۳ـ قضایای حد :

1 تابع ثابت $f(x)=c$ در همهٔ نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

مثال: $\lim\limits_{x\to -0.3} 2 = 2$ $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{5} = \sqrt{5}$ $\lim\limits_{x\to 0} \pi = \pi$

2 تابع همانی $f(x)=x$ در همهٔ نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

مثال: $\lim\limits_{x\to 0.2} x = 0.2$ $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}} x = -\sqrt{3}$ $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

3 اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) . g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 . L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (به شرط $L_2 \neq 0$)

مثال : اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$ مطلوبست :

الف) $\lim\limits_{x\to 2} (f(x) - g(x)) = 8 - (-1) = 9$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} (x + f(x). g(x)) = 2 + 8 \times (-1) = 2 - 8 = -6$

پ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x + g(x)}{3 - f(x)} = \dfrac{2 + (-1)}{3 - 8} = -\dfrac{1}{5}$

مثال : فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و c یک عدد حقیقی دلخواه است، نشان دهید :

الف) $\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = c.L$

اثبات: $\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = \lim\limits_{x\to a} c \times \lim\limits_{x\to a} f(x) = c.L$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x) = L^2$

اثبات : $\lim\limits_{x\to a} f^2(x) = \lim\limits_{x\to a} (f(x). f(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} f(x) = L . L = L^2$

پ) $\lim_{x\to a}(-f(x)) = -L$

اثبات: $\lim_{x\to a}(-f(x)) = \lim_{x\to a}(-1) \times \lim_{x\to a} f(x) = (-1)\cdot L = -L$

ت) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ (به شرط $L\neq 0$)

اثبات: $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} 1}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{L}$

مثال: با فرض $\lim_{x\to\pi} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to\pi} g(x) = -۲$، مطلوبست:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۵f^2(x) - ۷x}{۳g(x)+۱۰} = \frac{۵(۹) - ۷\pi}{۳(-۲)+۱۰} = \frac{۴۵ - ۷\pi}{۴}$$

مثال: اگر $\lim_{x\to ۰}\frac{۲f(x)+۷}{۳} = ۵$، آنگاه مقدار $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را بدست آورید.

گیریم $\lim_{x\to ۰} f(x) = A$ باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲f(x)+۷}{۳} = \frac{۲A+۷}{۳} = ۵ \Rightarrow ۲A+۷ = ۱۵ \Rightarrow ۲A = ۸ \Rightarrow A = ۴ \rightsquigarrow \lim_{x\to ۰} f(x) = ۴$$

مثال: تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^2-1} = ۴$.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^2-1} = \frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{۴-۱} = \frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{۳} = ۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x) = ۱۲$$

بنابراین باید تابع g را چنان یافت که حد آن در نقطه‌ی $x=۲$ برابر ۱۲ شود.

$g(x) = ۱۲$ (تابع ثابت) ، $g(x) = ۶x$ و $g(x) = \frac{۲۴}{x}$ و ...

بی شمار تابع دیگر برای g قابل تعریف است.

نکته مهم: قضایای $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ قابل تعمیم هستند. به این ترتیب که اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1 و f_2 و ... و f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آنگاه:

الف) $\lim_{x\to a}(f_1(x)+\cdots+f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \cdots + \lim_{x\to a} f_n(x)$

ب) $\lim_{x\to a}(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \times\cdots\times \lim_{x\to a} f_n(x)$

پ) $\lim_{x\to a} f^n(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$

ت) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

قضیه: هر چند جمله‌ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه‌ی a برابر است. یعنی: $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to -2} (3x^2 + 5x + 1) = 12 - 10 + 1 = 3$

ب) $\lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x^4+1} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$

پ) $\lim_{x \to -\frac{5}{3}} \frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^4+1)} = \frac{(-\frac{5}{3}+\pi)(0)}{(1)(-\frac{125}{27}+1)} = 0$

قضیه: اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد و در نقطه‌ی a دارای حد باشد آنگاه:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

مثال: $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x-4} = \frac{\sqrt{2-1}}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$

تذکر مهم: در صورتی که $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ باشد، برای محاسبه‌ی $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)}$ باید به دامنه‌ی تابع $\sqrt{f(x)}$ توجه کرد.

