حسابان ۲

پایه ی دوازدهم « رشته ی ریاضی و فیزیک »

فصل ۲ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@amerimath

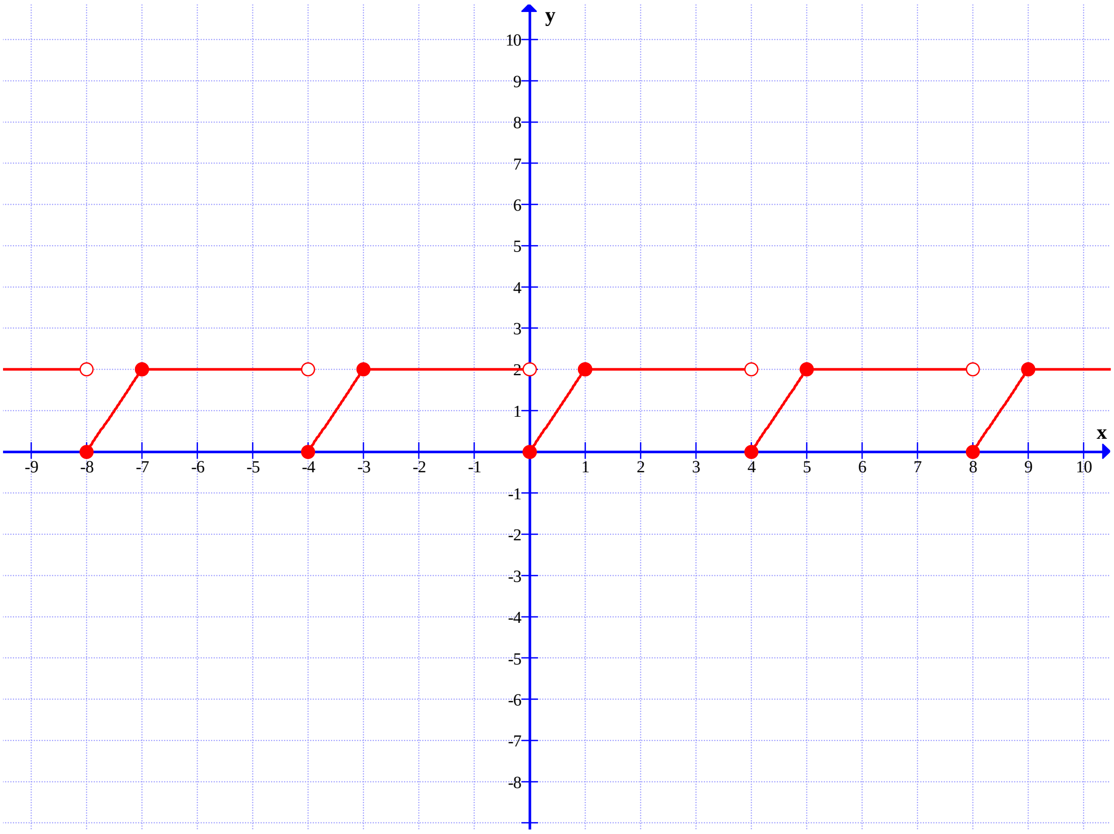
مهر ۱۴۰۱

درس اوّل : توابع متناوب و دوره‌ی تناوب

در این درس با مفهوم تناوب و توابع متناوب آشنا می شوید و در ادامـه دوره‌ی تنـاوب را تعریـف مـی کنـیم. سپس روش های تعیین دوره‌ی تناوب برخی از توابع را نیز بیان می کنیم.

تابع متناوب

به نمودار تابع زیر توجه کنید.



همانطور که مشاهده می کنید. قطعه ای از نمودار این تابع در فواصل معینی تکرار می شود.

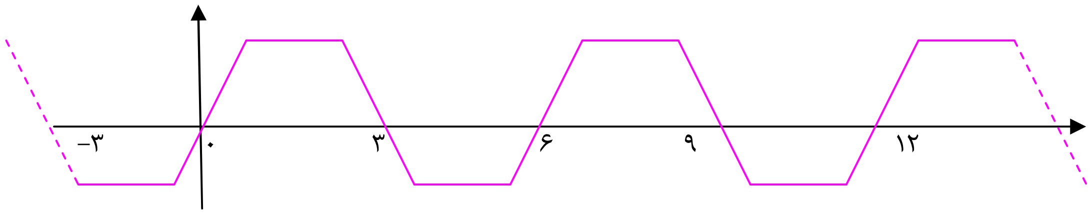
می توان گفت که نمودار تابع در فواصل به طول۴ و در فواصل به طول ۸ واحدی و ... تکرار می شود.

این چنین توابعی را توابع **متناوب** می نامند. طول کوچکترین فاصله‌ای که نمودار تابع در آن تکرار می شود را **دوره‌ی تناوب** (دوره‌ی تناوب اصلی) می نامند و آن را با T نمایش می دهند. در تابع فوق دوره‌ی تناوب برابر۴ است.

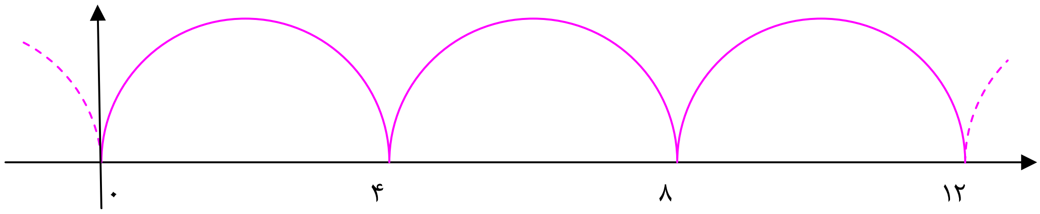
با این دیدگاه به نظر شما مقدار $f(۲۱)$ چند است؟

تمرین ۱: توابع زیر متناوب هستند. دوره‌ی تناوب هر یک را تعیین کنید.

