_۳ ۵=a$ را ایجاد کنیم. برای این منظور عدد جلوی لگاریتم را تجزیه کرده و داریم:

$$\log_۳ ۱۵=\log_۳(۵\times۳)\overset{\log_a(AB)=\log_a A+\log_a B}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\log_۳ ۵+\log_۳ ۳=a+۱$$

۷۹- (۴) ابتدا فرض صورت تست را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\log_y x.\log_{y^۳\sqrt{y}} y^۲=۴\Rightarrow \log_y x.\log_{y^{۳+\frac{۱}{۲}}}y^۲=۴\Rightarrow\log_y x\times\frac{۲}{\frac{۷}{۲}}\underbrace{\log_y y}_{۱}=۴\Rightarrow \log_y x\times\frac{۴}{۷}=۴\Rightarrow\log_y x=۷$$

حال با داشتن مقدار $\log_y x=۷$، مقدار $\log_{y^۲}\sqrt{x}$ برابر است با:

$$\log_{y^۲}\sqrt{x}=\log_{y^۲}x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}\log_y x=\frac{۱}{۴}\log_y x=\frac{۱}{۴}(۷)=\frac{۷}{۴}$$

۸۰- (۲)

$$f(x)=\log_۶(x-۳)\Rightarrow f(۱۲)+f(۷)=\log_۶\overbrace{(۱۲-۳)}^{۹}+\log_۶\overbrace{(۷-۳)}^{۴}=\log_۶(۹\times۴)=\log_۶ ۳۶=\log_۶ ۶^۲=۲$$

۸۱- (۱)

نکته: $\log_a A+\log_a B+...+\log_a K=\log_a(A\times B\times...\times K)$

با توجه به نکته‌ی فوق، برای محاسبه‌ی حاصل عبارت $\log ۵+\log ۲۰۰+\log ۵۰۰+\log ۲۰۰۰$، چون لگاریتم‌ها هم مبنا هستند، می‌توانیم اعداد جلوی لگاریتم‌ها را در هم ضرب کرده و مجموع لگاریتم‌ها را تبدیل به یک لگاریتم کنیم. داریم:

$$\log_{۱۰}۵+\log_{۱۰}۲۰۰+\log_{۱۰}۵۰۰+\log_{۱۰}۲۰۰۰=\log_{۱۰}(\underbrace{۵\times۲۰۰}_{۱۰۰۰}\times\underbrace{۵۰۰\times۲۰۰۰}_{۱۰۰۰۰۰۰})=\log_{۱۰}۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰=\log_{۱۰}۱۰^۹=۹\log_{۱۰}۱۰=۹$$

۸۲- (۲)

$$\log_۲\frac{۸}{۹}+\log_۲\frac{۹}{۱۰}+\log_۲\frac{۱۰}{۱۱}+\cdots+\log_۲\frac{۳۱}{۳۲}=\log_۲\left(\frac{۸}{\cancel{۹}}\times\frac{\cancel{۹}}{\cancel{۱۰}}\times\frac{\cancel{۱۰}}{\cancel{۱۱}}\times\cdots\times\frac{\cancel{۳۱}}{۳۲}\right)=\log_۲\frac{۸}{۳۲}=\log_۲\frac{۱}{۴}$$

$$=\log_۲ ۲^{-۲}=-۲\overset{۱}{\cancel{\log_۲ ۲}}=-۲$$

۸۳- (۲)

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})=\log(۶^۲-(۲\sqrt{۵})^۲)=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=\log ۲^۴=۴\log ۲\overset{\log ۲=k}{=}۴k$$

۸۴- (۴) می‌دانیم $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ و $\log ۳ = ۰/۴۷۷$. حال برای محاسبه‌ی $\log ۶۰۰۰$، کافی است عبارت جلوی لگاریتم را تجزیه کرده و به صورت عواملی از ۲، ۳ و ۱۰ (یعنی مبنا) بنویسیم. داریم:

$$\log ۶۰۰۰ = \log(۲\times ۳\times ۱۰^{۳}) = \log ۲+\log ۳+\log ۱۰^{۳} = ۰/۳۰۱+۰/۴۷۷+۳ = ۳/۷۷۸$$

۸۵- (۳)

$$\log ۰/۰۳ = \log \frac{۳}{۱۰۰} = \log ۳ - \log ۱۰۰ = \log ۳ - ۲$$

$$\log ۳۰ = \log(۳\times ۱۰) = \log ۳ + \log ۱۰ = \log ۳ + ۱$$

$$+\quad \log ۳۰۰ = \log(۳\times ۱۰۰) = \log ۳ + \log ۱۰۰ = \log ۳ + ۲$$

$$\xRightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \log ۰/۰۳ + \log ۳۰ + \log ۳۰۰ = (\log ۳ - ۲) + (\log ۳ + ۱) + (\log ۳ + ۲) = ۳\log ۳ + ۱ = ۳(۰/۴۷۷) + ۱ = ۲/۴۳۱$$

۸۶- (۴)

$$\log_{۱۰} ۰/۳۶ - \log_{۱۰}\frac{۹}{۴} = \log_{۱۰}\frac{۳۶}{۱۰۰} - \log_{۱۰}\frac{۹}{۴} = \log_{۱۰}\frac{\frac{۳۶}{۱۰۰}}{\frac{۹}{۴}} = \log_{۱۰}\left(\frac{۴\times \cancel{۳۶}^{\,۴}}{\cancel{۹}\times ۱۰۰}\right) = \log_{۱۰}\frac{۱۶}{۱۰۰} = \log_{۱۰}۱۶ - \log_{۱۰}۱۰۰$$

$$= \log_{۱۰}۲^{۴} - \log_{۱۰}۱۰^{۲} = ۴\log_{۱۰}۲ - ۲\underbrace{\log_{۱۰}۱۰}_{۱} \xRightarrow{\log_{۱۰}۲ = a} ۴a - ۲$$

۸۷- (۲) می‌دانیم $\log ۲ + \log ۳ = a$، $\log ۳ + \log ۷ = b$ و $\log ۲ + \log ۷ = c$. برای محاسبه‌ی مقدار $\log ۴۲$، کافی است به این نکته توجه کنیم که $۴۲ = ۲\times ۳\times ۷$ است. پس می‌توانیم به جای محاسبه‌ی $\log ۴۲$، مجموع $\log ۲ + \log ۳ + \log ۷$ را به دست آوریم. حال برای محاسبه‌ی مجموع $\log ۲ + \log ۳ + \log ۷$ (یعنی $\log ۴۲$)، سه معادله را با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases}\log ۲ + \log ۳ = a\\ \log ۳ + \log ۷ = b\\ \log ۲ + \log ۷ = c\end{cases} \xRightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۲(\log ۲ + \log ۳ + \log ۷) = a + b + c \Rightarrow \log ۲ + \log ۳ + \log ۷ = \frac{a+b+c}{۲}$$

پس:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ ۲\times۳\times۷}}{\log ۴۲} = \log ۲ + \log ۳ + \log ۷ = \frac{a+b+c}{۲}$$

۸۸- (۴) ابتدا شکل $\log ۲۵$ را تغییر می‌دهیم:

$$\log ۲۵ = \log ۵^{۲} = ۲\log ۵$$

بنابراین باید با داشتن مقدار $\log ۲ = a$، مقدار $\log ۵$ را مشخص کنیم تا جواب $\log ۲۵$ به دست آید.

> **نکته‌ی مهم:** $\boxed{\log ۵ = ۱ - \log ۲}$ و $\boxed{\log ۲ = ۱ - \log ۵}$

با توجه به نکته‌ی مهم بالا، داریم:

$$\log ۲۵ = ۲\log ۵ = ۲(۱ - \log ۲) = ۲(۱ - a) = ۲ - ۲a$$

۸۹- (۱)

$$\log ۱/۲۵ = \log\frac{۱۲۵}{۱۰۰} = \log ۱۲۵ - \log ۱۰۰ = \log ۵^{۳} - \log ۱۰^{۲} = ۳\log ۵ - ۲\underbrace{\log ۱۰}_{۱}$$

$$\xRightarrow{\log ۵ = ۱ - \log ۲} ۳(۱ - \log ۲) - ۲(۱) \xRightarrow{\log ۲ = a} ۳(۱ - a) - ۲ = ۳ - ۳a - ۲ = ۱ - ۳a$$

۹۰- (۳)

$$\log ۶ = a \Rightarrow \log(۲\times ۳) = a \Rightarrow \log ۲ + \log ۳ = a \xRightarrow{\log ۳ = b} \log ۲ + b = a \Rightarrow \log ۲ = a - b$$

$$\log ۲۵ = \log ۵^{۲} = ۲\log ۵ = ۲(۱ - \log ۲) \xRightarrow{\log ۲ = a - b} ۲(۱ - (a - b)) = ۲(۱ - a + b)$$