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x - x^2}$

با توجه به صفر شدن عبارت زیر رادیکال باید دامنه را حساب کرد:

$x - x^2 \geq 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} -\infty & 0 & & 1 & +\infty \\ - & \circ & + & \circ & - \end{array}$ $\Rightarrow D = [0, 1] \Rightarrow$ همسایگی راست ۱ تعریف نشده

$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{x - x^2} = 0$ و $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - x^2} =$ وجود ندارد $\Longrightarrow \lim_{x \to 1} \sqrt{x - x^2} =$ وجود ندارد

ب) $\lim_{x \to 2} \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$ ⟵ عبارت زیر رادیکال صفر می‌شود

$-x^2 + 4x - 4 \geq 0$ $\quad \begin{array}{ccc} -\infty & 2 & +\infty \\ - & \circ & - \end{array}$ $\Rightarrow D = \{2\}$ ⟵ هیچ همسایگی برای ۲ تعریف نشده

$\Longrightarrow$ حد وجود ندارد

ب) $\lim_{x\to -3}\sqrt{x^2+6x+9}$ عبارت زیر رادیکال صفر می‌شود

$\Rightarrow x^2+6x+9\geq 0$ $\quad \begin{array}{ccccc} -\infty & & -3 & & +\infty \\ & + & 0 & + & \end{array}$ $\Rightarrow D=\mathbb{R}$ همسایگی -3 تعریف شده است

$\Rightarrow \lim_{x\to -3}\sqrt{x^2+6x+9}=0$

نکته: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$، آنگاه $\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$.

مثال: $\lim_{x\to 4}\dfrac{|x-2|+3|1-x|}{|x-4|+x}=\dfrac{|2|+3|-3|}{|0|+4}=\dfrac{2+9}{4}=\dfrac{11}{4}$

قضیه: برای هر عدد حقیقی a، $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$ و $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$

مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\cos^2 x-\sin x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}=\dfrac{0}{\frac{\pi}{2}-\pi}=0$

مثال: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}=\dfrac{0}{0+1}=0$

توجه: ۱- اگر $a\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $(k\in\mathbb{Z})$، آنگاه $\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$.

۲- اگر $a\neq k\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$، آنگاه $\lim_{x\to a}\cot x=\cot a$.

مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(\tan^2 2x+\sqrt{3}\cot x)=\tan^2\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\cot\frac{\pi}{6}=(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}(\sqrt{3})=3+3=6$

مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{8}}(\tan x\cdot\cot x)=\tan\frac{\pi}{8}\times\cot\frac{\pi}{8}=1$

محاسبهٔ حد توابع شامل جزء صحیح:

فرض کنید $\lim_{x\to a}f(x)=L$، در این صورت:

الف: اگر L عدد ناصحیح باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}[f(x)]=[L]$.

مثال: $\lim_{x\to 3}\left[\dfrac{4x+5}{x-1}\right]=\left[\dfrac{17}{2}\right]=8$

مثال: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} [\sin x] + 2[x] + \cos x = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 2\left[\frac{\pi}{3}\right] + \frac{1}{2} = 0 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

ب: اگر a عدد صحیح باشد، آنگاه باید تعیین کنیم که وقتی $x\to a^+$ یا $x\to a^-$، مقادیر $f(x)$ به کدامیک از مقادیر a^+ یا a^- یا دقیقاً a نزدیک می‌شود و بر اساس آن، حاصل حد را به دست آورد.

مثال: $\lim\limits_{x\to 3} [2x]$

وقتی $x\to 3$، درون جزء صحیح، عدد صحیح 6 می‌شود، بنابراین باید حدهای چپ و راست را بررسی کرد:

حد راست: وقتی $x\to 3^+$ یعنی x از مقادیر بیشتر از 3 به سمت 3 در حال حرکت است به طور مثال مقادیر x به صورت 3.1 و 3.01 و ... می‌باشد لذا مقدار $2x$ به صورت 6.2 ، 6.02 و ... بوده که نتیجه می‌شود جزء صحیح آن 6 می‌باشد پس:

$$\lim_{x\to 3^+} [2x] = 6$$

حد چپ: وقتی که $x\to 3^-$ یعنی x از مقادیر کمتر از 3 به سمت 3 در حال حرکت است، به طور مثال مقادیر x به صورت 2.9 و 2.99 و ... می‌باشد لذا مقدار $2x$ به صورت 5.8 و 5.98 و ... بوده که جزء صحیح آن 5 خواهد شد پس:

$$\lim_{x\to 3^-} [2x] = 5$$

حد وجود ندارد $\Leftarrow$ حد راست $\neq$ حد چپ $\Leftarrow$

توجه: روش دیگر برای تعیین حدهای چپ و راست آن است که به شکل زیر عمل کنیم:

$$x\to 3^+ \Rightarrow x>3 \xrightarrow{\times 2} 2x>6 \Rightarrow \lim_{x\to 3^+}[2x] = [6^+] = 6$$

$$x\to 3^- \Rightarrow x<3 \xrightarrow{\times 2} 2x<6 \Rightarrow \lim_{x\to 3^-}[2x] = [6^-] = 5$$

حد وجود ندارد $\Leftarrow$

مثال: $\lim\limits_{x\to 6^+} \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{-x}{3}\right]$ را محاسبه کنید.

$$x>6 \xrightarrow{\div 2} \frac{x}{2}>3 \Rightarrow \lim_{x\to 6^+}\left[\frac{x}{2}\right] = 3$$

$$x>6 \xrightarrow{\div(-3)} -\frac{x}{3}<-2 \Rightarrow \lim_{x\to 6^+}\left[\frac{-x}{3}\right] = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^+}\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{-x}{3}\right] = 3-(-3) = 6$$

مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x\to 2} \frac{[x]+x}{7+[-x]}$

$\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]+x}{7+[-x]} = \frac{2+2}{7+(-3)} = 1$ و $\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]+x}{7+[-x]} = \frac{1+2}{7+(-2)} = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ حد وجود ندارد

ب) $\lim_{x\to 0}[x][x+1]$

$\lim_{x\to 0^+}[x][x+1] = 0\times 1 = 0$ و $\lim_{x\to 0^-}[x][x+1] = -1\times 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}[x][x+1] = 0$

نکته مهم : هنگامیکه تابع شامل جزء صحیح در مخرج کسر باشد و حد آن از یک طرف صفر شود باید به دامنه ی تابع توجه کرد.

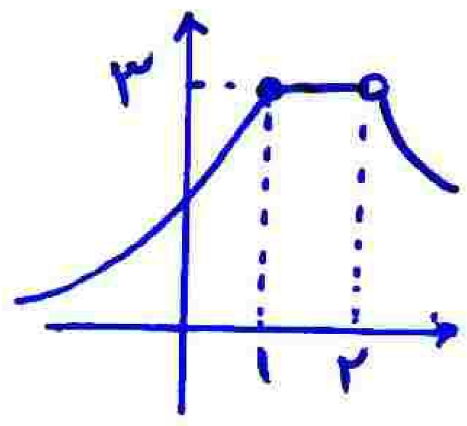
مثال : $\lim_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ $\longleftarrow$ مخرج کسر در حالت $x\to 0^+$ ، صفر خواهد شد

دامنه تابع : $[x]=0 \Rightarrow 0\leq x<1 \Rightarrow D=\mathbb{R}-[0,1)$ $\Rightarrow$ همسایگی راست صفر تعریف نشده

بنابراین حد راست وجود ندارد ولی $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{[x]} = \frac{0}{-1} = 0$ $\Leftarrow$ تابع در $x=0$ حد ندارد