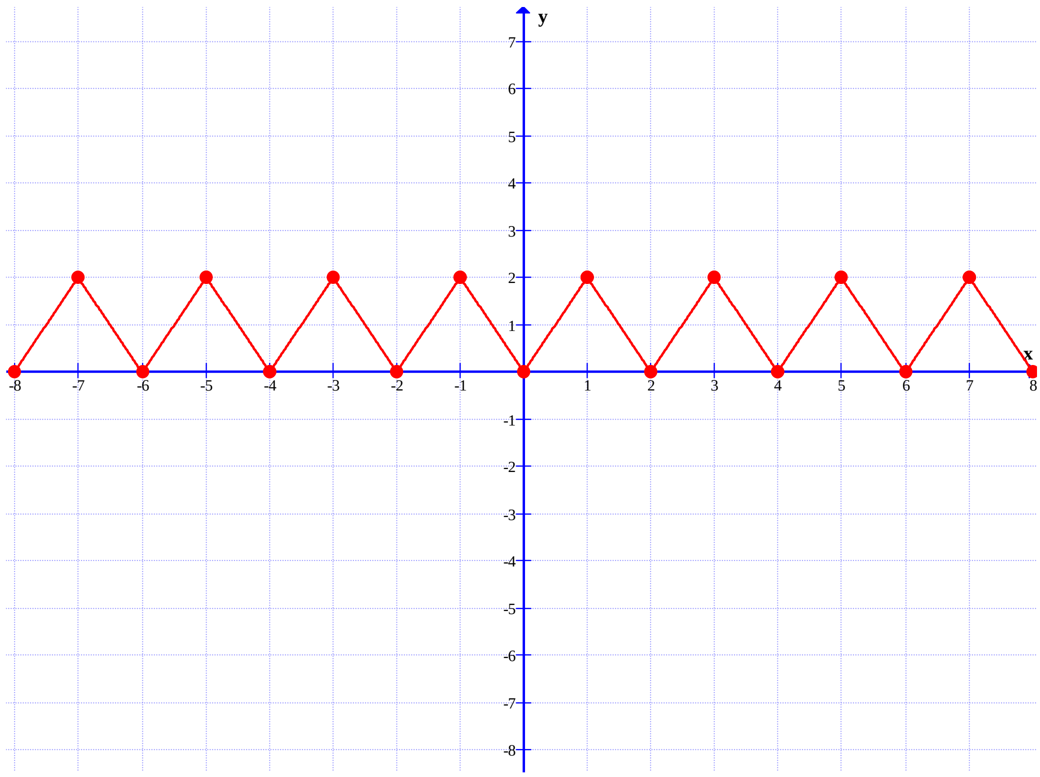
(الف)



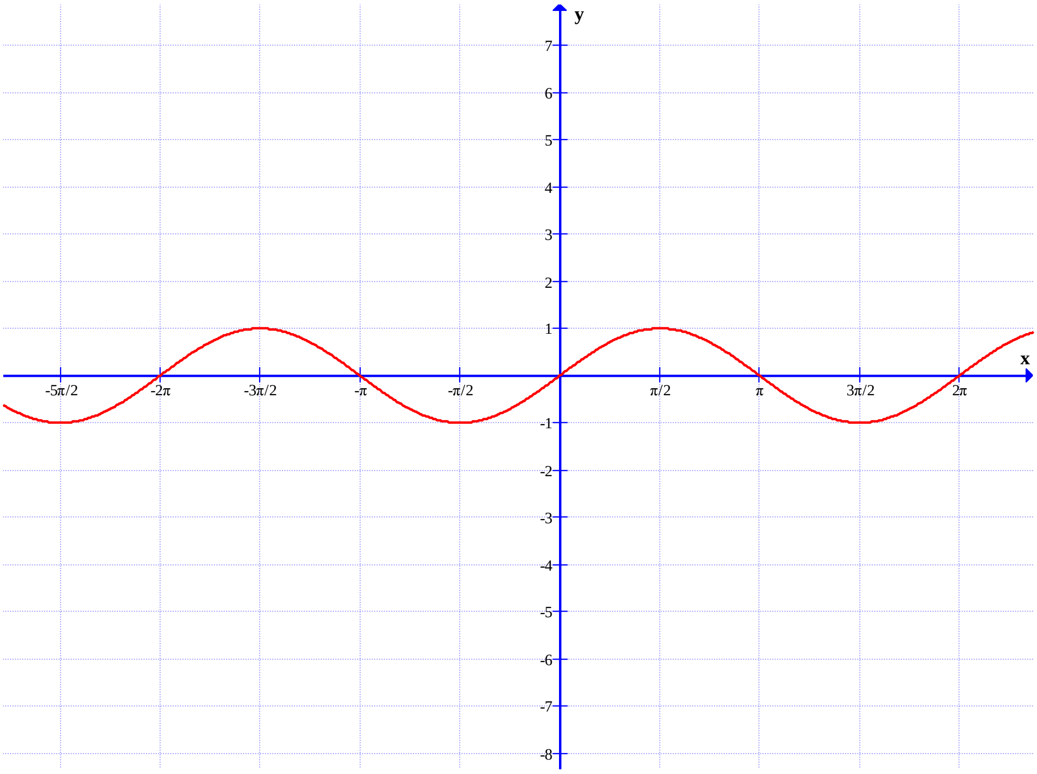
(ب)



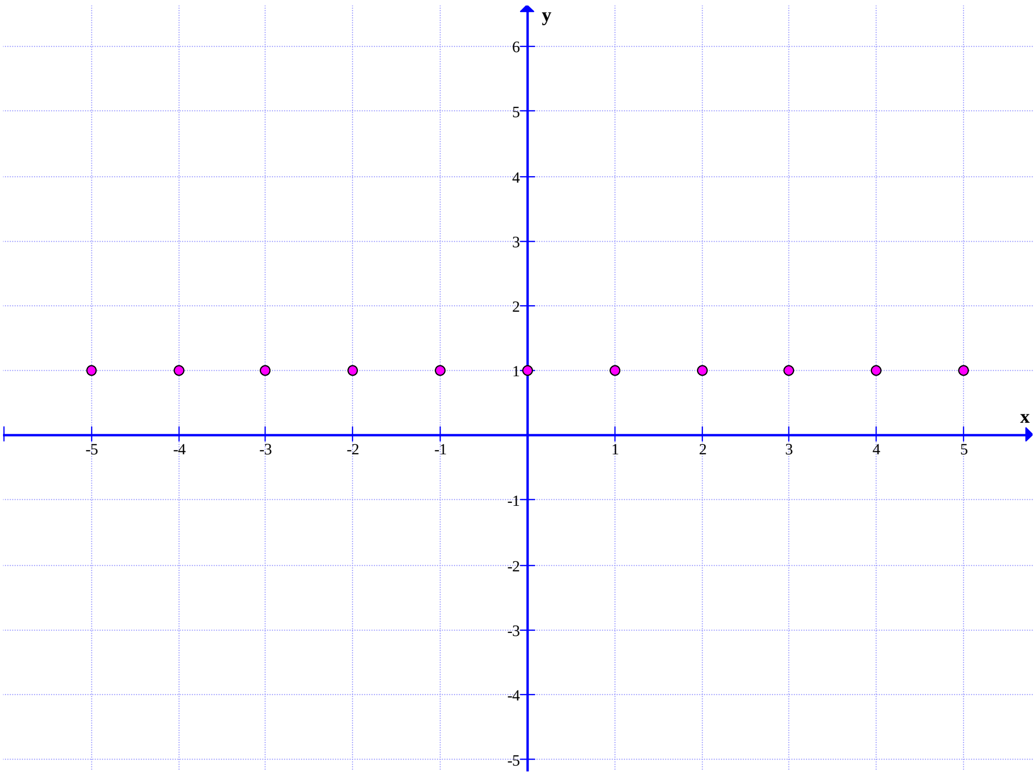
(پ)



(ت)



(ث)



توجه : تابع ثابت به معادله‌ی $y = k$ ، متناوب است ولی دوره‌ی تناوب اصلی ندارد.