۹۱- (۱)

$$\log\sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۵}} = \log\left(\frac{۱۶}{۵}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log\frac{۱۶}{۵} = \frac{۱}{۳}(\log ۱۶ - \log ۵) = \frac{۱}{۳}(\log ۲^{۴} - (۱ - \log ۲))$$

$$= \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱ + \log ۲) = \frac{۱}{۳}(۵\log ۲ - ۱) \xRightarrow{\log ۲ = ۰/۳۰۱} \frac{۱}{۳}(۵(۰/۳۰۱) - ۱) = \frac{۱}{۳}(۱/۵۰۵ - ۱) = \frac{۱}{۳}(۰/۵۰۵) \simeq ۰/۱۶۸$$

۹۲- (۱)

$$\log\sqrt[3]{1/6}=\log\left(\frac{16}{10}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(\log 16-\log 10)=\frac{1}{3}(\log 2^4-1)=\frac{1}{3}(4\log 2-1)$$

$$\xrightarrow{\log 2=1-\log 5}\frac{1}{3}(4(1-\log 5)-1)\xrightarrow{\log 5=3k}\frac{1}{3}(4(1-3k)-1)=\frac{1}{3}(\underbrace{4-12k-1}_{3-12K})=\frac{1}{3}(3-12k)=1-4k$$

۹۳- (۱)

$$\log_{15}625=\log_{15}5^{4}=4\log_{15}5=4\log_{15}\left(\overset{5}{\frac{15}{3}}\right)=4(\log_{15}15-\log_{15}3)=4(1-a)$$

تذکر: اگر بخواهیم مقدار $\log_a c$ را با معلوم بودن مقدار $\log_a b$ به‌دست آوریم، باید عدد جلوی لگاریتم، یعنی c را با عوامل a و b بسازیم. در این تست برای تعیین مقدار $\log_{15}5$ با معلوم بودن مقدار $\log_{15}3=a$ باید عدد ۵ را با عوامل ۳ و ۱۵ بسازیم. برای این منظور می‌نویسیم $5=\frac{15}{3}$ و ...

۹۴- (۴)

$$\log_{20}4=k\Rightarrow\log_4 20=\frac{1}{k}\Rightarrow\log_4(4\times5)=\frac{1}{k}\Rightarrow\underbrace{\log_4 4}_{1}+\log_4 5=\frac{1}{k}\Rightarrow 1+\log_4 5=\frac{1}{k}\Rightarrow\log_4 5=\frac{1}{k}-1=\frac{1-k}{k}$$

۹۵- (۲)

$$\log_2 3\times\log_9 3\times\log_2 4\times\log_3 4=\log_2 3\times\log_{3^2}3\times\log_2 2^2\times\log_3 2^2=\log_2 3\times\frac{1}{2}\times2\times2\log_3 2=2\underbrace{\log_2 3\times\log_3 2}_{1}=2(1)=2$$

۹۶- (۱)

$$\underbrace{\log_3 2\times\log_4 3}_{\log_4 2}\times\log_5 4\times\dots\times\log_{128}127=\underbrace{\log_4 2\times\log_5 4}_{\log_5 2}\times\dots\times\log_{128}127=\log_5 2\times\log_6 5\times\dots\times\log_{128}127=\dots$$

$$=\log_{128}2=\log_{2^7}2=\frac{1}{7}\log_2 2=\frac{1}{7}(1)=\frac{1}{7}$$

۹۷- (۲)

$$\log_{3\sqrt{3}}\sqrt{5}\times\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{9}\times\log_{\frac{1}{25}}8=\log_{3^{\frac{3}{2}}}5^{\frac{1}{2}}\times\log_{2^{\frac{1}{2}}}3^{-2}\times\log_{5^{-2}}2^{3}=\frac{(\cancel{\frac{1}{2}})(\cancel{-2})(3)}{(\frac{3}{2})(\cancel{\frac{1}{2}})(\cancel{-2})}\underbrace{\log_3 5\times\log_2 3}_{\log_2 5}\times\log_5 2$$

$$=2\underbrace{\log_2 5\times\log_5 2}_{1}=2(1)=2$$

۹۸- (۴) با کمی دقت پی می‌بریم که برای محاسبه‌ی $\log_2\frac{2}{a}$، اولین گام این است که در عبارت $\log_a 8=-\frac{3}{4}$، a را از مبنای لگاریتم به جلوی لگاریتم منتقل کنیم. داریم:

$$\log_a 8=-\frac{3}{4}\Rightarrow\log_a 2^3=-\frac{3}{4}\Rightarrow 3\log_a 2=-\frac{3}{4}\Rightarrow\log_a 2=-\frac{1}{4}\xrightarrow[\text{جواب عکس می‌شود}]{\text{جای عبارت و مبنا را عوض می‌کنیم}}\log_2 a=-4$$

حال برای محاسبه‌ی مقدار $\log_2\frac{2}{a}$، داریم:

$$\log_2\frac{2}{a}\xrightarrow{\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B}\log_2 2-\log_2 a=1-(-4)=5$$

۹۹- (۲)

$$\log_5 3=a\Rightarrow\log_3 5=\frac{1}{a}$$

$$\log_{\sqrt[3]{9}}625=\log_{3^{\frac{2}{3}}}5^4=\frac{4}{\frac{2}{3}}\log_3 5=6\log_3 5=6\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{6}{a}$$

۱۰۰- (۴)

$$A=\log_2\sqrt[5]{e^2}=\log_2 e^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}\log_2 e\Rightarrow\log_2 e=\frac{5A}{2}\xrightarrow[\text{و جواب عکس می‌شود}]{\text{جای عبارت و مبنا را عوض می‌کنیم}}\log_e 2=\frac{2}{5A}$$

حال با معلوم بودن مقدار $\log_e 2=\frac{2}{5A}$، حاصل $\log_{\sqrt{e}}32$ را مشخص می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{e}}32=\log_{e^{\frac{1}{2}}}2^5=\frac{5}{\frac{1}{2}}\log_e 2=10\left(\frac{2}{5A}\right)=\frac{20}{5A}=\frac{4}{A}$$

(۲) -۱۰۱ ابتدا باید جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را در فرض مسئله با هم عوض کنیم تا مبنا به ۳ تغییر کند. با انجام این کار می‌توانیم مطمئن باشیم مقدار $\log_3 2$ به‌دست می‌آید ... امیدوار باشیم ...

$$\log_{12} 3 = a \xrightarrow{\text{جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را عوض می‌کنیم}} \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3(2^2 \times 3) = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 2^2 + \log_3 3 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 2\log_3 2 + 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{\frac{1}{a} - 1}{2} = \frac{1-a}{2a}$$

---

(۳) -۱۰۲ با توجه به رابطه‌ی $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$، داریم:

$$a = \frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_4 12} = \log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12}(3 \times 4) = \log_{12} 12 = 1 \Rightarrow a = 1$$

حال با داشتن مقدار $a = 1$، حاصل $\log_{(a^2+7)} \sqrt{a+1}$ را مشخص می‌کنیم:

$$\log_{(a^2+7)} \sqrt{a+1} \overset{a=1}{=\!=} \log_{(1^2+7)} \sqrt{1+1} = \log_8 \sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{3} \underbrace{\log_2 2}_{1} = \frac{1}{6}$$

---

(۳) -۱۰۳

$$\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = 2 \Rightarrow \log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 2 \Rightarrow \log_6(abc) = 2 \Rightarrow abc = 6^2$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt[3]{abc}} 6 = \log_{(abc)^{\frac{1}{3}}} 6 = \frac{1}{\frac{1}{3}} \log_{abc} 6 \overset{abc=6^2}{=\!=\!=} 3\log_{6^2} 6 = \frac{3}{2} \underbrace{\log_6 6}_{1} = \frac{3}{2}$$

---

(۱) -۱۰۴ با توجه به فرمول $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$، داریم:

$$\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log 36}{\log 4} - \frac{\overbrace{\log\sqrt{15}}^{\frac{1}{2}\log 15}}{\underbrace{\log\sqrt{2}}_{\frac{1}{2}\log 2}} = \log_2 5 + \log_4 36 - \log_2 15 = \log_2 5 + \log_{2^2} 6^2 - \log_2 15 = \log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 15$$

$$= \log_2 \frac{5 \times 6}{15} = \log_2 2 = 1$$

---

(۲) -۱۰۵ برای محاسبه‌ی حاصل $\log_{y^2} x^2$، باید از فرمول تغییر مبنا استفاده کنیم (چون در فرض صورت تست، $\log x = a$ و $\log y = b$ در مبنای ۱۰ هستند). داریم:

$$\log_B A \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به } C} \frac{\log_C A}{\log_C B}$$

$$\log_{y^2} x^2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \log_y x \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۱۰}} \frac{\log x}{\log y} = \frac{a}{b}$$

---

(۲) -۱۰۶ در صورت تست $\log 5 = a$ و $\log 3 = b$ معرفی شده است. حال برای محاسبه‌ی $\log_{30} 12$، ابتدا مبنای لگاریتم را به ۱۰ تبدیل می‌کنیم. چون در فرض صورت تست، مبنای لگاریتم‌ها برابر ۱۰ می‌باشد. پس داریم:

$$\log_{30} 12 \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۱۰}} \frac{\log 12}{\log 30} = \frac{\log(2^2 \times 3)}{\log(3 \times 10)} = \frac{\log 2^2 + \log 3}{\log 3 + \log 10} = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 3 + 1}$$

$$\xrightarrow{\log 2 = 1 - \log 5} \frac{2(1 - \log 5) + \log 3}{\log 3 + 1} = \frac{2(1-a) + b}{b+1} = \frac{b + 2 - 2a}{b+1}$$

