بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

ریاضی (۲)

پایه یازدهم علوم تجربی

فصل ۶

۱ فرایندهای حدی

۲ محاسبه حد توابع

۳ پیوستگی

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۶

درس ۳

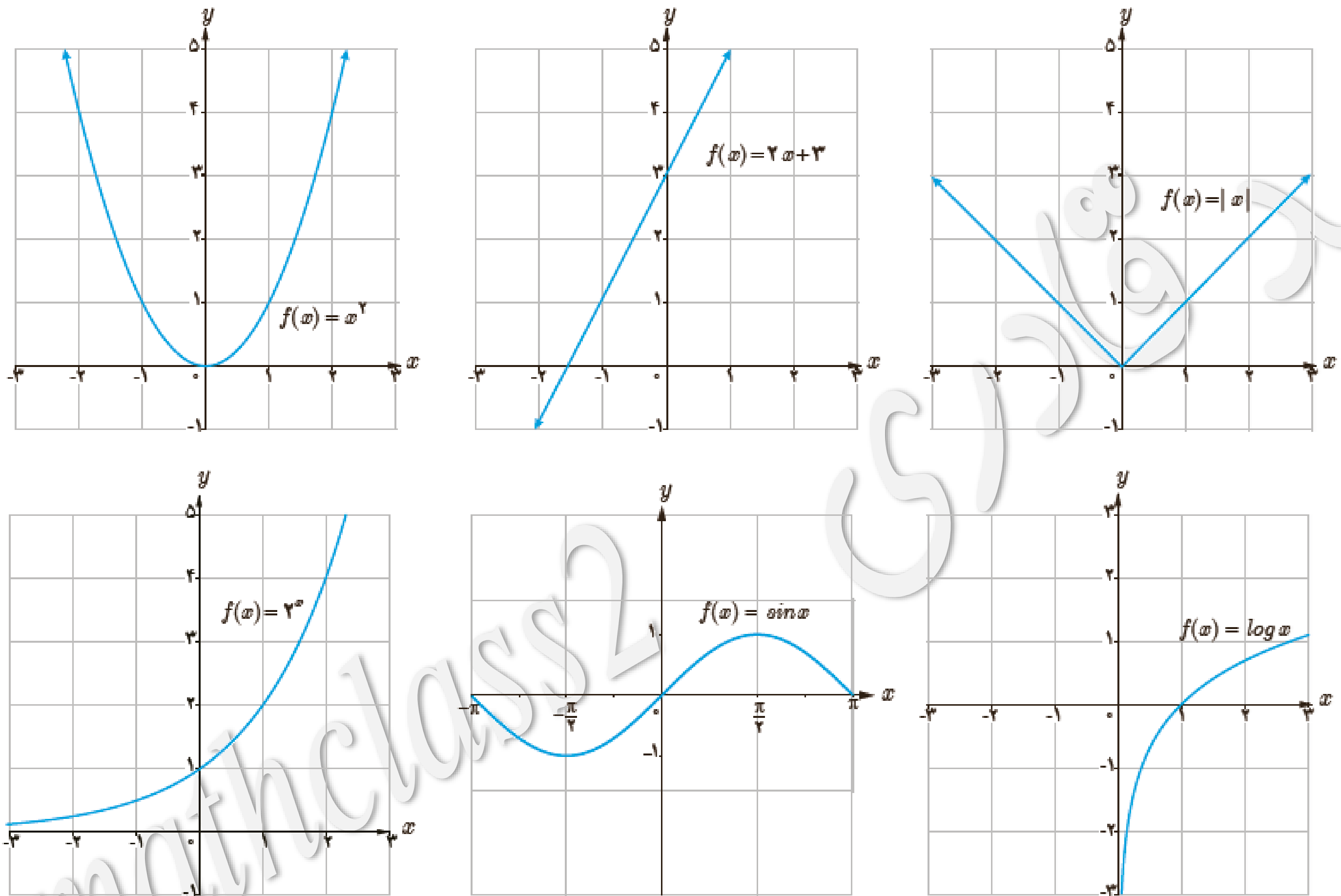
پیوستگی

اهداف

- تشخیص پیوستگی تابع از روی نمودار
- آشنایی با مفهوم پیوستگی راست و چپ تابع در یک نقطه
- آشنایی با تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه
- آشنایی با مفهوم پیوستگی تابع روی بازه
- تشخیص بازه های پیوستگی و ناپیوستگی تابع

فعالیت صفحه ۱۳۷ کتاب درسی

نمودارهای ۶ تابع در شکل های زیر رسم شده اند.

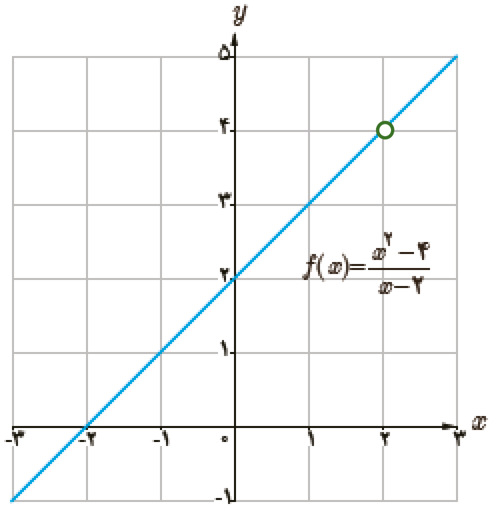


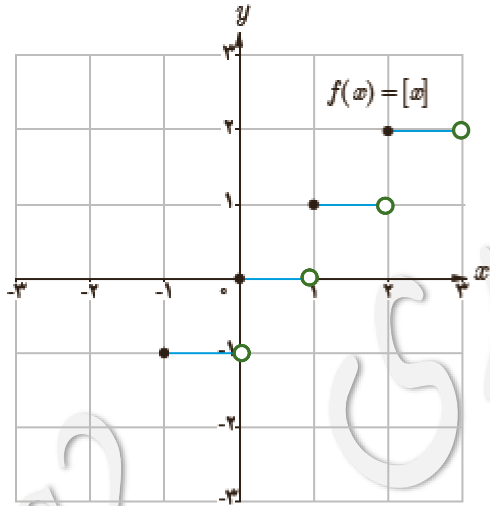
کدام یک از نمودارهای فوق را می توان بدون آن که قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟

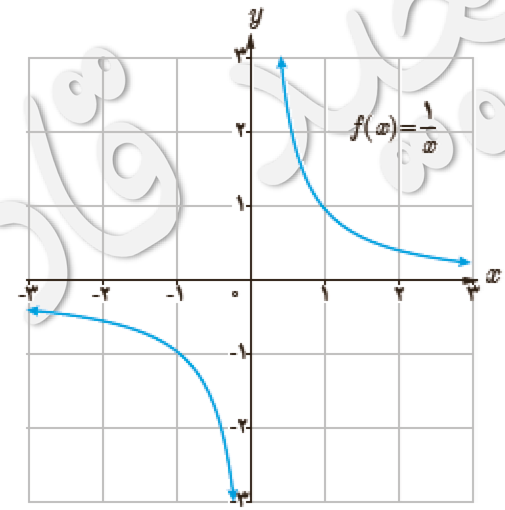
همهٔ نمودارهای فوق را می توان بدون آن که قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم نمود. این نمودارها پیوسته هستند.

فعالیت صفحه ۱۳۷ کتاب درسی

نمودارهای ۳ تابع در شکل های زیر رسم شده اند.





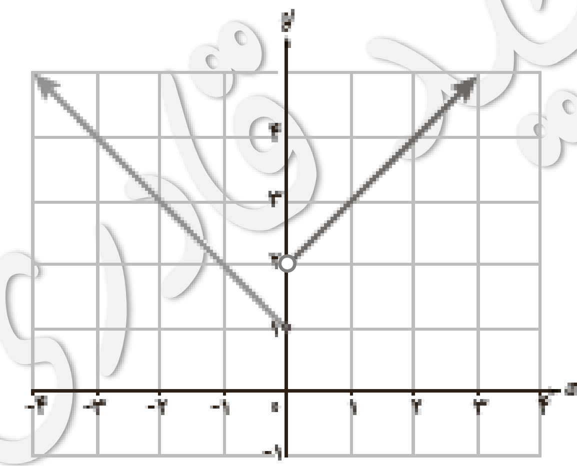


کدام یک از نمودارهای فوق را می توان بدون آن که قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟

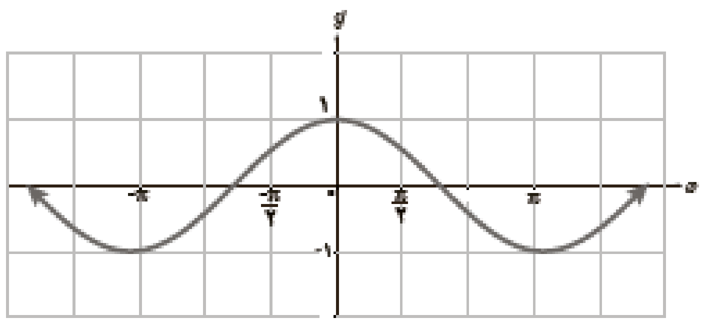
نمودارهای فوق را نمی توان بدون آن که قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم نمود. این نمودارها ناپیوسته هستند.

فعالیت صفحه ۱۳۷ کتاب درسی

مثال دیگری از توابع پیوسته و ناپیوسته ارائه کنید.



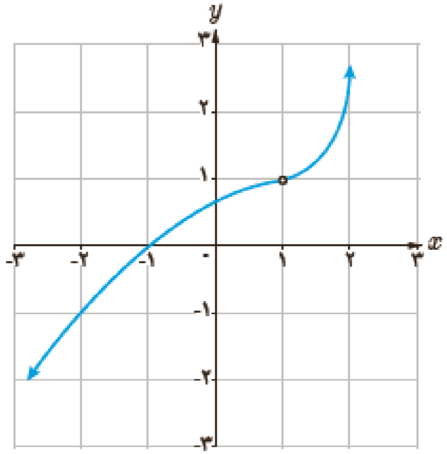
تابع ناپیوسته



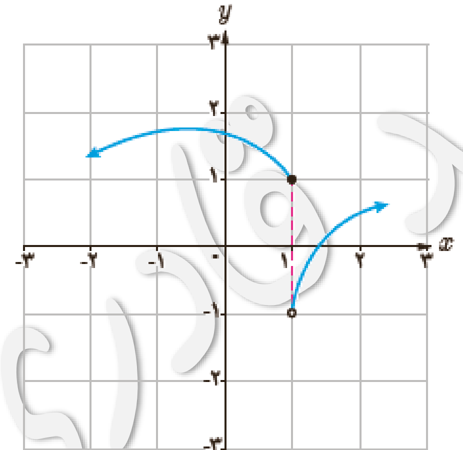
تابع پیوسته

مثال صفحه ۱۳۸ کتاب درسی

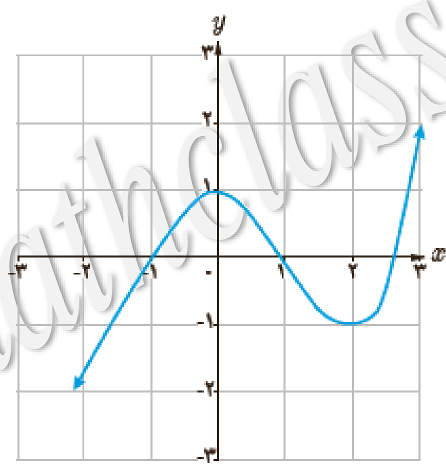
تابع های داده شده با نمودارهای «الف» و «ب» پیوسته نیستند، ولی توابع با نمودارهای «پ» و «ت» پیوسته اند.