تمرین۲ : به کمک رسم نمودار ثابت کنید که تابع $f(x)=\sin x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

نتیجه : در واقع تابع متناوب، تابعی است که در فواصل معینی، قطعه ای از نمودار آن تکرار می شود و دوره‌ی تناوب آن، کوچکترین طول بازه ای است که در آن، نمودار تابع تکرار می گردد.

اکنون تابع متناوب را به شکل زیر تعریف می کنیم.

اگر تابع $y=f(x)$ دو شرط زیر را داشته باشد، آن را **متناوب** گویند.

الف) هرگاه عدد مثبتی مانند c وجود داشته باشد، به طوری که وقتی x عضو دامنه باشد، آنگاه $x+c$ نیز عضو دامنه است.

$$x\in D_f \xrightarrow{\exists c>0} (x+c)\in D_f$$

ب) $f(x+c)=f(x)$

در این صورت کمترین مقدار مثبت c را با T نمایش می دهیم و آن را **دوره‌ی تناوب** (دوره‌ی تناوب اصلی) می نامیم.

مثال : نشان دهید که توابع زیر متناوب هستند.

الف) $f(x)=\sin x$ ب) $f(x)=\cos x$

حل :

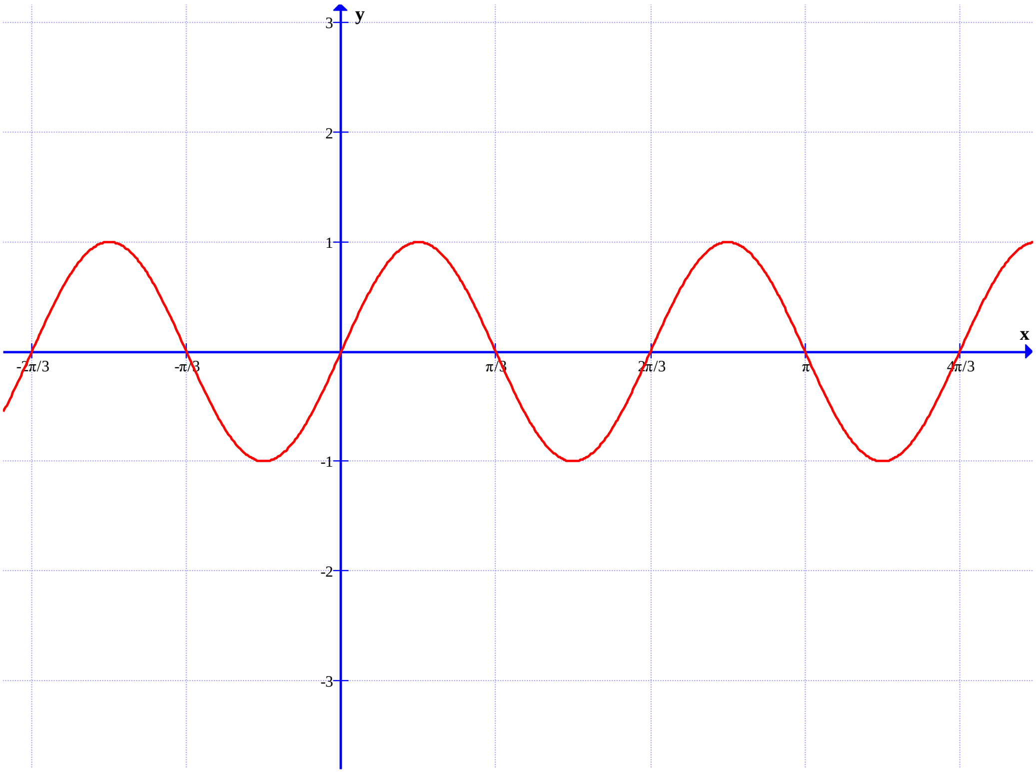
الف : واضح است که برای هر عدد صحیح k تساوی $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ برقرار است. لذا می توان نوشت $f(2k\pi+x)=f(x)$

پس طبق تعریف، این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن به ازای $k=1$ برابر $T=2\pi$ است.

ب : واضح است که برای هر عدد صحیح k تساوی $\cos(2k\pi+x)=\cos x$ برقرار است. لذا می توان نوشت $f(2k\pi+x)=f(x)$

پس طبق تعریف این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن به ازای $k=1$ برابر $T=2\pi$ است.

تمرین۳ : در زیر نمودار تابع $f(x)=\sin 3x$ را رسم شده است. دوره‌ی تناوب آن را به کمک نمودار تعیین کنید.



***

تمرین ۴ :

الف : ثابت کنید که تابع $f(x)=2\sin x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

ب : مقدار ماگزیمم و می نیمم این تابع را تعیین کنید.

تمرین ۵ :

الف : ثابت کنید که تابع $f(x)=\cos 2x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

ب : مقدار ماگزیمم و می نیمم این تابع را تعیین کنید.

توجه : برای توابع $f(x)=a\sin bx+c$ و $f(x)=a\cos bx+c$ می توان گفت که :

الف : مقدار ماگزیمم برابر $|a|+c$ ب : مقدار می نیمم برابر $-|a|+c$

پ : دوره‌ی تناوب برابر $T=\dfrac{2\pi}{|b|}$

مثال : مقدار ماگزیمم و مقدار می نیمم و دوره‌ی تناوب تابع به معادله‌ی $f(x)=-3\cos 2x+5$ را تعیین کنید.

حل :

مقدار ماگزیمم $\max(f)=|a|+c=|-۳|+۵=۸$

مقدار می نیمم $\min(f)=-|a|+c=-|-۳|+۵=۲$

دوره‌ی تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi$

مثال: دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=۸\sin^۲ x+۱$$

حل :

$$f(x)=۸\sin^۲ x+۱=۸(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos ۲x)+۱=-۴\cos ۲x+۵$$

مقدار ماگزیمم $\max(f)=|a|+c=|-۴|+۵=۹$

مقدار می نیمم $\min(f)=-|a|+c=-|-۴|+۵=۱$

دوره‌ی تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi$

مثال: معادله‌ی یک تابع سینوسی را بنویسید که مقدار ماگزیمم آن ۱- و مقـدار مـی نـیمم آن ۷- و دوره‌ی تناوب آن ۴π باشد.

حل :

$f(x)=a\sin bx+c$ مقدار ماگزیمم $|a|+c=-۱$ مقدار می نیمم $-|a|+c=-۷$

با توجه به دو تساوی فوق می توان نتیجه گرفت که $۲c=-۸$ پس $c=-۴$ لذا :

$$|a|-۴=-۱\rightarrow |a|=۳\rightarrow a=\pm ۳$$

دوره‌ی تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$f(x)=۳\sin\frac{۱}{۲}x-۴$ یا $f(x)=-۳\sin\frac{۱}{۲}x-۴$

توجه : برای نوشتن معادله‌ی توابع مثلثاتی به صورت

$$f(x)=a\sin bx+c \quad \text{یا} \quad f(x)=a\cos bx+c$$

وقتی که مقدار ماگزیمم و مقدار می نیمم و دوره‌ی تناوب معلوم باشد. می توان گفت که :

الف : مقدار b را مثبت قرار می دهیم و $b=\frac{۲\pi}{T}$

ب : $a=\pm\frac{\max(f)-\min(f)}{۲}$

ج : $c=\frac{\max(f)+\min(f)}{۲}$

مثال: معادله‌ی یک تابع سینوسی را بنویسید که مقدار ماگزیمم آن ۱− و مقدار می نیمم آن ۷− و دوره‌ی تناوب آن ۴π باشد.