---

(۳) -۱۰۷

$$\log_{18} \sqrt{12} \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۱۰}} \frac{\log\sqrt{12}}{\log 18} = \frac{\log(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}}{\log(2 \times 3^2)} = \frac{\frac{1}{2}\log(2^2 \times 3)}{\log(2 \times 3^2)} = \frac{\frac{1}{2}(2\log 2 + \log 3)}{\log 2 + 2\log 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2a + b)}{a + 2b} = \frac{2a + b}{2a + 4b}$$

(۱)-۱۰۸

$$\frac{\log_3 16}{\log_5 8+\log_5 4} = \frac{\log_3 16}{\log_5 32} = \frac{\log_3 2^4}{\log_5 2^5} = \frac{4\log_3 2}{5\log_5 2} = \frac{4\times\frac{1}{\log_2 3}}{5\times\frac{1}{\log_2 5}} = \frac{4}{5}\times\frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{4}{5}\log_3 5$$

(۲)-۱۰۹

$$\log_5 8 = a \Rightarrow \log_5 2^3 = a \Rightarrow 3\log_5 2 = a \Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{3}$$

$$\log_{10} 2 \xrightarrow{\text{تغییر مبنا به ۵}} \frac{\log_5 2}{\log_5 10} = \frac{\log_5 2}{\log_5 (2\times 5)} = \frac{\log_5 2}{\log_5 2+\log_5 5} \xrightarrow{\log_5 2=\frac{a}{3}} \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}+1} = \frac{\frac{a}{\cancel{3}}}{\frac{a+3}{\cancel{3}}} = \frac{a}{a+3}$$

(۱)-۱۱۰ با توجه به قاعده‌ی ۱۰ ، داریم:

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a} \Rightarrow a^{\log_x b} - b^{\log_x a} = 0$$

(۳)-۱۱۱

$$2^{\log_8 x} = x^{\log_8 2} = x^{\log_{2^3} 2} = x^{\frac{1}{3}\log_2 2} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

(۳)-۱۱۲

$$4^{\log_4 2}+3^{\log_3 2} = 2^{\log_4 4}+2^{\log_3 3} = 2+2 = 4$$

(۳)-۱۱۳

$$a^{x\log_a b}\times b^{x\log_b a} = b^{x\log_a a}\times a^{x\log_b b} = b^x\times a^x = (ab)^x$$

(۲)-۱۱۴

$$25^{1-\log_5 2} \xrightarrow{a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}} \frac{25^1}{25^{\log_5 2}} = \frac{25}{2^{\log_5 25}} = \frac{25}{2^{\log_5 5^2}} = \frac{25}{2^2} = \frac{25}{4}$$

(۳)-۱۱۵

$$(0/25)^{-1+\log_{\sqrt{2}} 10} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+\log_{2^{\frac{1}{2}}} 10} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{2^{\frac{1}{2}}} 10} = 4\times 10^{\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2}} = 4\times 10^{-\frac{2}{\frac{1}{2}}\cancel{\log_2 2}} = 4\times 10^{-4} = \frac{4}{10^4} = 0/0004$$

(۴)-۱۱۶

$$5^{(2\log_5 2+3\log_5 3)} \xrightarrow{a^{x+y}=a^x\cdot a^y} 5^{2\log_5 2}\times 5^{3\log_5 3} \xrightarrow{a^{m\log_a \bigcirc}=\bigcirc^m} 2^2\times 3^3 = 4\times 27 = 108$$

(۴)-۱۱۷

$$e^{-\ln 5}+\ln\sqrt[5]{e^4} = e^{-\log_e 5}+\ln e^{\frac{4}{5}} = 5^{-1}+\frac{4}{5}\underbrace{\ln e}_{1} = \frac{1}{5}+\frac{4}{5} = 1$$

(۴)-۱۱۸

$$\sqrt{10}^{\,(4\log\sqrt[3]{16}-\log 4)} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\left(4\log 2^{\frac{4}{3}}-\log 2^2\right)} = 10^{\left(2\log 2^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}\log 2^2\right)} = \frac{10^{2\log 2^{\frac{4}{3}}}}{10^{\frac{1}{2}\log 2^2}} = \frac{\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^2}{(2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{8}{3}}}{2^1} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{32}$$

(۱)-۱۱۹

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}} = \sqrt{25^{\log_5 6}+49^{\log_7 8}} = \sqrt{6^{\log_5 25}+8^{\log_7 49}} = \sqrt{6^{\log_5 5^2}+8^{\log_7 7^2}} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

(۲)-۱۲۰

$$\ln\frac{1}{e^2}+\frac{\log_{\sqrt{e}} x\sqrt{x}}{\ln x} - e^{2\ln 2} = \ln e^{-2}+\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_e x\sqrt{x}}{\log_e x} - 2^{2\ln e} = -2\underbrace{\ln e}_{1}+2\log_x x\sqrt{x} - 2^2$$

$$= (-2)+2\log_x x^{\frac{3}{2}} - 4 = -2+2\times\frac{3}{2} - 4 = -3$$

۱۲۱- (۲) برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x(x-۱)\log_{۱۰} x = ۰$، کافی است تک‌تک عبارت‌ها را برابر صفر قرار دهیم. داریم:

$$x(x-۱)\log_{۱۰} x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \xrightarrow{\text{عبارت جلوی لگاریتم نمی‌تواند صفر باشد}} (\text{غ‌ق‌ق}) \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \xrightarrow{\text{کنترل}} (\text{ق‌ق}) \\ \log_{۱۰} x = ۰ \Rightarrow x = ۱۰^{۰} = ۱ \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{\text{کنترل}} (\text{ق‌ق}) \end{cases}$$

پس این معادله تنها دارای جواب $x = ۱$ است.

۱۲۲- (۲)

$$\log_x(۴x+۱) = \log_x(x^۲+۴) \Rightarrow ۴x+۱ = x^۲+۴ \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{مبنای لگاریتم‌ها برابر یک می‌شود}} (\text{غ‌ق‌ق}) \\ x = ۳ \ (\text{ق‌ق}) \end{cases}$$

۱۲۳- (۱) به راحتی می‌توانیم دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم مبنا (با ضریب ۱) ایجاد کنیم. داریم:

$$\log(x-۱)+\log(x+۱) = \log ۳ \Rightarrow \log \overbrace{(x-۱)(x+۱)}^{x^۲-۱} = \log ۳ \Rightarrow \log(x^۲-۱) = \log ۳$$

$$\Rightarrow x^۲-۱=۳ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \ (\text{ق‌ق}) \\ x = -۲ \xrightarrow{\text{عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود}} (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

۱۲۴- (۱) **روش اول:**

$$\log_{\sqrt{۲}} x = \log_۲ ۶۴ \Rightarrow \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} x = \log_۲ ۶۴ \xrightarrow{\log_{a^n} x = \log_a x^{\frac{۱}{n}}} \log_۲ x^۲ = \log_۲ ۶۴ \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \ (\text{ق‌ق}) \\ x = -۸ \ (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

روش دوم: در معادله‌ی صورت تست، عبارت سمت راست تساوی (یعنی $\log_۲ ۶۴$) برابر عدد ۶ است. پس داریم:

$$\log_{\sqrt{۲}} x = \log_۲ ۶۴ = ۶ \Rightarrow x = (\sqrt{۲})^۶ = (۲^{\frac{۱}{۲}})^۶ = ۲^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۸ \ (\text{ق‌ق})$$

۱۲۵- (۴) در معادله‌ی $۲\log(x-۲) = \log(x+۱۰)$، اگر بتوانیم ضریب ۲ را از پشت لگاریتم سمت چپ برداریم، به راحتی دو طرف تساوی، دو لگاریتم اعشاری ایجاد می‌شود که با حذف آن‌ها، جواب معادله به‌دست می‌آید. با توجه به قواعد لگاریتم، داریم:

$$۲\log(x-۲) = \log(x+۱۰) \Rightarrow \log \underbrace{(x-۲)^۲}_{f} = \log \underbrace{(x+۱۰)}_{g} \xrightarrow{f=g} x^۲-۴x+۴ = x+۱۰ \xrightarrow{x^۲-۵x-۶=۰} \begin{cases} x = -۱ \ (\text{غ‌ق‌ق}) \\ x = ۶ \end{cases}$$

حال با داشتن مقدار $x = ۶$، حاصل $\log_۴(x+۲)$ برابر است با:

$$\log_۴(x+۲) \xlongequal{x=۶} \log_۴ ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲} \cancel{\log_۲ ۲}^{\,۱} = \frac{۳}{۲}$$

۱۲۶- (۱) برای حل معادله‌ی $\log\left(۱+\frac{۱}{x}\right) + ۲\log x = \log ۲$، سعی می‌کنیم در دو طرف تساوی، دو لگاریتم اعشاری بسازیم:

$$\log\left(۱+\frac{۱}{x}\right) + ۲\log x = \log ۲ \Rightarrow \log\left(۱+\frac{۱}{x}\right) + \log x^۲ = \log ۲ \Rightarrow \log\left(۱+\frac{۱}{x}\right)x^۲ = \log ۲ \Rightarrow \log(x^۲+x) = \log ۲$$

$$\Rightarrow x^۲+x=۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \ (\text{ق‌ق}) \\ x = -۲ \xrightarrow{\text{به ازای } x=-۲ \ \log x \text{ تعریف نمی‌شود}} (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

بنابراین $\frac{۲}{x} = \frac{۲}{۱} = ۲$ خواهد بود.