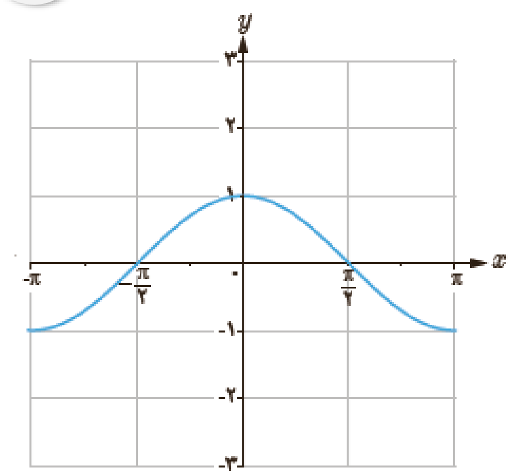
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

صفحه ۱۳۸ کتاب درسی

پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع f در نقطه ای مانند c متعلق به دامنه اش پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

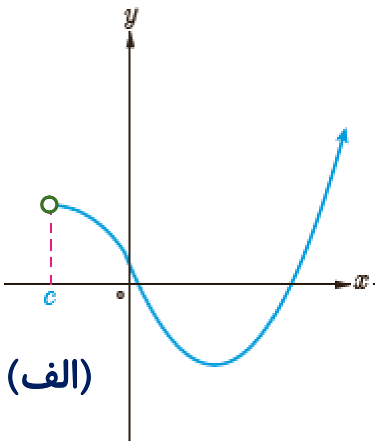
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

به عبارت دیگر تابع f در $x = c$ پیوسته است هرگاه حد و مقدار تابع f در $x = c$ موجود و با هم برابر باشند.

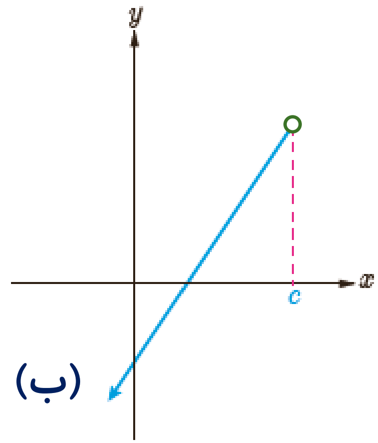
در غیر این صورت اگر تابع f در $x = c$ پیوسته نباشد، گوییم تابع f در c ناپیوسته است و c را یک نقطهٔ ناپیوستگی از تابع f می خوانیم.

صفحه ۱۳۸ کتاب درسی

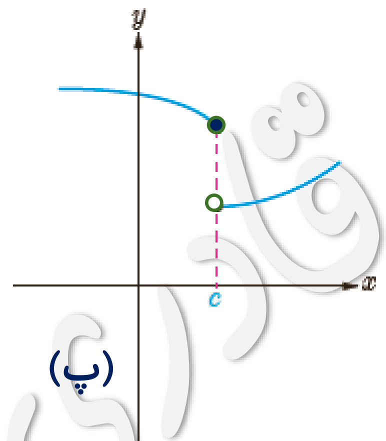
در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در نقطهٔ c در شرایط مختلف نمایش داده شده است.



(الف)



(ب)

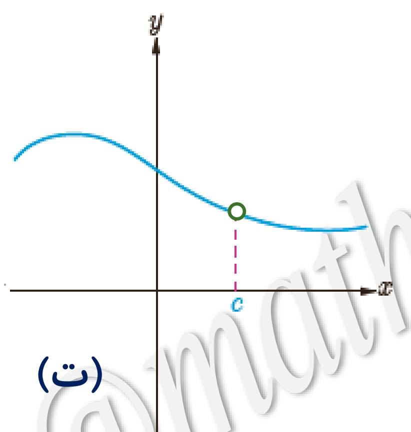


(پ)

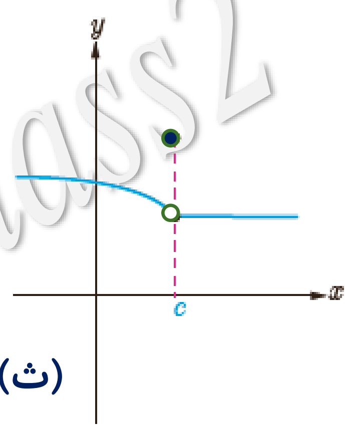
الف) حد چپ تابع در نقطهٔ c موجود نیست.

ب) حد راست تابع در نقطهٔ c موجود نیست.

پ) حد چپ و راست تابع در نقطهٔ c موجود هستند ولی برابر نیستند پس حد تابع در نقطهٔ c موجود نیست.



(ت)



(ث)

ت) مقدار تابع در نقطهٔ c یعنی $f(c)$ موجود نیست.

ث) مقدار تابع در نقطهٔ c موجود است ولی با حد تابع برابر نیست.