حل :

$$a=\pm\frac{\max(f)-\min(f)}{۲}=\pm\frac{-۱-(-۷)}{۲}=\pm۳$$

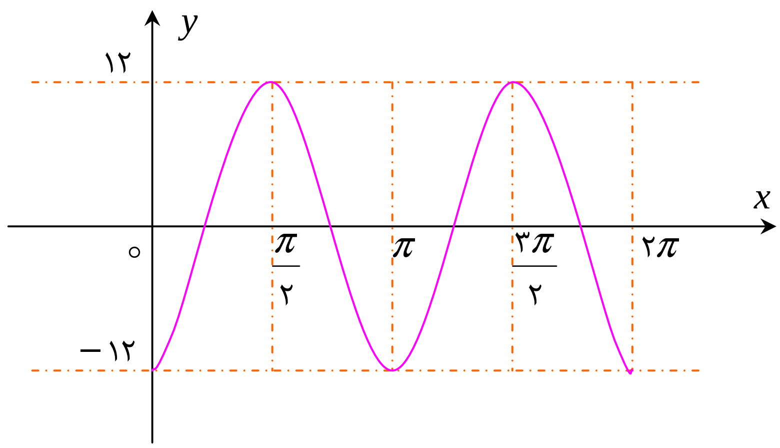
$$b=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲}$$

$$c=\frac{\max(f)+\min(f)}{۲}=\frac{-۱+(-۷)}{۲}=-۴$$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$$f(x)=۳\sin\frac{۱}{۲}x-۴ \quad \text{یا} \quad f(x)=-۳\sin\frac{۱}{۲}x-۴$$

مثال : معادله‌ی یک تابع (سینوسی یا کسینوسی) برای نمودار زیر بنویسید.



حل : بدون در نظر گرفتن انتقال، این تابع می تواند یک تابع کسینوسی باشد و معادله‌ی آن به صورت $y = a\cos bx + c$ خواهد بود. از طرفی با توجه شکل معلوم است که دوره‌ی تناوب تابع برابر $T = \pi$ است. از طرفی برای این تابع $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است. پس

$$\frac{۲\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = ۲ \rightarrow b = \pm ۲$$

برای تعیین مقدار a کافی است مختصات یک نقطه از نمودار تابع را در معادله‌ی فوق، جایگزین کنیم. در این جا می توان، نقطه‌ی $(۰,-۱۲)$ را در نظر گرفت.

$$y = a\cos bx \xrightarrow{(۰,-۱۲)} -۱۲ = a\cos b(۰) \rightarrow -۱۲ = a \times ۱ \rightarrow a = -۱۲$$

در نهایت معادله‌ی تابع را بدین شکل خواهیم داشت.

$$y = -۱۲\cos ۲x$$

توجه : به دلیل متقارن بودن نقاط ماگزیمم و می نیمم این تابع، معلوم می شود که تابع انتقال عمودی ندارد و لذا $c = ۰$ می باشد.

روش دوّم : بدون در نظر گرفتن انتقال، این تابع می تواند یک تـابع کـسینوسی باشـد و معادلـه‌ی آن بـه صورت $y = a\cos bx + c$ خواهد بود

$$a = \pm\frac{\max(f) - \min(f)}{۲} = \pm\frac{۱۲ - (-۱۲)}{۲} = \pm ۱۲$$

$$b = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$

$$c = \frac{\max(f) + \min(f)}{۲} = \frac{۱۲ + (-۱۲)}{۲} = ۰$$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$f(x) = ۱۲\cos ۲x$ یا $f(x) = -۱۲\cos ۲x$

امّا چون نمودار تابع از نقطه‌ی $(۰,-۱۲)$ می گذرد، پس فقط معادلـه‌ی تـابع $f(x) = -۱۲\cos ۲x$ قابـل قبول است.

تمرین برای حل :

۶ : دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $y=۳\sin(۲x)-۲$

۲) $y=\pi\sin(-x)+۱$

۳) $y=-\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

۴) $y=۸\cos(\frac{x}{۳})$

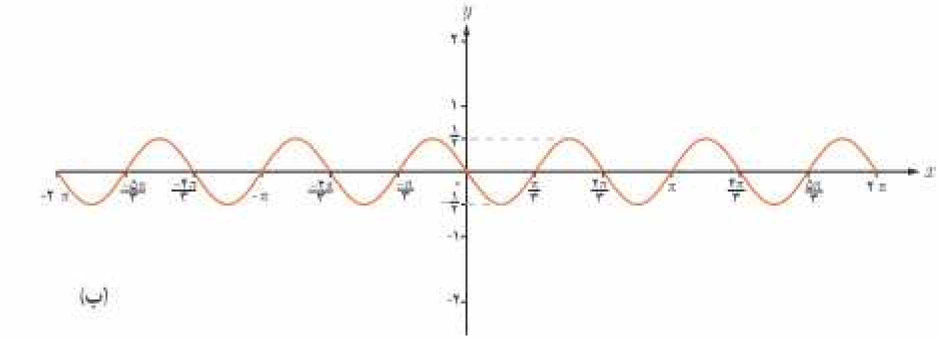
۵) $y=۱+۲\sin ۷x$

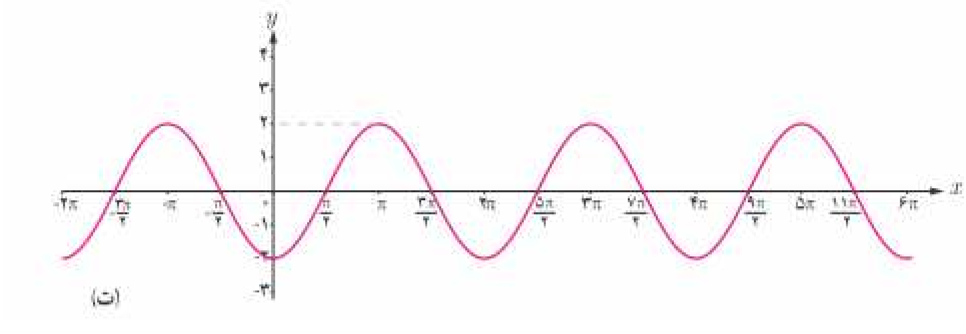
۶) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$

۷) $y=-\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$

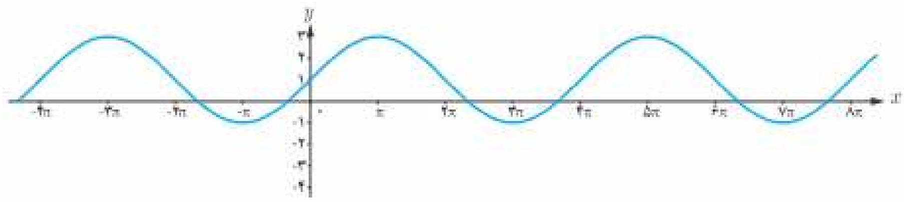
۸) $y=-\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

۷ : معادله‌ی یک تابع (سینوسی یا کسینوسی) متناظر با هر یک از نمودار های زیر بنویسید.