۱۲۷- (۴)

$$\log_۳(۲x^۲+۱) - \log_۳(x+۲) = ۱ \Rightarrow \log_۳ \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳^۱ \Rightarrow ۲x^۲+۱ = ۳x+۶$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۵=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \ \text{غ‌ق‌ق} \\ x = \frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \log_۸(۲x-۱) \xlongequal{x=\frac{۵}{۲}} \log_۸\left(\cancel{۲}\left(\frac{۵}{\cancel{۲}}\right)-۱\right) = \log_{\underset{۲^۳}{۸}} \overset{۲^۲}{۴} = \frac{۲}{۳}$$

(۳) - ۱۲۸

$$\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶) \Rightarrow \log_x(۳x+۸)+\log_x(x-۶)=۲ \Rightarrow \log_x(۳x+۸)(x-۶)=۲$$

$$\Rightarrow \log_x(۳x^۲-۱۰x-۴۸)=۲ \Rightarrow ۳x^۲-۱۰x-۴۸=x^۲ \Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۴۸=۰ \xRightarrow{\div ۲} x^۲-۵x-۲۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۸)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۸ & (\text{ق ق}) \\ x=-۳ & (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases} \Rightarrow \log_۴ x \xlongequal{x=۸} \log_۴ ۸ = \log_{۲^۲} ۲^۳ = \frac{۳}{۲}\cancel{\log_۲ ۲}^{۱} = \frac{۳}{۲}$$

(۴) - ۱۲۹

$$\log_x(x^۲+۴)=۱+\log_x ۵ \Rightarrow \log_x(x^۲+۴)-\log_x ۵=۱$$

$$\Rightarrow \log_x\frac{x^۲+۴}{۵}=۱ \Rightarrow \frac{x^۲+۴}{۵}=x \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \xRightarrow{\text{مبنای لگاریتم نمی‌تواند ۱ باشد.}} (\text{غ‌ق‌ق}) \\ x=۴ \Rightarrow (\text{ق ق}) \end{cases} \Rightarrow \log_۲ x \xlongequal{x=۴} \log_۲ ۴ = ۲\cancel{\log_۲ ۲}^{۱} = ۲$$

(۳) - ۱۳۰

$$\log(x-۲)+\log(x-۳)=\overset{\log ۱۰}{\overset{\uparrow}{۱}}+\log ۳ \Rightarrow \log\overbrace{(x-۲)(x-۳)}^{f}=\log\overbrace{۱۰\times ۳}^{g} \xRightarrow{f=g} x^۲-۵x+۶=۳۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x-۲۴=۰ \xlongequal{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (x-۸)(x+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۸ & (\text{ق ق}) \\ x=-۳ \xRightarrow[\text{منفی می‌کند}]{\text{عبارت جلوی لگاریتم‌ها را}} (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی فوق، تنها دارای یک ریشه‌ی مثبت (یعنی $x=۸$) است.

(۱) - ۱۳۱

$$\log(x^۲-x+۱)+\log(x+۱)=۱ \Rightarrow \log\overbrace{(x^۲-x+۱)(x+۱)}^{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=۱ \Rightarrow \log(x^۳+۱)=۱ \Rightarrow x^۳+۱=۱۰^۱ \Rightarrow x^۳=۹ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۹}$$

حال مقدار لگاریتم $x=\sqrt[۳]{۹}$ در پایه‌ی ۳ را به دست می‌آوریم:

$$\log_۳ x \xlongequal{x=\sqrt[۳]{۹}} \log_۳\sqrt[۳]{۹}=\log_۳\sqrt[۳]{۳^۲}=\log_۳ ۳^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}\underbrace{\log_۳ ۳}_{۱}=\frac{۲}{۳}(۱)=\frac{۲}{۳}$$

(۴) - ۱۳۲ سمت چپ تساوی را تبدیل به یک لگاریتم می‌کنیم. داریم:

$$\log\frac{x+۱}{x+۲}+\log\frac{x+۲}{x+۳}+\log\frac{x+۳}{x+۴}=-۱ \Rightarrow \log\left(\frac{x+۱}{\cancel{x+۲}}\right)\left(\frac{\cancel{x+۲}}{\cancel{x+۳}}\right)\left(\frac{\cancel{x+۳}}{x+۴}\right)=-۱ \Rightarrow \log_{۱۰}\frac{x+۱}{x+۴}=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{x+۱}{x+۴}=۱۰^{-۱} \Rightarrow \frac{x+۱}{x+۴}=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow ۱۰x+۱۰=x+۴ \Rightarrow ۹x=-۶ \Rightarrow x=\frac{-۲}{۳}$$

ریشه‌ی به دست آمده را کنترل می‌کنیم. چون به ازای $x=-\frac{۲}{۳}$ همه‌ی عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها مثبت هستند، این ریشه قابل قبول است.

(۲) - ۱۳۳

$$\log_۲(۴x+۲)-۲\log_۲\sqrt{x+۴}=۱ \Rightarrow \log_۲(۴x+۲)-\log_۲\overbrace{(\sqrt{x+۴})^۲}^{x+۴}=۱ \Rightarrow \log_۲\frac{۴x+۲}{x+۴}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۴x+۲}{x+۴}=۲^۱ \Rightarrow ۴x+۲=۲x+۸ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

با جای‌گذاری $x=۳$ در معادله‌ی فوق، نتیجه می‌گیریم که این مقدار قابل‌قبول است. پس جواب معادله برابر با $x=۳$ می‌باشد.

حال با معلوم بودن $x=۳$، حاصل $\log_{\sqrt[۳]{۹}} x$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\log_{\sqrt[۳]{۹}} x \xlongequal{x=۳} \log_{۳^{\frac{۲}{۳}}} ۳=\frac{۳}{۲}\cancel{\log_۳ ۳}^{۱}=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۴- (۱)

$$\log_{۱۰}(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\log_{۱۰}(x^{۲})=\log_{۱۰}۳ \Rightarrow \log_{۱۰}(۲x-۱)+\log_{۱۰}(x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=\log_{۱۰}۳ \Rightarrow \log_{۱۰}(۲x-۱)+\log_{۱۰}x=\log_{۱۰}۳$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}(۲x-۱)x=\log_{۱۰}۳ \Rightarrow ۲x^{۲}-x=۳ \Rightarrow ۲x^{۲}-x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \xrightarrow{\text{جلوی لگاریتم منفی می‌شود}} (\text{غ‌ق‌ق}) \\ x=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{کنترل}} (\text{ق‌ق}) \end{cases}$$

حال مقدار لگاریتم $\frac{x}{۳}$ را در مبنای ۴ مشخص می‌نماییم:

$$\log_{۴}\frac{x}{۳} \xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} \log_{۴}\frac{\frac{\cancel{۳}}{۲}}{\cancel{۳}}=\log_{۴}\frac{۱}{۲}=\log_{۲^{۲}}۲^{-۱}=-\frac{۱}{۲}\underbrace{\log_{۲}۲}_{۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۳۵- (۲) برای حل این معادله‌ی لگاریتمی، باید دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم‌مبنا ساخته و سپس عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها را برابر قرار دهیم. داریم:

$$\log(x^{۲}-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵) \Rightarrow \log\frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳}=\log(۲x-۵) \Rightarrow \frac{x^{۲}-x-۶}{x-۳}=۲x-۵ \Rightarrow x^{۲}-x-۶=(x-۳)(۲x-۵)$$

$$\Rightarrow x^{۲}-x-۶=۲x^{۲}-۱۱x+۱۵ \Rightarrow x^{۲}-۱۰x+۲۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \ \text{غ‌ق‌ق} \Rightarrow (\text{عضو دامنه‌ی معادله نیست.}) \\ x=۷ \end{cases}$$

حال حاصل لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایه‌ی ۴ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\log_{۴}\sqrt[۳]{x+۱} \xrightarrow{x=۷} \log_{۴}\sqrt[۳]{۷+۱}=\log_{۴}۲=\log_{۲^{۲}}۲=\frac{۱}{۲}\log_{۲}۲=\frac{۱}{۲}$$

۱۳۶- (۳) ابتدا با حل معادله‌ی لگاریتمی $\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}=\log(۸۱)^{K}$، مقدار K را مشخص می‌کنیم. برای این منظور کافی است بـا اسـتفاده از قواعد لگاریتم‌ها در دو طرف تساوی، دو لگاریتم اعشاری (با ضریب ۱) ساخته و سپس ادعا کنیم که عبارت‌های جلوی دو لگاریتم اعشاری، بـا هم برابرند. داریم:

$$\log ۳+\log\sqrt[۴]{۳}=\log(۸۱)^{K} \Rightarrow \log ۳\sqrt[۴]{۳}=\log(۸۱)^{K} \Rightarrow ۳\sqrt[۴]{۳}=(۸۱)^{K}$$