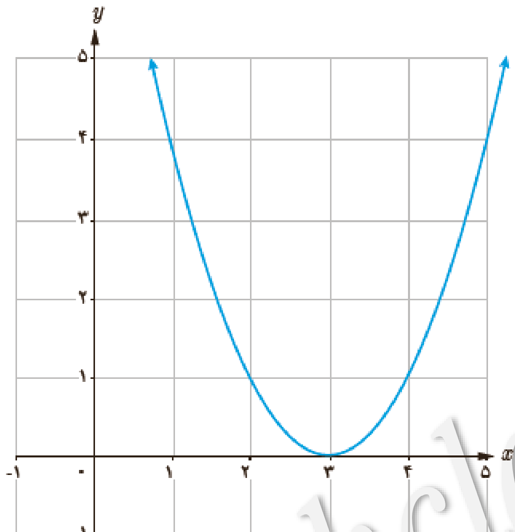
کار در کلاس صفحه ۱۳۹ کتاب درسی

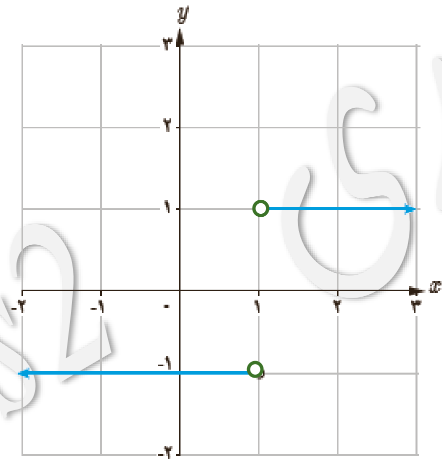
کدام یک از توابع زیر با ضابطه های داده شده در $x = ۱$ ناپیوسته است.

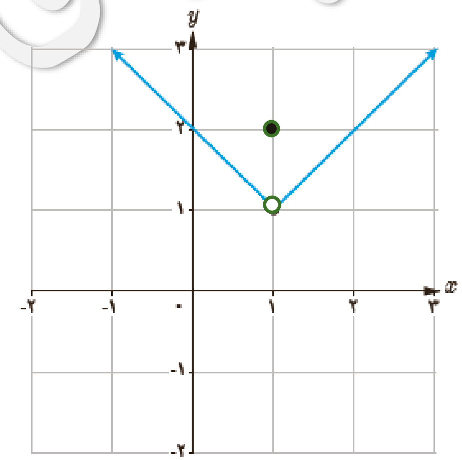
الف) $f(x) = (x-۳)^۲$

ب) $g(x) = \dfrac{|x-۱|}{x-۱}$

پ) $h(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ -x+۲ & x < ۱ \end{cases}$





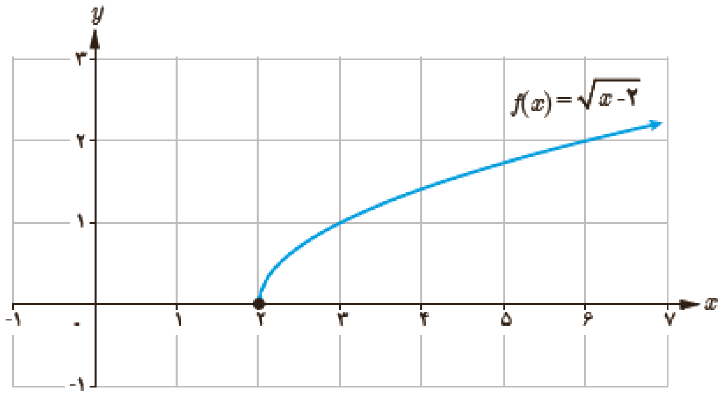


تابع f در $x = ۱$ پیوسته است. $\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$

تابع g در $x = ۱$ حد ندارد، در نتیجه g پیوسته نیست. $\lim_{x\to ۱^+} g(x) \neq \lim_{x\to ۱^-} g(x)$

حد تابع h در $x = ۱$ با مقدار تابع برابر نیست، در نتیجه h پیوسته نیست. $\lim_{x\to ۱} h(x) \neq h(۱)$

فعالیت صفحه ۱۳۹ کتاب درسی



تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ موجودند؟

حد راست تابع f در $x=۲$ موجود و برابر صفر است.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۰$$

حد چپ تابع f در $x=۲$ موجود نیست زیرا تابع به ازای مقادیر کمتر از ۲ تعریف نشده است.

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ موجوداست؟ خیر حد تابع f در $x=۲$ موجود نیست.

پ) آیا تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟ خیر تابع f در $x=۲$ پیوسته نیست، زیرا حد تابع f در $x=۲$ موجود نیست.

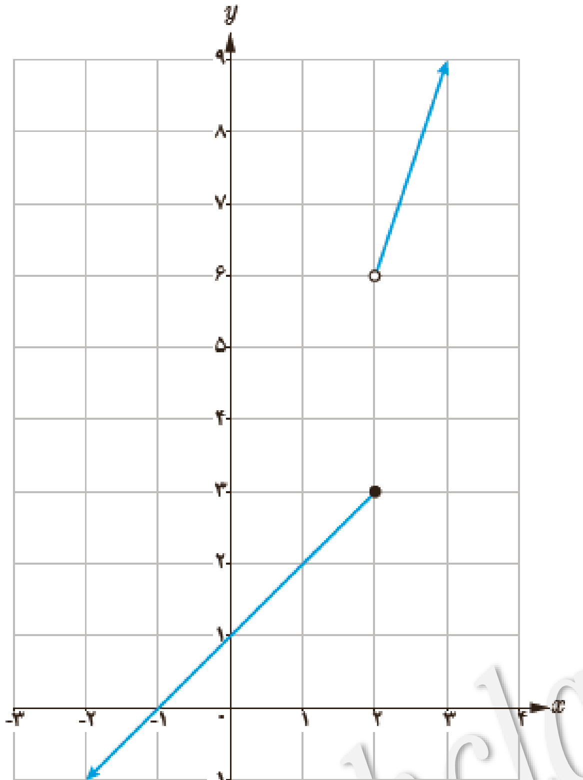
مقدار تابع f در $x=۲$ برابر صفر است. به عبارتی دیگر $f(۲)=۰$

از طرفی داریم: $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$

در این صورت می گوییم: تابع f در $x=۲$ پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس صفحه ۱۴۰ کتاب درسی

تابع با ضابطهٔ $g(x) = \begin{cases} ۳x & x > ۲ \\ x - ۲ & x \le ۲ \end{cases}$ و نمودار مقابل را در نظر بگیرید.