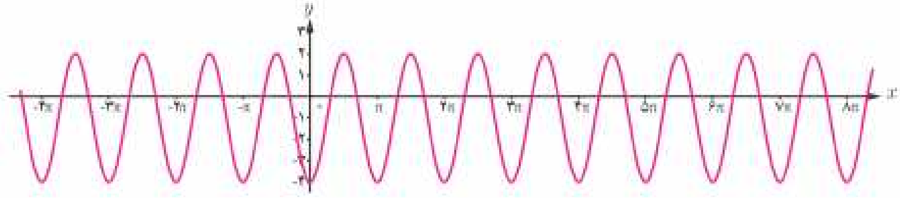




الف)



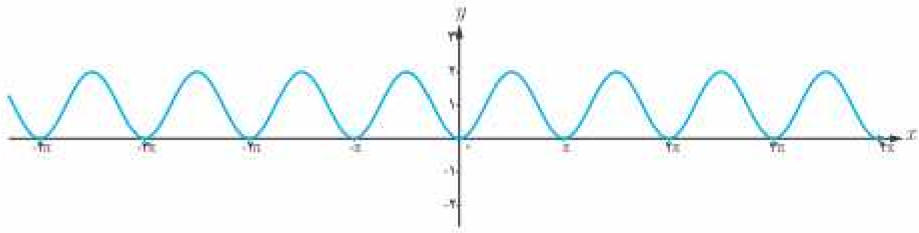
ب)



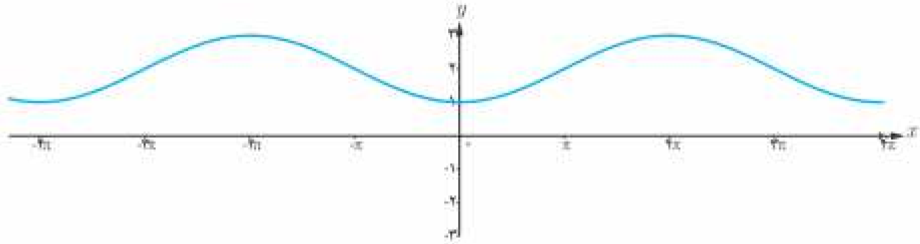
۸ : هر یک از توابع زیر را به یکی از نمودار های داده شده نظیر کنید.

الف) $y=\sin \pi x$ ب) $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y=\sin ۲x$ ت) $y=۱-\cos ۲x$

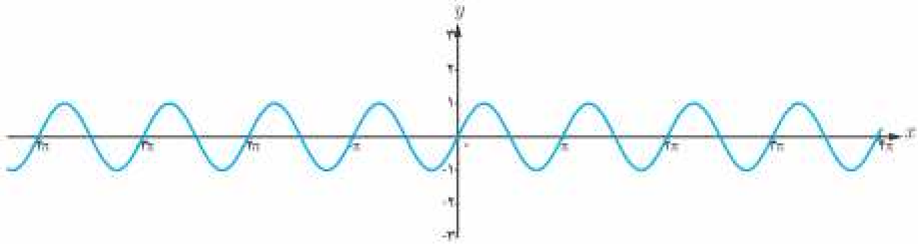
۱)



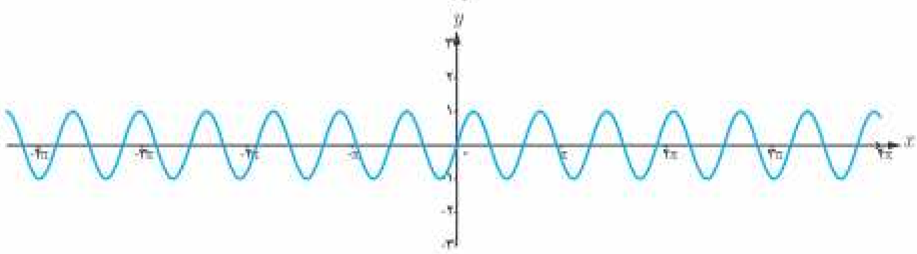
۲)



۳)



۴)



۹ : برای هر مورد تمام توابع مثلثاتی را معرفی کنید که مشخصات داده شده را داشته باشند.

الف) $T=\pi$ و $\max=۳$ و $\min=-۳$

ب) $T=۳$ و $\max=۹$ و $\min=۳$

پ) $T=۴\pi$ و $\max=-۱$ و $\min=-۷$

ت) $T=\frac{\pi}{۲}$ و $\max=۱$ و $\min=-۱$

۱۰ : دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=۱+۵\sin\frac{۳x}{m+۱}$ برابر ۵π است. مقدار m را بیابید.

۱۱ : اگر دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=۳\cos kx+۷$ برابر $\frac{\pi}{۴}$ است. مقدار $f(۰)$ را بیابید.

۱۲ : مقادیر ماکزیمم و می نیمم و دوره‌ی تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=-۱۰\cos^{۲}x+۱$

ب) $f(x)=۱۰\sin x\cos x-۳$

ج) $f(x)=\cos^{۲}۳x-\sin^{۲}۳x+۵$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی:

@amerimath

سایت :

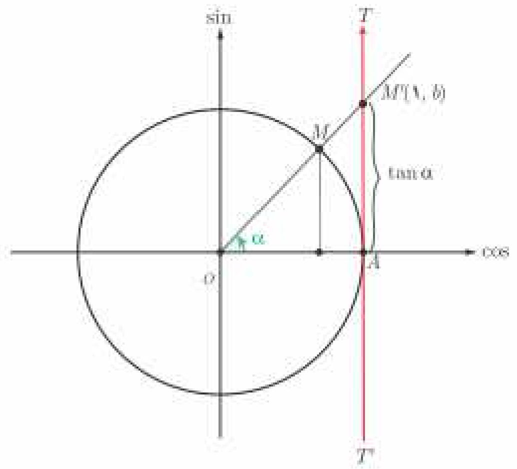
www.mathtower.ir

درس دوّم : تابع تانژانت

در سال گذشته با توابع سینوس و کسینوس و خواص آنها آشنا شده اید. در این درس تابع تانژانت را معرفی و ویژگی های آن را بیان می کنیم.