حال برای حل معادله‌ی نمایی حاصل، دو عبارت نمایی دو طرف تساوی را هم‌پایه کرده و توان‌های آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$۳^{۱}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}=(۳^{۴})^{K} \Rightarrow ۳^{۱+\frac{۱}{۴}}=۳^{۴K} \Rightarrow ۳^{\frac{۵}{۴}}=۳^{۴K} \Rightarrow \frac{۵}{۴}=۴K \Rightarrow K=\frac{۵}{۱۶}$$

بنابراین با داشتن مقدار K، لگاریتم $\frac{۵}{K}$ در مبنای ۲ برابر است با:

$$\log_{۲}\frac{۵}{K} \xrightarrow{K=\frac{۵}{۱۶}} \log_{۲}\frac{۵}{\frac{۵}{۱۶}}=\log_{۲}۱۶=\log_{۲}۲^{۴}=۴\cancel{\log_{۲}۲}^{۱}=۴$$

۱۳۷- (۳) گول ظاهر معادله‌ی $\log_{۳}\sqrt{۳}+\log_{\sqrt{۳}}۳=\log_{۹}x$ را نباید خورد. چون سمت چپ تساوی به‌راحتی ساده شـده و تبـدیل بـه یـک عـدد خواهد شد. داریم:

$$\log_{۳}\sqrt{۳}+\log_{\sqrt{۳}}۳=\log_{۹}x \Rightarrow \log_{۳}۳^{\frac{۱}{۲}}+\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}۳=\log_{۹}x \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{\log_{۳}۳}^{۱}+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\cancel{\log_{۳}۳}^{۱}=\log_{۹}x$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}+۲=\log_{۹}x \Rightarrow \log_{۹}x=\frac{۵}{۲} \Rightarrow x=۹^{\frac{۵}{۲}}=(۳^{۲})^{\frac{۵}{۲}}=۳^{۵} \ (\text{ق‌ق})$$

۱۳۸- (۴) چون در جلوی لگاریتم‌های اعشاری، عامل‌های ۱۰ وجود دارد، ابتدا شکل معادله را تغییر می‌دهیم:

$$\log_{۱۰}\overset{۱۰^{۶}}{۱۰۰۰۰۰۰}=\log_{۱۰۰}x+\log_{۱۰}\overset{۱۰^{۳}}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۶\cancel{\log_{۱۰}۱۰}^{۱}=\log_{۱۰۰}x+۳\cancel{\log_{۱۰}۱۰}^{۱} \Rightarrow \log_{۱۰۰}x=۳ \Rightarrow x=۱۰۰^{۳}=۱۰۰۰۰۰۰ \quad (\text{ق‌ق})$$

۱۳۹- (۳) در حل معادله‌ی لگاریتمی $\log_{۳}x+\log_{\sqrt{۳}}x+\log_{\frac{۱}{۳}}x=۶$ ، چون در سمت راست تسـاوی عـدد ۶ وجـود دارد، بایـد در سـمت چـپ تساوی یک لگاریتم ایجاد کنیم. در سمت چپ تساوی سه لگاریتم با هم جمع شده‌اند. ابتدا مبنای آن‌ها را یکسان می‌کنیم. داریم:

$$\log_{۳}x+\log_{\sqrt{۳}}x+\log_{\frac{۱}{۳}}x=۶ \Rightarrow \log_{۳}x+\log_{۳^{\frac{۱}{۲}}}x+\log_{۳^{-۱}}x=۶ \Rightarrow \log_{۳}x+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{۳}x+\frac{۱}{-۱}\log_{۳}x=۶$$

$$\Rightarrow \log_{۳}x+۲\log_{۳}x-\log_{۳}x=۶ \Rightarrow ۲\log_{۳}x=۶ \Rightarrow \log_{۳}x=۳ \Rightarrow x=۳^{۳}=۲۷ \ (\text{ق‌ق})$$

۱۴۰- (۳) اگر عدد موردنظر را x درنظر بگیریم، داریم:

$$\log_9 x = \log_9 \frac{1}{x^2} + 4/5 \Rightarrow \log_9 x - \log_9 \frac{1}{x^2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \log_9 \frac{x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{9}{2} \Rightarrow \log_9 x^3 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = 9^{\frac{9}{2}} = (3^2)^{\frac{9}{2}} = 3^9 \Rightarrow x^3 = 3^9 \xRightarrow{\sqrt[3]{}} x = \sqrt[3]{3^9} = 3^3 = 27 \Rightarrow x = 27 \ (\text{قق})$$

۱۴۱- (۱)

$$\log_{10}(x-1) + \log_{10}(x-2) = \log_{10}(x^3+2) \Rightarrow \log_{10}(x-1)(x-2) = \log_{10}(x^3+2) \Rightarrow \underbrace{(x-1)(x-2)}_{x^2-3x+2} = x^3+2$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \xrightarrow{\text{عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود}} (\text{غ‌قق}) \\ x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3) = -11 < 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی لگاریتمی فوق، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۱۴۲- (۴) در این معادله اگر به جای عدد ۱، عبارت $\log_{10} 10$ را جایگزین نماییم، به راحتی می‌توانیم در دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم‌مبنا و بدون ضریب بسازیم. داریم:

$$2\log_{10} x = 1 + \log_{10}\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \log_{10} x^2 = \log_{10} 10 + \log_{10}\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \log_{10} x^2 = \log_{10} 10\left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 = 10\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow x^2 = 10x + 24 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 10x - 24}_{(x+2)(x-12)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \xrightarrow{\text{عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود}} (\text{غ‌قق}) \\ x = 12 \xRightarrow{\text{کنترل}} (\text{قق}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_5(2x+1) \xlongequal{x=12} \log_5(2 \times 12 + 1) = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\underbrace{\log_5 5}_{1} = 2$$

۱۴۳- (۴)

نکته:

$$\log_a \log_b \log_c x = k \Rightarrow x = c^{b^{a^k}}$$

دقت کنیم: عبارت $c^{b^{a^k}}$ برابر با $\left((c^b)^a\right)^k$ نیست. پس به هوش باشیم که $c^{b^{a^k}} \neq c^{bak}$.

طبق قاعده‌ی مطرح‌شده، داریم:

$$\log_2 \log_3(1+2x) = 1 \Rightarrow (1+2x) = 3^{2^1} = 3^2 = 9 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \xRightarrow{\text{کنترل}} (\text{قق})$$

۱۴۴- (۳)

$$\log_2(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}) = -2 \Rightarrow \sqrt[2\times2\times2\times2]{x} = 2^{2^{-2}} \Rightarrow \sqrt[16]{x} = 2^{\frac{1}{4}} \xRightarrow[\text{۱۶ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}} x = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{16} = 2^4 = 16$$

۱۴۵- (۳)

نکته: هرگاه $\log_a x$، $\log_a y$ و $\log_a z$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها، یعنی x، y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

اثبات: $\log_a x + \log_a z = 2\log_a y \Rightarrow \log_a(xz) = \log_a y^2 \Rightarrow xz = y^2 \Rightarrow$ x، y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند

با توجه به نکته بالا چون $\log_{10} x$، $\log_{10}(x+3)$ و $\log_{10} 4x$ تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، در نتیجه x، $(x+3)$ و $4x$ تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. بنابراین می‌نویسیم:

$$\Rightarrow x \times 4x = (x+3)^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \xRightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \xrightarrow{\text{عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود}} (\text{غ‌قق}) \\ x = 3 \xRightarrow{\text{کنترل}} (\text{قق}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_8(x+1) \xlongequal{x=3} \log_8(\overbrace{3+1}^{4}) = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}\underbrace{\log_2 2}_{1} = \frac{2}{3}$$

۱۴۶- (۳) ابتدا با حل معادله‌ی نمایی $۴^x = ۴\sqrt{۲}$، مقدار x را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور دو طرف تساوی را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم تا دو طرف، هم‌پایه شوند. داریم:

$$۴\sqrt{۲}=۴^x \Rightarrow ۲^۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۲^۲)^x \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۲}} = ۲^{۲x} \Rightarrow ۲x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

سپس مقدار به‌دست آمده را در معادله‌ی لگاریتمی $۱+\log\sqrt{x+۱}=\log y$، جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار y به‌دست آید. می‌نویسیم:

$$x=\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۱+\log\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=\log y \Rightarrow \overset{\text{عدد}}{۱}+\log\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow \log y-\log\frac{۳}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰}\left(\frac{y}{\frac{۳}{۲}}\right)=۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}y=۱۰^۱\Rightarrow y=۱۵\ (\text{قق})$$

البته می‌توانستیم این کار را هم بکنیم:

$$۱+\log\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow \log۱۰+\log\frac{۳}{۲}=\log y\Rightarrow \log\left(۱۰\times\frac{۳}{۲}\right)=\log y\Rightarrow y=۱۵$$