الف) کدام یک از حدهای $\lim_{x\to ۲^+} g(x)$ و $\lim_{x\to ۲^-} g(x)$ موجودند؟

حد راست تابع g در $x = ۲$ موجود و برابر ۶ است. $\lim_{x\to ۲^+} g(x) = ۶$

حد چپ تابع g در $x = ۲$ موجود و برابر ۳ است. $\lim_{x\to ۲^-} g(x) = ۳$

ب) آیا $\lim_{x\to ۲} g(x)$ موجوداست؟

خیر زیرا $\lim_{x\to ۲^-} g(x) \neq \lim_{x\to ۲^-} g(x)$

پ) آیا تابع g در $x = ۲$ پیوسته است؟

خیر تابع g در $x = ۲$ پیوسته نیست، زیرا حد تابع f در $x = ۲$ موجود نیست.

مقدار تابع g در $x = ۲$ برابر ۳ است. به عبارتی دیگر $g(۲) = ۳$

از طرفی داریم: $\lim_{x\to ۲^-} g(x) = ۳$

در این صورت می گوییم: تابع g در $x = ۲$ پیوستگی چپ دارد.

جمع بندی

- ✓ تابع f در $x=c$ از راست پیوسته است هرگاه داشته باشیم: $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$
- ✓ تابع f در $x=c$ از چپ پیوسته است هرگاه داشته باشیم: $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$
- ✓ تابع f در $x=c$ پیوسته است هرگاه f در نقطهٔ $x=c$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال صفحه ۱۴۰ کتاب درسی

الف) تابع $f(x)=[x]$ در $x=۲$ پیوستگی راست دارد. $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۲$

تابع $f(x)=[x]$ در $x=۲$ پیوسته نیست.

ب) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۰ \\ ۲x+۳ & x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوستگی چپ دارد. $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)=۰$

$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۳$

این تابع در $x=۰$ پیوسته نیست.

پ) تابع با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases} -x+۳ & x<۱ \\ ۲x & x\ge ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است.

حد چپ تابع : $\lim_{x\to ۱^-} g(x)=\lim_{x\to ۱^-}(-x+۳)=-۱+۳=۲$

حد راست تابع : $\lim_{x\to ۱^+} g(۱)=\lim_{x\to ۱^+}(۲x)=۲(۱)=۲$

مقدار تابع : $g(۱)=۲(۱)=۲$

پیوستگی تابع روی یک بازه

صفحه ۱۴۰ کتاب درسی

✓ تابع f روی بازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته است هرگاه f در هر نقط از بازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته باشد.

✓ تابع f روی بازهٔ $[a\ ,b]$ پیوسته است هرگاه f در هر نقط از بازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته باشد، همچنین در نقطهٔ a پیوسته راست و در نقطهٔ b پیوسته چپ باشد.

پس حواسمان باشد، پیوسته بودن تابع f روی بازهٔ $[a\ ,b]$ به معنای پیوسته بودن تابع f در هر نقطهٔ بازهٔ $[a\ ,b]$ نیست.

کار در کلاس صفحه ۱۴۰ کتاب درسی

✓ تابع f روی بازهٔ $[a\ ,b)$ پیوسته است هرگاه f در هر نقط از بازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته باشد و همچنین در نقطهٔ a پیوسته راست باشد.

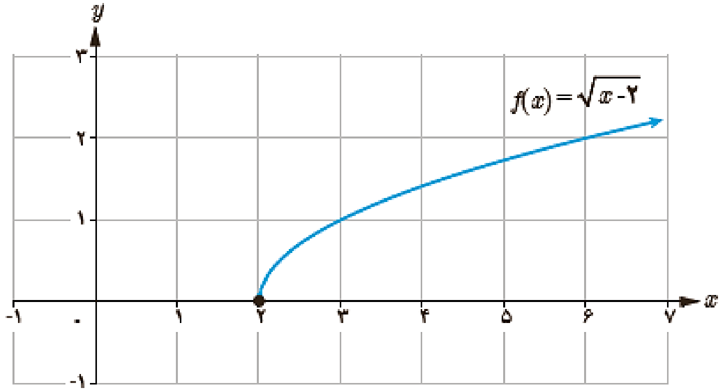
✓ تابع f روی بازهٔ $[a\ ,+\infty)$ پیوسته است هرگاه f در نقطهٔ a پیوسته راست باشد و در هر نقطهٔ بزرگتر از a پیوسته باشد.

✓ تابع f روی بازهٔ $(a\ ,b]$ پیوسته است هرگاه f در هر نقط از بازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته باشد و همچنین در نقطهٔ b پیوسته چپ باشد.

✓ تابع f روی بازهٔ $(-\infty, b]$ پیوسته است هرگاه f در نقطهٔ b پیوسته چپ باشد و در هر نقطهٔ کوچکتر از b پیوسته باشد.

تذکر

تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.



حد راست تابع f در $x=۲$ موجود و برابر صفر است.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۰$$

حد چپ تابع f در $x=۲$ موجود نیست زیرا تابع به ازای مقادیر کمتر از ۲ تعریف نشده است.

مقدار تابع f در $x=۲$ برابر صفر است. به عبارتی دیگر $f(۲)=۰$ و از طرفی داریم: $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۰$

در این صورت می گوییم: تابع f در $x=۲$ پیوستگی راست دارد.