تابع تانژانت

دایره‌ی مثلثاتی روبرو را در نظر بگیرید. در این دایره خط $T'AT$ در نقطه‌ی A بر محور کسینوس ها عمود است. اگر نقطه‌ی A مبدأ این محور و جهت آن از پایین به بالا فرض شود، طبق تعریف تانژانت می دانیم که $\tan(\alpha) = AM'$ و با توجه به مختصات نقطه‌ی M' می توان نوشت: $\tan(\alpha) = b$



با این دید می توان گفت که با تغییر زاویه‌ی α مقدار $\tan(\alpha)$ نیز تغییر می کند. پس نتیجه گرفته می شود که $f(x) = \tan(x)$ تابعی از زاویه‌ی x است. این تابع را **تابع تانژانت** می نامند. تابع تانژانت دارای ویژگی های زیر است.

الف : اگر زاویه‌ی α در ربع اوّل یا سوّم باشد، مقدار تابع مثبت است.

ب : اگر زاویه‌ی α در ربع دوّم یا چهارم باشد، مقدار تابع منفی است.

ج : اگر زاویه‌ی α برابر صفر یا π رادیان باشد، مقدار تابع صفر است.

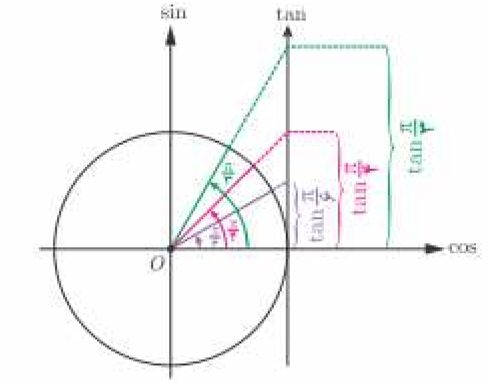
د : تابع در نقاط $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نمی شود. به طور کلی دامنه و برد تابع تانژانت به شکل زیر است.

$$D_f = \{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \ , \ k \in Z\}$$
$$R_f = R$$

و : چون $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ پس این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن $T = \pi$ می باشد.

به طور کلی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = a\tan(bx) + c$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

تغییرات تانژانت



با افزایش مقدار α در ربع اوّل مقدار تابع افزایش می یابـد. بـا نزدیک شدن مقدار α به $\frac{\pi}{۲}$ مقدار تابع زیاد و زیادتر می شود.

تمرین ۱ : با افزایش مقدار α در ربع های دوّم و سوّم و چهارم، روند تغییر مقدار تابع $f(x)=\tan(\alpha)$ را بررسی کنید.

تمرین ۲ : نمودار تابع $f(x)=\tan(\alpha)$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

نتیجه : تابع تانژانت در یک دوره‌ی تناوب محصور بین مضرب های متوالی $\frac{\pi}{۲}$ اکیداً صعودی اسـت. امّـا در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی می باشد.

تمرین ۳ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف : تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب : می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی است.

پ : تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

ت : اگر α زاویه ای در ربع اوّل دایره‌ی مثلثاتی باشد، در این صورت $\tan(\alpha)<\sin(\alpha)$

حل :

الف : نادرست   ب : نادرست   پ : درست   ت : نادرست

تمرین برای حل :

۴ : دامنه‌ی تابع $f(x)=\tan ۲x$ را تعیین کنید.

***

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

در این قسمت در پی آن هستیم رابطه هایی برای محاسبه‌ی تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه بیان کنیم. به کمک روابطی که در سال گذشته برای سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو زاویه داشتیم می توان نوشت:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$$

همچنین

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{۱-\tan\alpha.\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$$

لذا خواهیم داشت:

الف) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$ ب) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$

مثال : تانژانت زاویه‌ی ۷۵ درجه را حساب کنید.

حل :

$$\tan ۷۵^\circ=\tan(۳۰+۴۵)=\frac{\tan ۳۰+\tan ۴۵}{۱-\tan ۳۰\times\tan ۴۵}=\frac{\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}+۱}{۱-(\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۱)}=\frac{\dfrac{۳+\sqrt{۳}}{۳}}{\dfrac{۳-\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$$

تمرین برای حل :

۵ : تانژانت زاویه‌ی ۱۵درجه را حساب کنید.

۶ : اگر $\tan(a+b)=۲$ و $\tan(a-b)=۳$ باشد. مقدار $\tan(۲a)$ را به دست آورید.

***

درس سوّم : معادلات مثلثاتی

در این درس به تعریف ، بررسی و حل معادلات مثلثاتی می پردازیم و به کاربردهایی برای آنها نیز اشاره مـی کنیم.

معادله‌ی مثلثاتی

هر معادله که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله‌ی مثلثاتی می نامند. در هر معادله‌ی مثلثاتی، اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه‌ی مجهول را داریم و منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی، یافتن زاویه یا زاویه هایی است که به ازاء آنها تساوی برقرار باشد. به مثال های زیر از یک معادله‌ی جبری و معادله‌ی مثلثاتی توجه کنید.

الف : معادله‌ی جبری

$۲x-۱=۰$

حل :

$۲x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

ب : معادله‌ی مثلثاتی

$۲\sin x-۱=۰$

حل :

$۲\sin x=۱ \rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}$

بیشمار زاویه وجود دارند که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ می شود. ولی کوچکترین زاویه‌ی مثبت از بین آنها $\frac{\pi}{۶}$ است.

برای تعیین زاویه های دیگر می نویسیم.

$$\xrightarrow{\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}} \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

این جواب را جواب عمومی معادله می نامند که در آن k یک عدد صحیح است. در واقع با اختیار مقداری برای k یک جواب خاص برای معادله‌ی مثلثاتی به دست می آید.

برای حل هر معادله‌ی مثلثاتی باید ابتدا با انجام عملیاتی[1] آن را به یکی از صورت های زیر تبدیل کرد و جواب عمومی آن را تعیین کرد.

ردیف	صورت معادله	شرط داشتن جواب	یافتن زاویه	جواب عمومی
۱	$\sin(u)=a$	$-۱\le a\le ۱$	$\sin(u)=\sin\alpha$	$u=۲k\pi+\alpha$ $u=(۲k+۱)\pi-\alpha$
۲	$\cos(u)=b$	$-۱\le b\le ۱$	$\cos(u)=\cos\alpha$	$u=۲k\pi+\alpha$ $u=۲k\pi-\alpha$
۳	$\tan(u)=c$	–	$\tan(u)=\tan\alpha$	$u=k\pi+\alpha$
۴	$\cot(u)=d$	–	$\cot(u)=\cot\alpha$	

تذکر: با توجه به این جدول

۱) اگر مقادیر c و a منفی باشد، در فرمول جواب قرینه‌ی زاویه‌ی α را قرار دهید.

۲) اگر مقادیر d و b منفی باشد، در فرمول جواب مکمل زاویه‌ی α را قرار دهید.

۳) α کوچکترین زاویه‌ی غیر منفی است که تساوی به ازاء آن برقرار می باشد و آنرا زاویه‌ی اصلی می نامند.

برای تعیین زاویه‌ی اصلی در صورت وجود می توانید از جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی استـفاده کنیـد و در غیر این صورت می توانید به ذکر α اکتفا کنید.