۱۴۷- (۳)

$$\log_{۱۰}(y+۲)=۱ \Rightarrow y+۲=۱۰^۱\Rightarrow y=۸$$

$$\log_{۱۰}(y-x)+\log_{۱۰}(۴x+y)=۲\Rightarrow \log_{۱۰}(y-x)(۴x+y)=۲\Rightarrow (y-x)(۴x+y)=۱۰^۲$$

$$\xrightarrow{y=۸} (۸-x)(۴x+۸)=۱۰۰ \Rightarrow -۴x^۲+۲۴x-۳۶=۰ \xrightarrow{\div(-۴)} x^۲-۶x+۹=۰\Rightarrow (x-۳)^۲=۰\Rightarrow x=۳ \xrightarrow{\text{کنترل}} \text{قق}$$

۱۴۸- (۴) برای حل دستگاه معادلات $\begin{cases}\log_۳x-\log_۹y=۰\\ ۲x-y=۱\end{cases}$، کافی است معادله‌ی اول را از شکل لگاریتمی خارج کنیم. داریم:

$$\log_۳x-\log_۹y=۰\Rightarrow \log_۳x=\log_{۳^۲}y\Rightarrow \log_۳x=\log_۳y^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow x=y^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{y}\xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} x^۲=y$$

حال در دستگاه حاصل، مقدار x + y برابر است با:

$$\begin{cases}x^۲=y\\ ۲x-y=۱\end{cases} \xrightarrow{y=x^۲} ۲x-x^۲=۱\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=۱\Rightarrow x+y=۲$$

۱۴۹- (۱) x و y اعداد مثبت‌اند و داریم:

$$\log_۳x+\log_۳y=۲\Rightarrow\log_۳(xy)=۲\Rightarrow xy=۳^۲=۹$$

$$x^۲+y^۲=۴۶\Rightarrow (x+y)^۲-۲xy=۴۶\Rightarrow (x+y)^۲-۲\times۹=۴۶\Rightarrow (x+y)^۲=۶۴ \xrightarrow[y>۰]{x>۰} x+y=۸$$

بنابراین لگاریتم x + y در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_۴(x+y)=\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۱۵۰- (۲) می‌دانیم $\log_x ۵=\frac{۱}{\log_۵ x}$. حال اگر در معادله‌ی داده شده در صورت تست، به جای $\log_x ۵$، $\frac{۱}{\log_۵ x}$ را جایگزین نماییم، می‌توانیم از روش تغییر متغیر معادله را حل کنیم. داریم:

$$\log_۵x+\log_x۵=۲ \xrightarrow{\log_x۵=\frac{۱}{\log_۵x}} \log_۵x+\frac{۱}{\log_۵x}=۲ \xrightarrow{\log_۵x=t} t+\frac{۱}{t}=۲ \xrightarrow[t\neq۰]{\times t} t^۲+۱=۲t$$

$$\Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰\Rightarrow (t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=۱\Rightarrow \log_۵x=۱\Rightarrow x=۵$$

چون x = ۵ جلوی لگاریتم را صفر نمی‌کند و برای مبنا نیز مشکلی به‌وجود نمی‌آورد، جواب قابل‌قبول است. بنابراین معادله‌ی فوق تنها دارای یک ریشه‌ی حقیقی می‌باشد.

۱۵۱- (۳)

$$\begin{cases}۴^x+۲^x=۷۲\Rightarrow (۲^x)^۲+۲^x-۷۲=۰ \xrightarrow{۲^x=t} t^۲+t-۷۲=۰\Rightarrow \begin{cases}t=-۹=۲^x\ (\text{نشدنی}) \Rightarrow \text{جواب ندارد}\\ t=۸=۲^x\Rightarrow x=۳\end{cases}\\ \log(x+۱)+\log(۲y+x^۲)=۲ \xrightarrow{x=۳} \log۴+\log(۲y+۹)=۲\Rightarrow \log_{۱۰}۴(۲y+۹)=۲\Rightarrow ۸y+۳۶=۱۰^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۸y=۶۴\Rightarrow y=۸$$

مهندس علی مقدم‌نیا

سال تحصیلی 97-96

۱۵۲- (۲) در دستگاه معادلات زیر، فرض می‌کنیم $\log_{10} x$ و $\log_{10} y$ متغیرهای دستگاه هستند. داریم:

$$\begin{cases}\log_{10} x-\log_{10} y=2 & (1)\\ \log_{10} x^2-\log_{10} y=4\Rightarrow 2\log_{10} x-\log_{10} y=4 & (2)\end{cases}\xrightarrow{(2)-(1)}\log_{10} x=2\Rightarrow \log_{10} y=0$$

$$\Rightarrow \log_{10}(x^3 y)=\log_{10} x^3+\log_{10} y=3\log_{10} x+\log_{10} y=3(2)+0=6$$

۱۵۳- (۳) حل این معادله، احتیاج به ابتکار عمل دارد. اگر در کل معادله، متغیر را به‌صورت $\log_2 x$ ایجاد نماییم، از روش تغییر متغیر معادله قابل حل است. داریم:

$$(\log_2 x)^2-9\log_8 x=4\Rightarrow(\log_2 x)^2-9\log_{2^3} x-4=0\Rightarrow(\log_2 x)^2-\frac{9}{3}\log_2 x-4=0$$

$$\xrightarrow{\log_2 x=t} t^2-3t-4=0\Rightarrow\begin{cases}t=\log_2 x=-1\Rightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{کنترل}}(\text{ق ق})\\ t=\log_2 x=4\Rightarrow x=2^4=16\xrightarrow{\text{کنترل}}(\text{ق ق})\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت $x=\frac{1}{2}$ و $x=16$ می‌باشند.

دقت کنیم: به جای $(\log_2 x)^2$ نمی‌توانیم عبارت $2\log_2 x$ را جایگزین کنیم. چون توان روی کل عبارت $(\log_2 x)$ قرار دارد، نمی‌توانیم عدد ۲ را به پشت لگاریتم ببریم. به عبارتی داریم:

$$(\log_2 x)^2\neq 2\log_2 x$$

۱۵۴- (۴) در گزینه‌ی (۱)، چون مبنا و عبارت جلوی لگاریتم هر دو بزرگ‌تر از یک هستند، در نتیجه جواب لگاریتم مثبت است. پس درست می‌باشد.

در گزینه‌ی (۲)، چون مبنا و عبارت جلوی لگاریتم هر دو بین صفر و یک هستند، در نتیجه جواب لگاریتم مثبت بوده و این گزینه نیز درست است.

در گزینه‌ی (۳)، مبنا و عبارت جلوی لگاریتم، یکی بین صفر و یک و دیگری بزرگ‌تر از یک است. پس جواب لگاریتم منفی بوده و گزینه‌ی (۳) نیز درست است.

در گزینه‌ی (۴)، جواب $\log 2$ قطعاً عددی بین صفر و یک است. چون:

$$1<2<10\xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم.}]{\text{از طرفین در مبنای ۱۰}}\log 1<\log 2<\log 10\Rightarrow 0<\log 2<1$$

حال در عبارت $\log_{10}(\log 2)$ چون عبارت جلوی لگاریتم بین صفر و یک بوده و مبنا بزرگ‌تر از یک است، در نتیجه جواب آن قطعاً منفی می‌باشد. پس گزینه‌ی (۴) نادرست است.

۱۵۵- (۴) در تمام گزینه‌ها پایه‌ی لگاریتم‌ها بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد، بنابراین چون در گزینه‌ی (۴)، $\frac{2}{3}<1$ است، پس $\log_{10}\frac{2}{3}<0$ می‌باشد. اما سایر گزینه‌ها مثبت هستند. زیرا اعداد ۳، $\frac{3}{2}$ و ۲ همگی از ۱ بزرگ‌ترند. پس $\log_{2} 3>0$، $\log_{10}\frac{3}{2}>0$ و $\log_{3} 2>0$ می‌باشد. در نتیجه گزینه‌ی (۴) که منفی است از سایر گزینه‌ها کوچک‌تر می‌باشد.

۱۵۶- (۱)

گزینه‌ی (۱): $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{100}>\log_{\frac{1}{2}}100\xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\text{مبنا بین صفر و یک است}}\frac{1}{100}<100\Rightarrow$ **درست است**

گزینه‌ی (۳): $\log_5 3<\log_5 5=1=\log_3 3<\log_3 5\Rightarrow\log_5 3<\log_3 5\Rightarrow$ نادرست است

گزینه‌ی (۴): $\log_{\frac{1}{2}}3>\log_{\frac{1}{2}}2\xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\text{مبنا بین صفر و یک است}}3<2\Rightarrow$ نادرست است

برای بررسی نادرستی گزینه‌ی (۲) نیز، مانند گزینه‌ی (۳) عمل می‌کنیم.