تابع f در دامنه اش پیوسته است. زیرا دامنهٔ آن بازهٔ $[۲,+\infty)$ است و طبق تعریف، شرط پیوستگی روی این بازه این است که تابع f در $x=۲$ پیوستگی راست داشته باشد و در هر نقطهٔ بزرگتر از ۲ پیوسته باشد.
که می بینیم اینچنین است.

تابع f را پیوسته می گوییم اگر در دامنه اش پیوسته باشد.

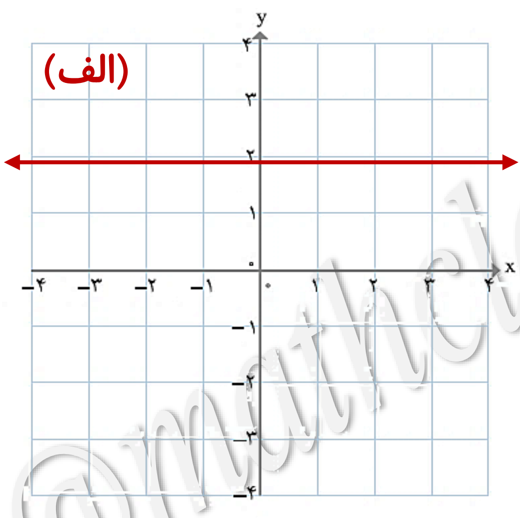
کار در کلاس صفحه ۱۴۱ کتاب درسی

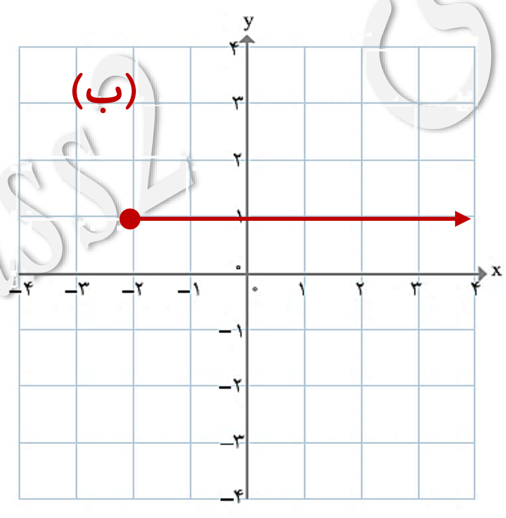
سه تابع متفاوت مثال بزنید که:

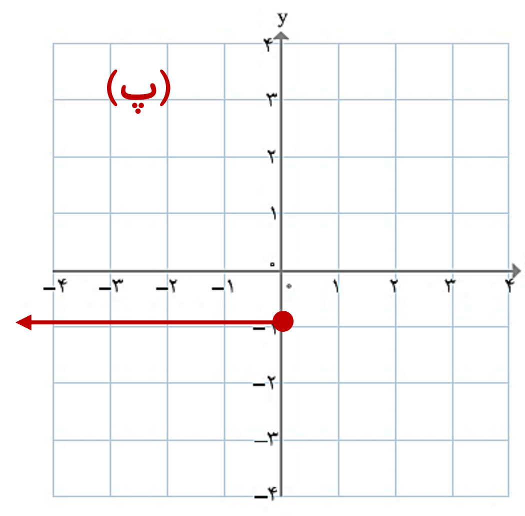
الف) روی بازهٔ $(-\infty , +\infty)$ پیوسته باشد.

ب) روی بازهٔ $[-۲ , +\infty)$ پیوسته باشد.

پ) روی بازهٔ $(-\infty , ۰]$ پیوسته باشد.







چند نکته

مثال صفحه ۱۴۱ کتاب درسی

❖ اگر تابع f چند جمله ای باشد، آنگاه تابع f روی بازهٔ $(-\infty , +\infty)$ پیوسته است.

❖ توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازهٔ $(-\infty , +\infty)$ پیوسته اند.

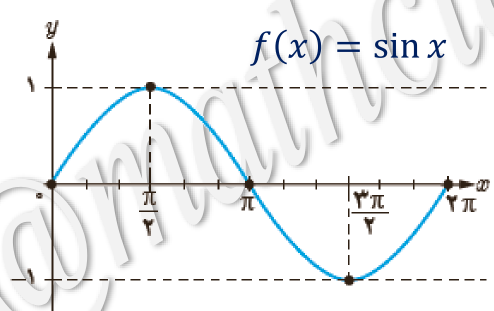
❖ تابع $h(x) = \log_{3} x$ روی بازهٔ $(0, +\infty)$ پیوسته است.

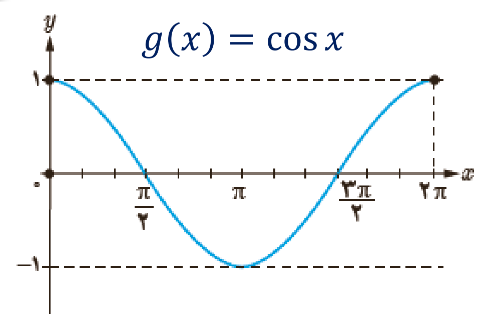
❖ اگر تابعی در بازه ای پیوسته باشد، آنگاه در هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

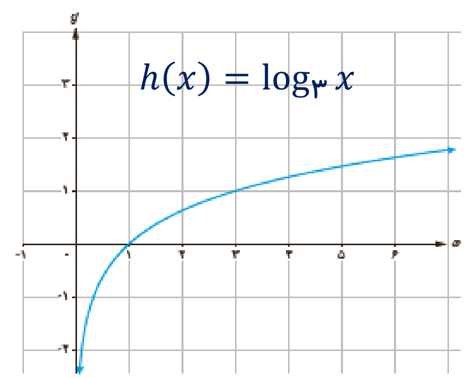
به عنوان مثال:

توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازهٔ $[0 , 2\pi]$ پیوسته اند.

تابع $h(x) = \log_{3} x$ روی بازهٔ $[1 , 2]$ پیوسته است.