مثال ۱ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲\sin x-\sqrt{۲}=۰$$

حل :

$$۲\sin x-\sqrt{۲}=۰\rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۴}}\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

مثال ۲ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲\cos x-۱=۰$$

حل :

[1] . رایج ترین این عملیات، استفاده از فرمول های مثلثاتی و فاکتور گیری است. این عملیات به دو منظور بکار می روند.
الف : یکسان سازی نسبت های مثلثاتی　　　　ب : یکسان سازی زاویه‌ی مثلثاتی

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۳}} \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

مثال۳ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\tan x - \sqrt{۳} = ۰$$

حل :

$$\tan x = \sqrt{۳} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۳}} x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

مثال۴ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲\cos x + \sqrt{۳} = ۰$$

حل :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۶}} \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

مثال۵ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۳\tan x + \sqrt{۳} = ۰$$

حل :

$$\tan x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{\alpha = -\frac{\pi}{۶}} x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

مثال۶ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin ۳x - ۱ = ۰$$

حل :

$$\sin ۳x = ۱ \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۲}} \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

مثال۷ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\tan x = \tan ۵x$$

حل :

$$\tan\underbrace{x}_{u}=\tan\underbrace{5x}_{\alpha}\rightarrow x=k\pi+5x\rightarrow -4x=k\pi\rightarrow x=-\frac{k\pi}{4}$$

مثال ۸ : معادله‌ی $\tan 4x.\tan 3x=1$ را حل کنید.

حل:

$$\tan 4x.\tan 3x=1\rightarrow \tan 4x=\frac{1}{\tan 3x}\rightarrow \tan 4x=\cot 3x\rightarrow \tan\underbrace{4x}_{u}=\tan\underbrace{(\frac{\pi}{2}-3x)}_{\alpha}$$

$$\rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}-3x\rightarrow 7x=k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{k\pi}{7}+\frac{\pi}{14}$$

مثال ۹ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})-\cos 2x=0$$

حل :

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\cos 2x\rightarrow \sin\underbrace{(x-\frac{2\pi}{3})}_{u}=\sin\underbrace{(\frac{\pi}{2}-2x)}_{\alpha}$$

لذا می توان نوشت :

$$x-\frac{2\pi}{3}=2k\pi+(\frac{\pi}{2}-2x)\xrightarrow{\times 6}6x-4\pi=12k\pi+3\pi-12x\rightarrow x=(\frac{12k+7}{18})\pi$$

همچنین :

$$x-\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\pi-(\frac{\pi}{2}-2x)$$

$$\xrightarrow{\times 6}6x-4\pi=12k\pi+6\pi-3\pi+12x\rightarrow x=(\frac{12k+7}{-6})\pi$$

مثال ۱۰ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\tan x.\tan 2x=1$$

حل :

$$\tan x.\tan ۲x=۱\to \tan ۲x=\frac{۱}{\tan x}\to \tan ۲x=\cot x\to \tan ۲x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\to ۲x=k\pi+(\frac{\pi}{۲}-x)\to ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

توجه داشته باشید که این معادله به ازای برخی از مقادیر بدست آمده برقرار نیست. مثلاً به ازای $k=۱$ به دست می آید، $x=\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}$ که جواب معادله نیست.

***

حالت های خاص معادلات مثلثاتی

علاوه بر جدول کلی فوق در حل معادلات مثلثاتی می توان از حالت های خاص زیر نیز استفاده نمود.

$\cos(u)=۰\to u=k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$\sin(u)=۱\to u=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$
$\cos(u)=-۱\to u=۲k\pi+\pi$	$\sin(u)=۰\to u=k\pi$
$\tan(u)=۰\to u=k\pi$	$\sin(u)=-۱\to u=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$
$\cot(u)=۰\to u=k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$\cos(u)=۱\to u=۲k\pi$

***

مثال ۱ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin ۲x-۱=۰$$

حل :

$$\sin ۲x=۱\xrightarrow{ح خ}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

مثال۲ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin^۲ x+\sin x=۰$$

حل :

$$\sin x(\sin x+1)=0 \to \begin{cases} \sin x=0 \xrightarrow{\text{ج خ}} x=k\pi \\ \sin x=-1 \xrightarrow{\text{ج خ}} x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال۳ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin^2 x-3\sin x+2=0$$

حل :

$$(\sin x-1)(\sin x-2)=0 \to \begin{cases} \sin x=1 \xrightarrow{\text{ج خ}} x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x=2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مثال۴ :

الف : تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

ب : به کمک تساوی فوق ، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin x+\cos x=1$$

حل :

$$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \to \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{4}} \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{4} \to x=2k\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{4} \to x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

یادآوری : دو تساوی مهم و مفید را به خاطر داشته باشید.

الف) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$	ب) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

***

توجه : به کمک جواب عمومی می توانید، مجموعه‌ی جواب های معادله را در یک محدوده‌ی مشخص را نیز تعیین کرد. برای این کار مقدار مختلف برای k اختیار کنید.

مثال۱: معادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب های آن را در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ را تعیین کنید.

$$2\sin 2x-1=0$$

حل :

$$2\sin 2x-1=0 \rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}}\begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12} & (1)\\ 2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12} & (2)\end{cases}$$

اکنون برای هر یک از جواب های عمومی بدست آمده، جدولی مشابه جدول زیر تنظیم می کنیم و با انتخاب مقادیر مختلف برای k ، جواب های مورد نظر در محدوده‌ی داده شده را تعیین می کنیم.

k	۰	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{12}$ و $\frac{17\pi}{12}$	بیش از حد مجاز

لذا مجموعه‌ی جواب در فاصله‌ی داده شده برابر $\{\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{13\pi}{12}$ و $\frac{17\pi}{12}\}$

مثال ۲: معادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب های آن را در فاصله‌ی $[-2\pi,2\pi]$ را تعیین کنید.

$$\cos^2 x-\sin x=\frac{1}{4}$$

حل :

$$1-\sin^2 x-\sin x=\frac{1}{4}\rightarrow \sin^2 x+\sin x=\frac{3}{4}\rightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=(4)^2-4(4)(-3)=64}\begin{cases}\sin x=\frac{-4+8}{8}=\frac{1}{2} & (1)\\ \sin x=\frac{-4-8}{8}=\frac{-3}{2} & \text{غ ق}\end{cases}$$

اکنون معادله‌ی (۱) را به شکل زیر ادامه می دهیم.

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}}\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

k	۲-	۱-	۰	۱
θ	کمتر از حد مجاز	$-\frac{11\pi}{6}$ و $-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ و $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$	بیش از حد مجاز

لذا مجموعه‌ی جواب در فاصله‌ی داده شده برابر $\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{-7\pi}{6},\frac{-11\pi}{6}\}$

تمرین برای حل :

۱ : معادله های زیر را حل کنید.