حل نمونه سؤال هایی از حد

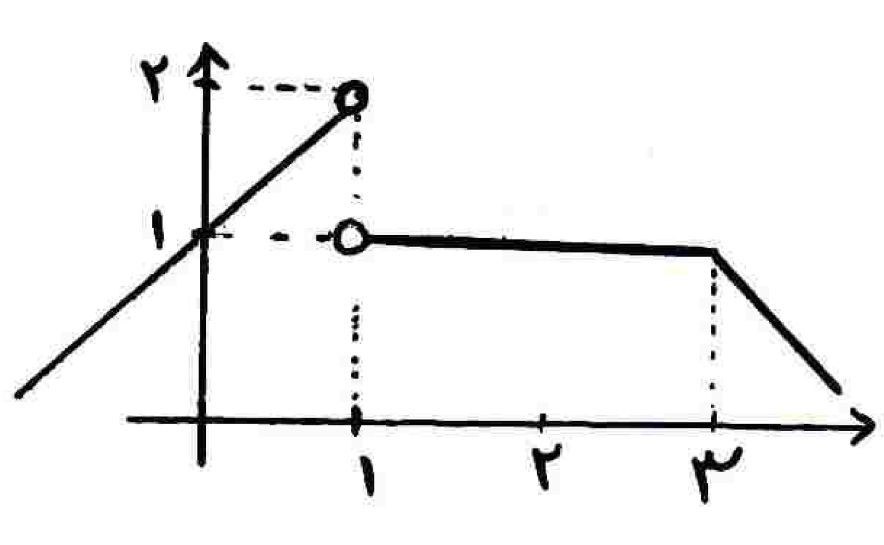
۱- فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x\to 1}f(x)=3$ و $\lim_{x\to 2}f(x)=3$. آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت است؟



خیر ، بی شمار تابع تحت شرایط سؤال می توان مطرح کرد که یکی از آنها تابع ثابت است .

به عنوان نمونه ، تابعی که نمودار آن به شکل روبرو رسم شده است :

همچنین تابع $f(x)=(x-1)(x-2)+3$ و بسیار تابع دیگر .



۲- با توجه به نمودار تابع f ، مقدار $\lim_{x\to 3^+}f(f(x))$ را بدست آورید.

وقتی متغیر x از سمت راست به ۳ نزدیک می شود، تابع $f(x)$ از مقادیر کمتر از یک به یک میل می کند یعنی $f(x)\to 1^-$. بنابراین :

$\lim_{x\to 3^+}f(f(x)) = f(1^-) = 2$

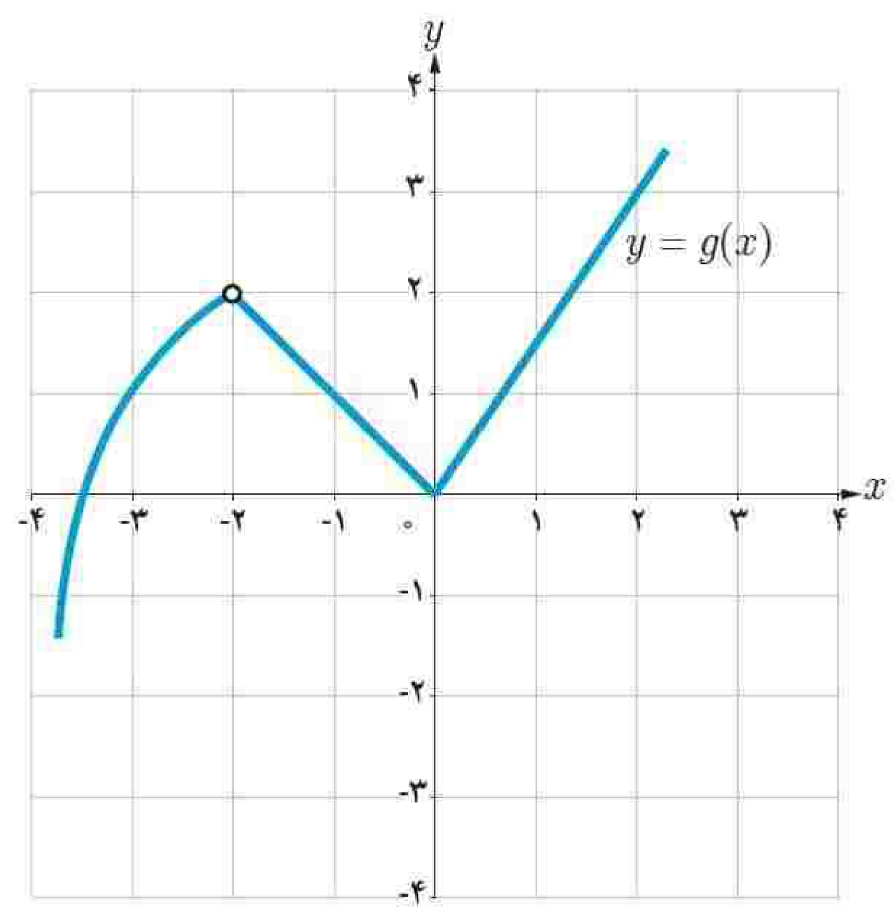
۳ـ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