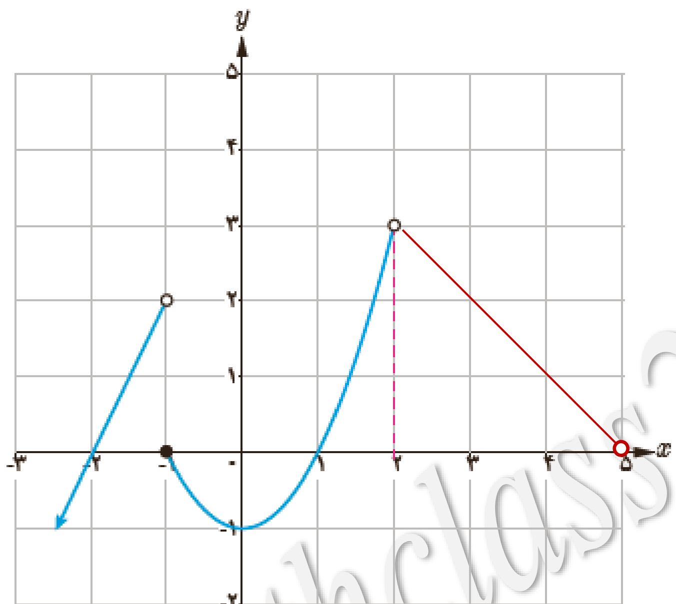


کار در کلاس ۱ صفحه ۱۴۱ کتاب درسی

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را کامل کنید.



ب) دامنه و برد تابع f را به دست آورید.

$D_f=(-\infty\,,\,۵)-\{۲\}$

$R_f=(-\infty\,,\,۳)$

پ) پیوستگی تابع f را روی بازه های $[-۱\,,\,۱]$ و $(۲\,,\,۵)$ و $[-۲\,,\,۰]$ بررسی کنید.

تابع f روی بازهٔ $(۲\,,\,۵)$ پیوسته است.

تابع f روی بازهٔ $[-۱\,,\,۱]$ پیوسته است زیرا در هر نقطه از بازهٔ $(-۱\,,\,۱)$ پیوسته و در نقطهٔ ۱- پیوستگی راست و در نقطهٔ ۱ پیوستگی چپ دارد.

تابع f روی بازهٔ $[-۲\,,\,۰]$ پیوسته نیست زیرا تابع در نقطهٔ ۱- پیوستگی چپ ندارد.

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۴۱ کتاب درسی

دربارهٔ تابع f کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) تابع f روی بازهٔ $(-\infty , -۱]$ پیوسته است. نادرست زیرا تابع f در نقطهٔ ۱- پیوستگی راست ندارد.

ب) تابع f روی بازهٔ $(-\infty , -۱)$ پیوسته است. درست

پ) تابع f روی بازهٔ $[۲ , ۵]$ پیوسته باشد. نادرست زیرا نقطهٔ ۵ متعلق به دامنهٔ تابع f نیست.

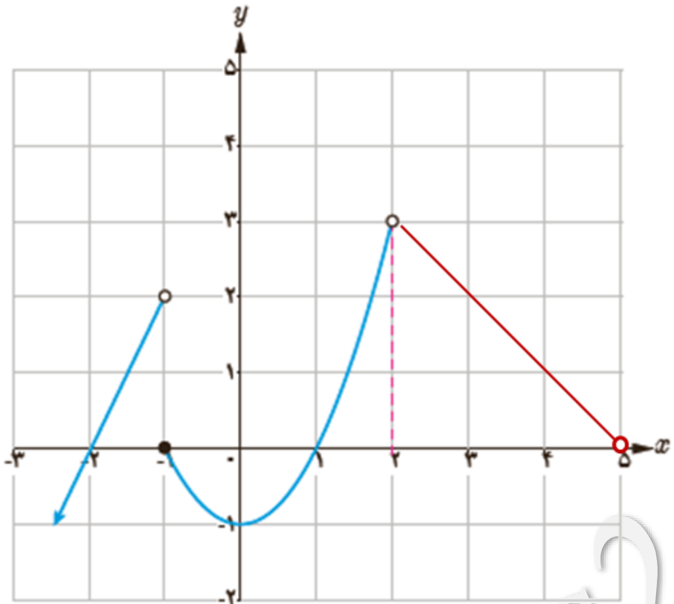
ت) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$ نادرست زیرا در $x=۵$ حد راست تابع f موجود نیست.

ث) $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$ درست

ج) تابع f روی بازهٔ $(-۲ , ۰)$ پیوسته باشد. نادرست زیرا تابع f در نقطهٔ ۱- پیوستگی چپ ندارد.

کار در کلاس ۳ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

با توجه به تابع
$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$$



الف) دو بازهٔ بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

تابع f روی بازهٔ $[-4\,,-2]$ پیوسته است.

تابع f روی بازهٔ $[-2\,,2]$ ناپیوسته است.

ب) a و b ای را مثال بزنید که تابع روی $(a\,,b)$ پیوسته باشد؛ امّا روی $[a\,,b]$ پیوسته نباشد.

می توانیم a را برابر ۱- و b را برابر ۲ در نظر بگیریم.

در این صورت داریم:

تابع روی $(-1\,,2)$ پیوسته باشد؛ امّا روی $[-1\,,2]$ پیوسته نباشد.