۱۵۷- (۱) قبل از حل نامعادله، دامنه‌ی عبارت لگاریتمی را مشخص می‌کنیم. برای این منظور عبارت جلوی لگاریتم را مثبت قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}2x-1>0\Rightarrow x>\frac{1}{2} & (1)\\ \log_2(2x-1)>-2\xrightarrow{\text{مبنا بزرگ‌تر از یک است}}2x-1>2^{-2}\Rightarrow 2x-1>\frac{1}{4}\Rightarrow 2x>\frac{5}{4}\xrightarrow{\div 2}x>\frac{5}{8} & (2)\end{cases}\xrightarrow[(1)\cap(2)]{\text{اشتراک}}x>\frac{5}{8}$$

۱۵۸- (۳) قبل از حل نامعادله‌ی لگاریتمی، دامنه‌ی متغیر x را مشخص می‌کنیم:

$$x-۳>۰ \Rightarrow x>۳ \qquad (۱)$$

$$۲+\log_{۰/۲۵}(x-۳)\ge ۰ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۴}}(x-۳)\ge -۲ \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود}]{\text{مبنا بین صفر و یک}} x-۳\le\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-۲}=(۲^{-۲})^{-۲}=۲^{۴} \Rightarrow x-۳\le ۱۶ \Rightarrow x\le ۱۹ \qquad (۲)$$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}$ جواب: $۳<x\le ۱۹$ یا $x\in(۳،۱۹]$

۱۵۹- (۲)

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲}>۰ \xrightarrow{\times ۲} x-۱>۰ \Rightarrow x>۱ \qquad (۱) \\ \log_{۱۰}\dfrac{x-۱}{۲}\ge ۰ \xrightarrow{\text{مبنا بزرگ‌تر از یک است}} \dfrac{x-۱}{۲}\ge ۱۰^{۰} \Rightarrow \dfrac{x-۱}{۲}\ge ۱ \xrightarrow{\times ۲} x-۱\ge ۲ \Rightarrow x\ge ۳ \qquad (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D_f=[۳،+\infty)$$

۱۶۰- (۱) برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع، ابتدا دامنه‌ی لگاریتم را مشخص کرده و سپس عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳x+۴}{۵}>۰ \Rightarrow ۳x+۴>۰ \Rightarrow x>-\frac{۴}{۳} \qquad (۱)$$

$$-۱-\log_{۲}\frac{۳x+۴}{۵}\ge ۰ \Rightarrow \log_{۲}\frac{۳x+۴}{۵}\le -۱ \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{\text{مبنا بزرگ‌تر از یک}} \frac{۳x+۴}{۵}\le ۲^{-۱} \Rightarrow \frac{۳x+۴}{۵}\le\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times ۵} ۳x+۴\le\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳x\le -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\div ۳} x\le -\frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}$ دامنه‌ی تعریف تابع f: $-\frac{۴}{۳}<x\le -\frac{۱}{۲}$ یا $D_f=\left(-\frac{۴}{۳}،-\frac{۱}{۲}\right]$

۱۶۱- (۲)

$$\underset{۰/۰۱}{۱۰^{-۲}}<۰/۰۲<\underset{۰/۱}{۱۰^{-۱}} \xrightarrow{\log_{۱۰}} \log ۱۰^{-۲}<\log ۰/۰۲<\log ۱۰^{-۱} \Rightarrow -۲<\log ۰/۰۲<-۱ \Rightarrow \log ۰/۰۲=-۱/...$$

$$۱۰^{۳}<۱۳۱۹<۱۰^{۴} \xrightarrow{\log_{۱۰}} \log ۱۰^{۳}<\log ۱۳۱۹<\log ۱۰^{۴} \Rightarrow ۳<\log ۱۳۱۹<۴ \Rightarrow \log ۱۳۱۹=۳/...$$

$$\Rightarrow [\log ۰/۰۲]+[\log ۱۳۱۹]=\overset{-۲<\quad <-۱}{[-۱/...]}+\overset{۳<\quad <۴}{[۳/...]}=(-۲)+۳=۱$$

۱۶۲- (۳)

$$\log_{\sqrt[۳]{۳}}۴=\log_{۳^{\frac{۱}{۳}}}۴ \xlongequal{\log_{a^n}A=\log_a A^{\frac{۱}{n}}} \log_{۳}۴^{۳}=\log_{۳}۶۴$$

حال برای تعیین قسمت صحیح جواب $\log_{۳}۶۴$، ابتدا باید عدد ۶۴ را بین توان‌های متوالی عدد ۳ (مبنای لگاریتم) قرار دهیم. داریم:

$$۳^{۳}<۶۴<۳^{۴} \xrightarrow{\log_{۳}} \log_{۳}۳^{۳}<\log_{۳}۶۴<\log_{۳}۳^{۴} \Rightarrow ۳<\log_{۳}۶۴<۴ \Rightarrow \log_{۳}۶۴=۳/...$$

$$\Rightarrow \left[\log_{\sqrt[۳]{۳}}۴\right]=[\log_{۳}۶۴]=\overset{۳<\quad <۴}{[۳/...]}=۳$$

۱۶۳- (۱)

$$۵\log ۲=\log ۲^{۵}=\log ۳۲ \Rightarrow ۱۰^{۱}<۳۲<۱۰^{۲} \xrightarrow{\log_{۱۰}} \log ۱۰^{۱}<\log ۳۲<\log ۱۰^{۲} \Rightarrow ۱<\log ۳۲<۲ \Rightarrow \log ۳۲=۱/...$$

$$\frac{۱}{۵}\log ۲=\log ۲^{\frac{۱}{۵}}=\log\sqrt[۵]{۲} \Rightarrow ۱۰^{۰}<\sqrt[۵]{۲}<۱۰^{۱} \xrightarrow{\log_{۱۰}} \log ۱۰^{۰}<\log\sqrt[۵]{۲}<\log ۱۰^{۱} \Rightarrow ۰<\log\sqrt[۵]{۲}<۱ \Rightarrow \log\sqrt[۵]{۲}=۰/...$$

$$\Rightarrow [۵\log ۲]+\left[\frac{۱}{۵}\log ۲\right]=[\log ۳۲]+[\log\sqrt[۵]{۲}]=[۱/...]+[۰/...]=۱+۰=۱$$

۱۶۴- (۳) می‌دانیم که عدد ۶۲۶ بین اعداد ۶۲۵ (یعنی $۵^{۴}$) و $۵^{۵}$ می‌باشد. بنابراین:

$$۵^{۴}<۶۲۶<۵^{۵} \xrightarrow[\text{در مبنای ۵ می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم}} \log_{۵}۵^{۴}<\log_{۵}۶۲۶<\log_{۵}۵^{۵} \Rightarrow ۴<\log_{۵}۶۲۶<۵ \Rightarrow ۴<A<۵$$

۱۶۵- (۱)

$$\frac{۱}{۱۲۵}<\frac{۱}{۲۶}<\frac{۱}{۲۵} \Rightarrow ۵^{-۳}<\frac{۱}{۲۶}<۵^{-۲} \xrightarrow{\log_{۵}} \log_{۵}۵^{-۳}<\log_{۵}\frac{۱}{۲۶}<\log_{۵}۵^{-۲} \Rightarrow -۳<\log_{۵}\frac{۱}{۲۶}<-۲ \Rightarrow -۳<a<-۲$$

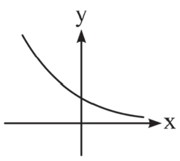
(۴) - ۱۶۶

$$۰/۰۰۱ < ۰/۰۰۵۰۶ < ۰/۰۱ \Rightarrow ۱۰^{-۳} < ۰/۰۰۵۰۶ < ۱۰^{-۲} \xrightarrow{\log_{۱۰}} \log ۱۰^{-۳} < \log ۰/۰۰۵۰۶ < \log ۱۰^{-۲} \Rightarrow -۳ < \log ۰/۰۰۵۰۶ < -۲$$

دقت کنیم: برای آن‌که متوجه شویم ۰/۰۰۵۰۶ بین کدام دو عدد اعشاری است، همیشه اولین عدد غیر از صفر بعد از ممیز را درنظر می‌گیریم. به عنوان مثال عدد ۰/۰۰۵۰۶ را به‌صورت ۰/۰۰۵ درنظر می‌گیریم و از بقیه‌ی ارقام صرف‌نظر می‌کنیم. حال به راحتی نتیجه می‌گیریم که ۰/۰۰۵ بین ۰/۰۰۱ و ۰/۰۱ است.

---

(۳) - ۱۶۷ پایه‌ی تابع نمایی $y = (\log_{۵} ۳)^{\cos x}$ عددی بین صفر و یک است. می‌دانیم توان یک عبارت نمایی که پایه‌اش بین صفر و یک است، هرچه کوچک‌تر باشد، عبارت نمایی بزرگ‌تر می‌شود. پس برای تعیین بیشترین مقدار تابع، کم‌ترین مقدار توان (یعنی ۱-) را جایگزین کرده و داریم:



$$\uparrow \max y = \max \underbrace{(\log_{۵} ۳)}_{\text{بین صفر و یک}}{}^{\cos x \downarrow} = (\log_{۵} ۳)^{-۱} = \frac{۱}{\log_{۵} ۳} = \log_{۳} ۵$$

---

(۳) - ۱۶۸

نکته‌های به یادماندنی:

اگر قسمت صحیح جواب لگاریتم عددی در مبنای ۱۰، معلوم و برابر با عددی مثبت یا صفر باشد، کافی است به قسمت صحیح، ۱ واحد اضافه کنیم تا تعداد ارقام این عدد مشخص شود. به عنوان مثال اگر $\log A = ۲/۰۰۰$، عدد A قطعاً سه رقمی است. یا مثلاً اگر $\log B = ۰/۰۰۰$، عدد B یک رقمی خواهد بود.