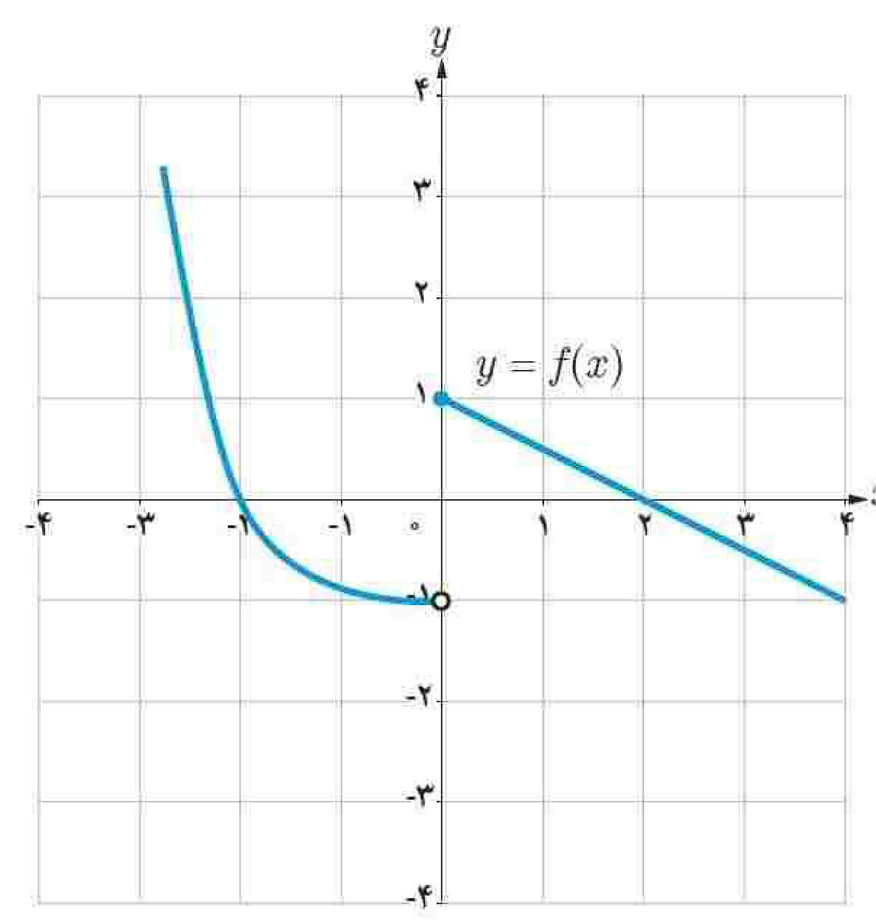
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{n\to a}L=L-L=0$

عکس این مطلب نیز صحیح است. با فرض $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$ ، ثابت می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ است:

$\lim\limits_{n\to a}(f(x)-L)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}L=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to a}f(x)=\lim\limits_{n\to a}L \Rightarrow \lim\limits_{n\to a}f(x)=L$

۴ـ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to-2}(2g(x)-f(x))$

$=2\lim\limits_{n\to-2}g(x)-\lim\limits_{n\to-2}f(x)$

$=2\times2-0=4$

ب) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{0}{1}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{0}{-1}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to-3}-3\sqrt{g(x)}=-3\sqrt{1}=-3$

ت) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{f(x)}$ ⟿ $\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{f(x)}=\sqrt{0^-}\Rightarrow$ حد وجود ندارد ، $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{f(x)}=0$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

ث) $\lim\limits_{x\to-1}[g(x)]$ ⟿ $\lim\limits_{x\to(-1)^-}[g(x)]=[1^+]=1$ ، $\lim\limits_{x\to(-1)^+}[g(x)]=[1^-]=0\Rightarrow$ حد وجود ندارد

۵ـ مقدار b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+[x]}{|x|} & x<-1\\ 3x+b & x>-1\end{cases}$ در $x=-1$ حد داشته باشد.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{n\to(-1)^+}3x+b=-3+b$

