حل تمرینات گسسته صفحه ۸

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم علامت باشند داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \xleftrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x^2+y^2}{yx}\geq 2 \xleftrightarrow[xy>0]{\times(xy)} x^2+y^2\geq 2xy \Longleftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \xleftrightarrow{\text{تجزیه اتحاد مربع}} (x-y)^2\geq 0 \quad \checkmark$$

این گزاره همواره درست است و همه روابط برگشت‌پذیر هستند پس حکم ما برقرار است و $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$$

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \xleftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx \Longleftrightarrow$$

$$x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2yz-2zx\geq 0 \xleftrightarrow{\text{اتحاد مربع}}$$

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0 \quad \checkmark$$

این گزاره همواره درست است زیرا مجموع سه عبارت نامنفی همواره نامنفی است و همه روابط هم برگشت پذیر هستند پس حکم ما برقرار است.

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$$

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y \xleftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y \Longleftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2xy-2x-2y\geq 0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\geq 0 \xleftrightarrow{\text{تجزیه اتحاد مربع}} (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0 \quad \checkmark$$

این گزاره همواره درست است زیرا جمع سه عبارت نامنفی همواره نامنفی می‌شود و همه روابط برگشت پذیر هستند پس حکم ما برقرار است.

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری که $x^۳ < x^۲$.

اگر $x=\frac{1}{2}$ در نظر بگیریم

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$$

x می‌تواند هر عددی بین ۰ و ۱ و همینطور تمام اعداد منفی باشد. $x\in(0,1)\cup(-\infty,0)$

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ گنگ هستند.

① ابتدا ثابت می‌کنیم $\alpha-\beta$ گنگ است. با برهان خلف فرض می‌کنیم که $\alpha-\beta$ گنگ نباشد یعنی گویا باشد پس $\alpha-\beta=\frac{p}{q}$ که $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$

طرفین را با 2β جمع می‌کنیم:

$$\alpha-\beta+2\beta=\frac{p}{q}+2\beta \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{p}{q}+2\beta \Rightarrow \alpha+\beta-\frac{p}{q}=2\beta$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{گویا}}\Big(\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{گویا}}-\underbrace{\frac{p}{q}}_{\text{گویا}}\Big)=\underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}$$

حاصل سمت چپ مساوی گویاست و سمت راست مساوی β است که طبق فرض مسئله گنگ است. پس این خلاف فرض اصلی مسئله است و فرض خلف ما باطل است و $\alpha-\beta$ گنگ است

۲) حال ثابت می‌کنیم $\alpha+2\beta$ گنگ است. با برهان خلف فرض می‌کنیم گویا باشد یعنی $\alpha+2\beta=\frac{p}{q}$ که $p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0$

حالا طرفین را $-\beta$ می‌کنیم:

$$\alpha+2\beta=\frac{p}{q} \Longrightarrow \alpha+2\beta-\beta=\frac{p}{q}-\beta \Longrightarrow (\alpha+\beta)=\frac{p}{q}-\beta \Longrightarrow \underset{\text{گنگ}}{\beta}=\underset{\text{گویا}}{\frac{p}{q}}-\underset{\text{گویا}}{(\alpha+\beta)}$$

طبق فرض اصلی خود مسئله β گنگ است و در اینجا β برابر با عبارتی گویا شده است که این برخلاف فرض اصلی مسئله می‌باشد پس فرض خلف باطل است و $\alpha+2\beta$ گنگ است.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که

$$x^2+y^2=(x+y)^2$$

$$x^2+y^2=x^2+\underbrace{2xy}_{0}+y^2$$

x و y باید طوری انتخاب شوند که $2xy=0$ در این صورت کافی است $x=0$ یا $y=0$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (a+b\neq 0)$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab} \Longrightarrow (a+b)^2=ab \Longrightarrow a^2+b^2+2ab=ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0$$

عبارتی که نوشته شد هیچگاه برابر با صفر نمی‌شود و ریشه ندارد. (چرا؟) اگر a را مجهول معادله درجه ۲ فرض کنیم:

معادله درجه ۲: $ax^2+bx+c=0$

$$\underset{a}{1}a^2+\underset{b}{b}a+\underset{c}{b^2}=0 \Longrightarrow \Delta=b^2-4(1)b^2=b^2-4b^2=-3b^2<0$$

پس $\Delta<0$ و این معادله جواب ندارد پس یعنی a,b حقیقی و ناصفر وجود ندارند که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

① مربع هر عدد فرد عددی فرد است. فرض: x عددی فرد حکم: x^2 عددی فرد

$$x=2k-1 \Longrightarrow x^2=(2k-1)^2 \Longrightarrow x^2=4k^2-4k+1 \Longrightarrow x^2=2(\underbrace{2k^2-2k}_{k'})+1=2k'+1 \longrightarrow \text{عددی فرد} \checkmark$$

② مکعب هر عدد فرد عددی فرد است. فرض: x عددی فرد $x=2k-1$ حکم: x^3 عددی فرد است.

$$x=2k-1 \Longrightarrow x^3=(2k-1)^3=(2k)^3+3(4k^2)(-1)+3(2k)(-1)^2+(-1)^3=8k^3-6k^2+6k-1=2(\overbrace{4k^3-3k^2+3k}^{k'})-1$$
$$=2k'-1 \rightarrow \text{عددی فرد} \checkmark$$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. پنج عدد طبیعی متوالی را n ، $n+1$ ، $\underset{}{\overset{\text{وسطی}}{n+2}}$ ، $n+3$ ، $n+4$ در نظر می‌گیریم

$$\text{میانگین}=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)}{5}=\frac{5n+10}{5}=\frac{\cancel{5}(n+2)}{\cancel{5}}=n+2 \longrightarrow \text{عدد وسطی}$$

با احترام
غلامی پور