اگر جواب لگاریتم عددی در مبنای ۱۰ منفی باشد، این عدد بین صفر و یک بوده و به اندازه‌ی قدرمطلق قسمت صحیح این جواب، صفرِ کنار هم در جلوی ممیز اعشاری این عدد خواهیم داشت. به عنوان مثال در $\log A = -۲/۰۰۰$، چون $|-۲| = ۲$، نتیجه می‌گیریم که عدد A بین صفر و یک بوده و در جلوی ممیز اعشاری آن، ۲ رقم صفر وجود دارد. یعنی $۰/۰۰۱ \le A < ۰/۰۱$.

حال به سراغ حل تست می‌رویم. می‌دانیم $\log a = ۳/۶۴$، برای این‌که تعداد ارقام عدد $a^{۳}$ را به‌دست آوریم، باید قسمت صحیح مقدار لگاریتم $a^{۳}$ را در مبنای ۱۰، مشخص کنیم. داریم:

$$\log a = ۳/۶۴ \Rightarrow \log a^{۳} = ۳\log a = ۳(۳/۶۴) = ۱۰/۹۲ \Rightarrow \text{قسمت صحیح} = ۱۰$$

حال تعداد ارقام عدد $a^{۳}$، یک واحد بیش‌تر از قسمت صحیحِ مقدار $\log a^{۳}$، یعنی $۱۰ + ۱ = ۱۱$ رقم است.

---

(۳) - ۱۶۹

$$\log \frac{۱۰۰}{a} = ۴/۱۲۴ \Rightarrow \cancel{\log ۱۰^{۲}}^{\,۲} - \log a = ۴/۱۲۴ \Rightarrow -\log a = ۲/۱۲۴ \Rightarrow \log a = -۲/۱۲۴$$

می‌دانیم اگر جواب لگاریتم اعشاری عددی منفی باشد، این عدد بین صفر و یک بوده (یعنی این عدد، عددی اعشاری است) و به ازای قدرمطلق قسمت صحیح این جواب منفی، صفر در جلوی ممیز اعشاری این عددِ بین صفر و یک قرار دارد. پس برای پی بردن به این که عدد $a^{۵}$ بعد از ممیز چند صفر کنار هم دارد، باید جواب لگاریتم اعشاری عدد $a^{۵}$ (که قطعاً منفی است) را محاسبه کرده و قدرمطلق قسمت صحیح جواب لگاریتم آن را به دست آوریم. داریم:

$$\log a^{۵} = ۵\log a = ۵(-۲/۱۲۴) = -۱۰/\cdots \xrightarrow[\text{جواب } \log a^{۵}]{\text{قدرمطلق قسمت صحیح}} |-۱۰| = ۱۰$$

پس عدد $a^{۵}$، ۱۰ صفر کنار هم در جلوی ممیز اعشاری دارد.

---

(۱) - ۱۷۰

$$\log \sqrt{a} = -۱/۰۷۴ \Rightarrow \log a^{\frac{۱}{۲}} = -۱/۰۷۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log a = -۱/۰۷۴ \Rightarrow \log a = -۲/۱۴۸$$

$$\log a^{۳} = ۳\log a = ۳(-۲/۱۴۸) = -۶/۴۴۴$$

$$\Rightarrow \text{تعداد صفرهای جلوی ممیز در کنار هم عدد } a^{۳} = |\text{قسمت صحیح جواب لگاریتم اعشاری}| = |-۶| = ۶$$

---

(۴) - ۱۷۱ برای پی بردن به تعداد ارقام عدد $۵^{۱۸}$، لگاریتم اعشاری (مبنای ۱۰) آن را به‌دست می‌آوریم. سپس به قسمت صحیح جواب، یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$\log ۵^{۱۸} = ۱۸\log ۵ \xlongequal{\log ۵ = ۱ - \log ۲} ۱۸(۱ - \underset{}{\overset{۰/۳۰۱}{\log ۲}}) = ۱۸ \times ۰/۶۹۹ = \underbrace{۱۲}_{\text{قسمت صحیح}}/۵۸۲ \Rightarrow \text{تعداد ارقام} = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

برای محاسبه‌ی سریع‌تر قسمت صحیح جواب می‌توانیم با تقریب خوبی ۰/۶۹۹ را ۰/۷ در نظر بگیریم، دقت کنیم:

$$۱۸ \times ۰/۷ = \overset{\text{قسمت صحیح}}{۱۲}/۶ \Rightarrow \text{تعداد ارقام} = ۱۲ + ۱ = ۱۳$$

۱۷۲- (۲)

$$(e^x+۳)^۲-۲۵=۰ \Rightarrow (e^x+۳)^۲=۲۵=۵^۲ \xrightarrow{x^۲=y^۲\Rightarrow x=\pm y} \begin{cases} e^x+۳=۵ \Rightarrow e^x=۲ \xrightarrow{\ln} x=\ln ۲ \\ e^x+۳=-۵ \Rightarrow e^x=-۸ \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی فوق تنها دارای یک ریشه حقیقی است.

۱۷۳- (۲) چون حاصل‌ضرب دو عبارت برابر صفر است، پس تک‌تک آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$(e^x-۷)(e^{۲x}+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} e^x-۷=۰ \\ e^{۲x}+۶=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x=۷ \xrightarrow{\ln} x=\ln ۷ \\ e^{۲x}=-۶ \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

۱۷۴- (۱) ابتدا دو طرف تساوی را تبدیل به دو عبارت نمایی با توان ۳ می‌کنیم. سپس ادعا می‌کنیم، پایه‌ها نیز باید مساوی باشند (چون توان فرد است این ادعا درست است). در نتیجه داریم:

$$(e^x+۳)^۳=۱۲۵=۵^۳ \Rightarrow e^x+۳=۵ \Rightarrow e^x=۲ \xrightarrow{\ln} \ln e^{x}=\ln ۲ \Rightarrow x\underbrace{\ln e}_{۱}=\ln ۲ \Rightarrow x=\ln ۲$$

۱۷۵- (۳)

$$۳^x=۲^{۱-x} \Rightarrow ۳^x=\frac{۲^۱}{۲^x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} ۳^x\times ۲^x=۲^۱ \Rightarrow ۶^x=۲ \xrightarrow{\log_۶} x=\log_۶ ۲$$

۱۷۶- (۳) برای حل معادله‌ی $|e^{۳x}-۱|=|۲e^{۳x}-۵|$، ابتدا کافی است با استفاده از قاعده‌ی $\boxed{|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y}$، قدرمطلق‌ها را برداریم:

$$|e^{۳x}-۱|=|۲e^{۳x}-۵| \Rightarrow e^{۳x}-۱=\pm(۲e^{۳x}-۵)=\begin{cases} e^{۳x}=۴ \xrightarrow{\ln} \ln e^{۳x}=\ln ۴ \Rightarrow ۳x=\ln ۴ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ln ۴ \\ ۳e^{۳x}=۶ \Rightarrow e^{۳x}=۲ \xrightarrow{\ln} \ln e^{۳x}=\ln ۲ \Rightarrow ۳x=\ln ۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\ln ۲ \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی صورت تست، دارای دو ریشه است.

۱۷۷- (۳) می‌دانیم $e^{\ln x}=x$ است. پس برای محاسبه‌ی حاصل $e^{\ln x}$، کافی است x را از حل معادله‌ی نمایی $\frac{e^{۲x}-۳}{e^{۲x}-۱}=۵$، به عنوان جواب تست معرفی کنیم. داریم:

$$\frac{e^{۲x}-۳}{e^{۲x}-۱}=۵ \Rightarrow e^{۲x}-۳=۵e^{۲x}-۵ \Rightarrow ۴e^{۲x}=۲ \Rightarrow e^{۲x}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\ln} \ln e^{۲x}=\ln\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x=\ln\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱}{۲}$$

۱۷۸- (۲) در معادله‌ی $۲e^{۲x}+۵e^x-۳=۰$، اگر e^x را t درنظر بگیریم (روش تغییر متغیر)، شکل معادله به صورت یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که با حل آن، مقدار e^x به دست می‌آید. داریم:

$$۲\overset{(e^x)^۲}{e^{۲x}}+۵e^x-۳=۰ \xrightarrow{e^x=t} ۲t^۲+۵t-۳=۰ \Rightarrow t=\frac{-۵\pm\sqrt{۴۹}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} t=-۳ \\ t=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x=-۳ \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} (\text{غ‌ق‌ق}) \\ e^x=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\ln} x=\ln\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱۷۹- (۳)

$$e^{۲x+۱}-۵e^{x+۱}=۶e \Rightarrow e^{۲x}\times e-۵e^x\times e=۶e \xrightarrow{\div e} e^{۲x}-۵e^x-۶=۰ \Rightarrow (e^x)^۲-۵e^x-۶=۰$$

$$\xrightarrow{e^x=t} t^۲-۵t-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=e^x=-۱ \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} (\text{غ‌ق‌ق}) \\ t=e^x=۶ \xrightarrow{\ln} x=\ln ۶ \end{cases}$$