$\lim\limits_{n\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{n\to(-1)^-}\dfrac{x^2+[x]}{|x|}=\dfrac{1+(-2)}{1}=-1$

$\xrightarrow{\text{حد چپ = حد راست}} -3+b=-1\Rightarrow b=2$

۶- فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطهٔ a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

خیر، به عنوان نمونه توابع $f(x)=\begin{cases} 4 & x\leq 2 \\ 3 & x>2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -2 & x\leq 2 \\ -1 & x>2\end{cases}$، هردو در $x=2$ حد ندارند ولی مجموع آنها تابع ثابت $y=f(x)+g(x)=2$ شده که $x=2$ دارای حدی برابر 2 است.

ب) ثابت کنید اگر $\lim_{x \to a}(f(x)+g(x))$ و $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود باشند آنگاه $\lim_{x \to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

طبق قضایای حد، اگر دو تابع حد داشته باشند تفاضل آنها نیز دارای حد است. دو تابع $f+g$ و f در $x=a$ حد دارند بنابراین تابع $g=(f+g)-f$ نیز در $x=a$ حد خواهد داشت.

پ) اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد درمورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

$f+g$ در a حد ندارد، اثبات این ادعا به کمک برهان خلف ساده است:

گیریم $f+g$ در a حد داشته باشد، از طرفی f در a حد دارد، پس تفاضل آنها یعنی $g=(f+g)-f$ در a حد خواهد داشت که با فرض سؤال تناقض دارد.

ت) اگر توابع f و g هیچکدام در نقطهٔ a دارای حد نباشند درمورد حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

ممکن است $f+g$ در a حد داشته باشد (به پاسخ قسمت "الف" توجه شود)

و امکان دارد $f+g$ در a حد نداشته باشد. به طور مثال توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=[x]+1$ هردو در $x=2$ حد ندارند، مجموع آنها نیز در $x=2$ حد ندارد. (بررسی کنید)

۷- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\cos x}{|x|+\cos 2x} = \frac{0-1}{0+1} = -1$

ب) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\left([x]+\left[\frac{x}{2}\right]+[-x]\right) = 1+0+(-2)=-1$

پ) $\lim_{x\to 0}[\sin x]$

$\lim_{x\to 0^+}[\sin x] \xrightarrow{\text{0^+ در ناحیه‌ی اول دایره مثلثاتی است و } 0<\sin x<1} = 0$

$\lim_{x\to 0^-}[\sin x] \xrightarrow{\text{0^- در ناحیه‌ی چهارم دایره مثلثاتی است و } -1<\sin x<0} = -1$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[\sin x]$

$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}[\sin x] \xrightarrow{\text{$(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه‌ی دوم دایره مثلثاتی است و } 0<\sin x<1} = 0$

$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}[\sin x] \xrightarrow{\text{$(\frac{\pi}{2})^-$ در ناحیه‌ی اول دایره مثلثاتی است و } 0<\sin x<1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}[\sin x] = 0$

ث) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}$

دامنه: $1-\sin x\geq 0 \Rightarrow \sin x\leq 1$ ← همواره برقرار است $\Rightarrow D=\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x} = 0$

ج) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{[x]-3}$

دامنه: $[x]-3=0 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow 3\leq x<4 \Rightarrow D=\mathbb{R}-[3,4)$ ← همسایگی راست ۳ تعریف نشده

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{[x]-3}$ وجود ندارد $\Longleftarrow$ $\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{2-3} = -1$ ؛ حد راست وجود ندارد $\Leftarrow$

چ) $\lim_{x\to 0.1}\left[\frac{1}{x}\right]$

حد چپ: $x<\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{x}>10 \Rightarrow \lim_{x\to 0.1^-}\left[\frac{1}{x}\right]=[10^+]=10$

حد راست: $x>\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{x}<10 \Rightarrow \lim_{x\to 0.1^+}\left[\frac{1}{x}\right]=[10^-]=9$

$\Rightarrow$ حد وجود ندارد

ح) $\lim_{x\to 2}([x]+[-x])$

$\lim_{x\to 2^+}([x]+[-x]) = 2+(-3)=-1$

$\lim_{x\to 2^-}([x]+[-x]) = 1+(-2)=-1$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 2}([x]+[-x])=-1$