۱-۱) $۲\sin x+۱=۰$

۱-۲) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x$

۱-۳) $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

۱-۴) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

۱-۵) $۲\cos ۳x-\sqrt{۲}=۰$

۱-۶) $\sin x=\sin ۲x$

۱-۷) $\sin ۵x=\cos x$

۱-۸) $\sin x-\cos x=۰$

۱-۹) $\tan(۲x-۱)=۰$

۱-۱۰) $\tan ۳x=\tan x$

۲ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۲) $\cos^{۲} x-۳\cos x=۰$

۲) $\sin ۲x+۲\sin^{۲} x=۰$

۳) $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$

۳ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\cos x=\cos ۲x$

۲) $\tan x=\tan ۵x$

۳) $\sin x-\cos x=۱$

۴) $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$

۵) $\sin x-\cos ۲x=۰$

۶) $\sin ۲\theta+\sqrt{۲}\cos\theta=۰$

۷) $\tan x-\cot x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۸) $\sin x+\cos x=۱$

۴ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $۴\sin ۳x\cos ۳x-۱=۰$

ب) $۲\cos^{۲} x-۲\sin^{۲} x-۱=۰$

۵ : مجموعه‌ی جواب معادله‌ی زیر را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ بدست آورید.

$$\cos ۲x-\sin x=۰$$

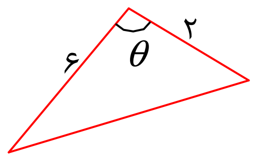
۶ : مجموعه‌ی جواب معادله‌ی زیر را در فاصله‌ی $[-\pi,\pi]$ بدست آورید.

$$۲\cos^{۲} x-۳\cos x+۱=۰$$

حل چند تمرین کاربردی برای معادلات مثلثاتی

۱ : آیا می توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و۶ سانتی متر باشد و مساحت آن۳ سانتی متر مربع شود. مسئله چند جواب دارد؟

حل : فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا



$$S=۳\xrightarrow{۰<\theta<\pi}\frac{۱}{۲}(۲)(۶)\sin\theta=۳\rightarrow\sin\theta=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}}\begin{cases}\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ \theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

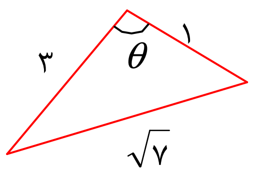
حال مقدار θ مجاز را تعیین می کنیم.

k	۰	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{۶}$ و $\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۶}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

لذا دو مثلث با چنین شرایطی (زاویه های داخلی هر مثلث مثبت و کمتر از ۱۸۰ درجه) وجود دارد.

۲ : در مثلثی طول اضلاع آن ۱ و ۳ و $\sqrt{۷}$ است. زاویه‌ی روبروی ضلع به طول $\sqrt{۷}$ چقدر است؟

حل :



$$۰<\theta<\pi$$

$$(\sqrt{۷})^۲=(۱)^۲+(۳)^۲-۲(۱)(۳)\cos\theta\rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}$$

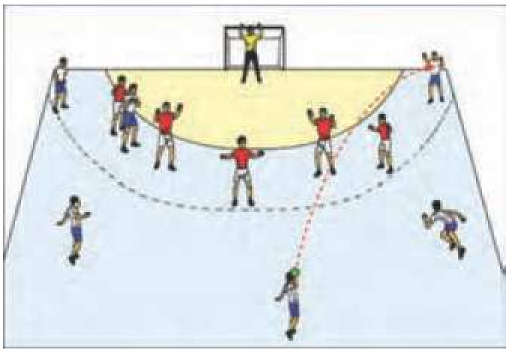
$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۳}}\begin{cases}\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\\ \theta=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

حال مقدار θ مجاز را تعیین می کنیم.

k	۰	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{۳}$ و $-\frac{\pi}{۳}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

لذا یک مثلث با چنین شرایطی وجود دارد و در آن $\theta=\frac{\pi}{۳}$ می باشد.

۳ : یک بازیکن هندبال، توپ را با سرعت ۱۶ متر بر ثانیه برای هم تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه‌ی بین سرعت توپ (v بر حسب متر بر ثانیه) ، مسافت طی شده افقی (d بر حسب متر) و زاویه‌ی پرتاب (θ) به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه‌ی پرتاب توپ چقدر بوده است؟



$$d=\frac{v^{۲}\sin ۲\theta}{۱۰}$$

حل :

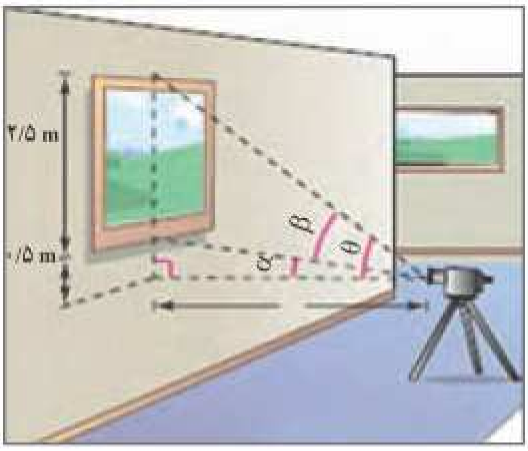
$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^{۲}\sin ۲\theta}{۱۰}\to \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶}=\frac{۱}{۲}\to\begin{cases}۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}\theta=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ \theta=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}\end{cases}$$

k	۰	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\frac{\pi}{۱۲}$ می باشد.

۴ : شکل مقابل، زاویه‌ی دید دوربین (β) با فاصله‌ی افقی آن با تابلو نقاشی را نشان می دهد.



اولاً : نشان دهید که رابطه‌ی بین زاویه‌ی دید دوربین (β) با فاصله‌ی افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan\beta=\frac{۵x}{۲x^{۲}+۳}$$

ثانیاً : زاویه‌ی دید را در حالتی که فاصله‌ی افقی برابر یک متر است، به دست آورید.

حل : با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه‌ی پایین شکل پایین داریم.

$$\tan\alpha = \frac{۰/۵}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه‌ی آن θ است. داریم :

$$\tan\theta = \frac{۳}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می آید.

$$\tan\beta = \tan(\theta-\alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{۱+\tan\theta\tan\alpha} = \frac{\frac{۳}{x} - \frac{۰/۵}{x}}{۱+\frac{۳}{x}\times\frac{۰/۵}{x}} = \frac{\frac{۲/۵}{x}}{۱+\frac{۱/۵}{x^۲}} = \frac{\frac{۲/۵}{x}}{\frac{x^۲+۱/۵}{x^۲}}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۲x}}{\frac{۲x^۲+۳}{۲x^۲}} = \frac{۵x}{۲x^۲+۳}$$

وقتی فاصله‌ی افقی برابر یک متر است، آنگاه :

$$\tan\beta = \frac{۵(۱)}{۲(۱)^۲+۳} = ۱ \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۴}} \beta = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

لیکن با توجه به شکل، تنها جواب منطقی در حالت $k=۰$ است که در آن $\beta = \frac{\pi}{۴}$ را به دست می دهد،

قابل قبول است.

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: **@amerimath**

سایت : **www.mathtower.ir**