۸- با فرض $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x>2\\ ax+b & x<2\end{cases}$ ، a و b را چنان بیابید که تابع f در $x=2$ دارای حد بوده و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ باشد.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+x) = 4+2=6$ ، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(ax+b) = 2a+b$

طبق فرض تابع در $x=2$ دارای حد است $\Longrightarrow 2a+b=6$

$\xrightarrow{\text{حل دستگاه معادلات}} a=b=2$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} ax+b = -a+b=0$

۹- به ازای چه مقدار از m تابع $f(x)=2[x]-m[x+1]+x$ در $x=5$ دارای حد است؟

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 2(5)-m(6)+5 = 15-6m$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2(4)-m(5)+5 = 13-5m$

$\Longrightarrow 15-6m = 13-5m \Longrightarrow m=2$

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}x+a[x]+1 & x\leq 0\\ \sin x+2a\cos x & x>0\end{cases}$ ، a را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x) + f(0) = -7$$

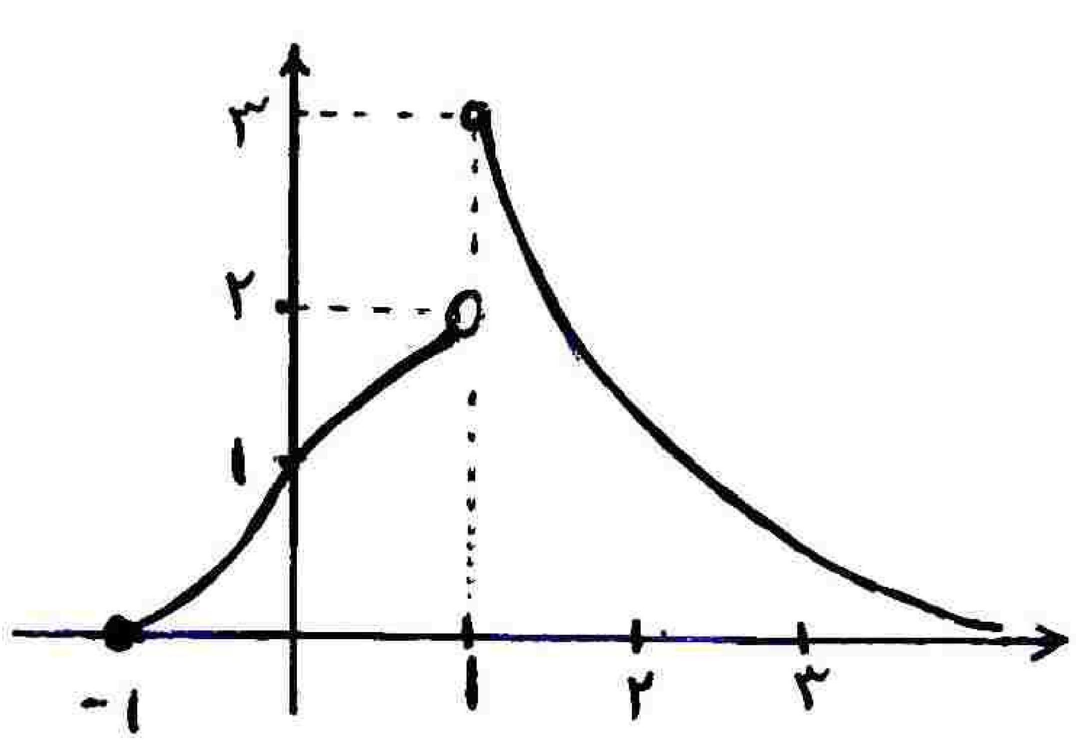
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x+2a\cos x) = 0+2a(1)=2a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+a[x]+1) = 0+a(-1)+1=-a+1$

$f(0)=0+a[0]+1=1$

$\xrightarrow{+} 2a+(-a+1)+1=-7$

$\Longrightarrow a=-9$



۱۱- با توجه به نمودار تابع f در شکل روبرو حدهای زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(-x)$

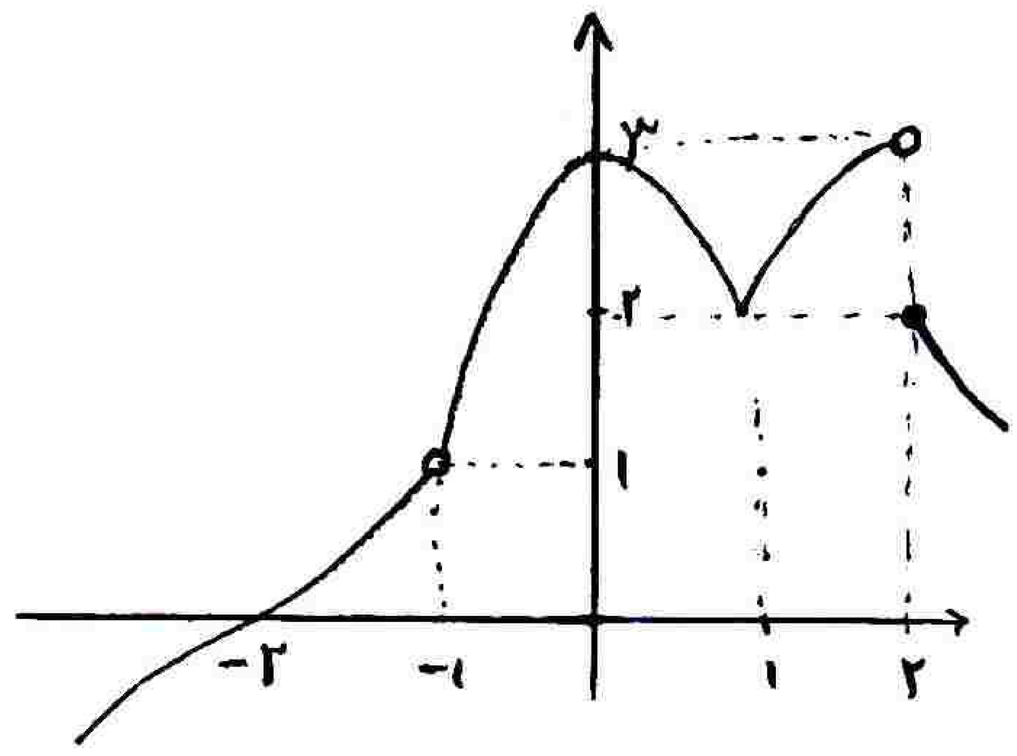
$x<-1 \Longrightarrow -x>1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(-x) = f(1^+) = 3$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} f(x-3)$

وقتی $x\to 3$ ، آنگاه $x-3$ به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

حد $= \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

۱۲ - با توجه به نمودار f، حدهای زیر را محاسبه نمایید.



$\lim_{x\to -1} f(x) = 1$ و $\left[\lim_{x\to -1} f(x)\right] = [1] = 1$

$\lim_{x\to -1} [f(x)] \longrightarrow \lim_{x\to(-1)^+}[f(x)] = 1 \;,\; \lim_{x\to(-1)^-}[f(x)] = 0$

حد ندارد

$\left[\lim_{x\to 1.5} f(x)\right] = [\text{عددی بین ۲ و ۳}] = 2$

$\left[\lim_{x\to 0} f(x)\right] = [3] = 3 \;,\; \lim_{x\to 0}[f(x)] = 2$

$\left[\lim_{x\to 2} f(x)\right] \rightarrow \left[\lim_{x\to 2^-} f(x)\right] = [3] = 3 \;,\; \left[\lim_{x\to 2^+} f(x)\right] = [2] = 2$

$\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right] = [2] = 2 \;,\; \lim_{x\to 1}[f(x)] = 2$

☆ ☆ ☆ ☆

نکته : برای حل سؤال ۹ صفحهٔ قبل می‌توان درست به شیوهٔ زیر عمل کرد.

تابع f وقتی حد دارد که ضریب جزء صحیح صفر باشد $\Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$

مثال : به ازای چه مقدار از a تابع زیر در تمام اعداد حقیقی دارای حد است؟

$$f(x) = (2a-1)[x+3] + a[x-4] + 3a[x] + x - 7$$

$$\longrightarrow (2a-1) + a + 3a = 0 \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = 1/6$$