تمرین ۱ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

با توجه به توابع f ، g و h با ضابطه های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x) = ۲x + ۱ \qquad g(x) = ۲x + ۱ \quad , x \neq ۲ \qquad h(x) = \begin{cases} ۲ + x & x \neq ۲ \\ ۳ & x = ۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$f(۲) = ۲(۲) + ۱ = ۵$ $\qquad$ $g(۲) =$ موجود نیست $\qquad$ $h(۲) = ۳$

ب) حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(۲x + ۱) = ۲(۲) + ۱ = ۵$$

$$\lim_{x\to ۲} g(x) = \lim_{x\to ۲}(۲x + ۱) = ۲(۲) + ۱ = ۵$$

$$\lim_{x\to ۲} h(x) = \lim_{x\to ۲}(۲ + x) = ۲ + ۲ = ۴$$

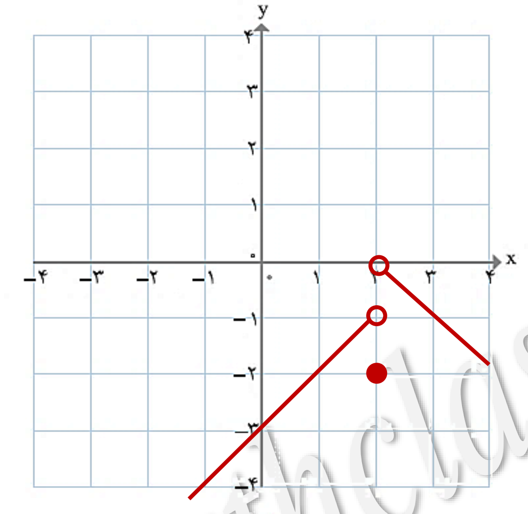
پ) کدام تابع در $x = ۲$ پیوسته است؟

تابع f ، زیرا مقدار و حد تابع f در $x = ۲$ با هم برابرند.

تمرین ۲ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید.

f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



تابع f در $x=۲$ ناپیوسته و در سایر نقاط دامنه اش پیوسته است.

تمرین ۳ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر بگیرید.

پیوستگی این توابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

تابع g در $x=۳$ پیوسته نیست زیرا $g(۳)$ موجود نیست.

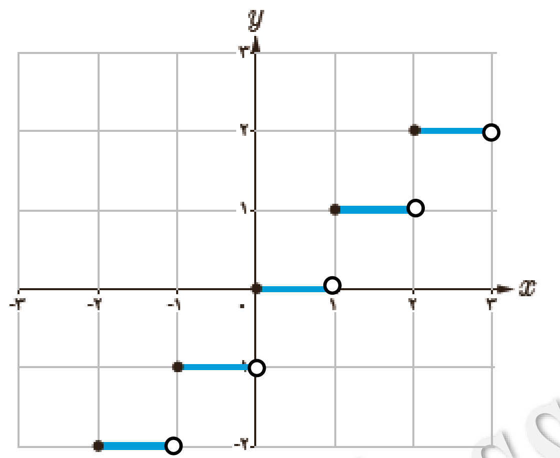
تابع f در $x=۳$ پیوسته است زیرا حد و مقدار تابع f در $x=۳$ با هم برابرند.

$$f(۳)=۶$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۳+۳=۶$$

تمرین ۴ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



تابع $[x]$ به ازای مقادیر صحیح ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است.

تمرین ۵ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^۲ & x>۰\end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

$$f(۰)=-۲(۰)+۲=۲$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(-۲x+۲)=-۲(۰)+۲=۲$$

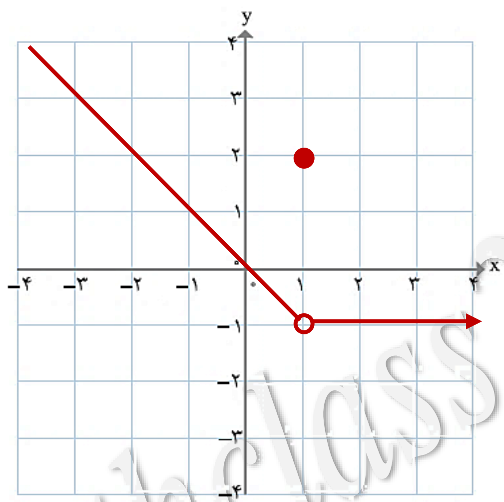
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}x^۲=(۰)^۲=۰$$

$\rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=$ موجود نیست

تابع $f(x)$ در $x=۰$ ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است.

تمرین ۶ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

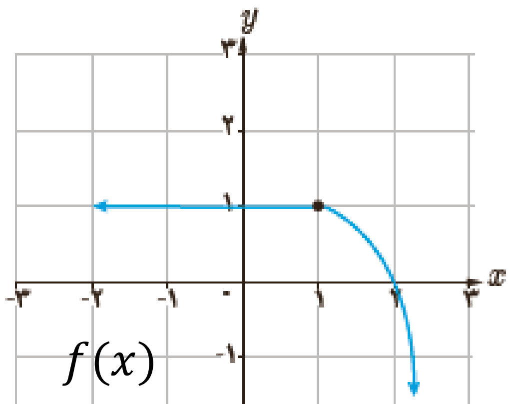
تابعی مثال بزنید که حد آن در $x=۱$ برابر ۱- باشد؛ ولی در $x=۱$ پیوسته نباشد. نمودار آن را رسم کنید.



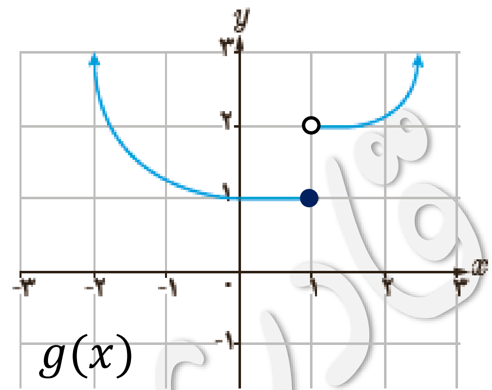
$$f(x)=\begin{cases}-x & x<۱\\ ۲ & x=۱\\ -۱ & x>۱\end{cases}$$

تمرین ۷ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

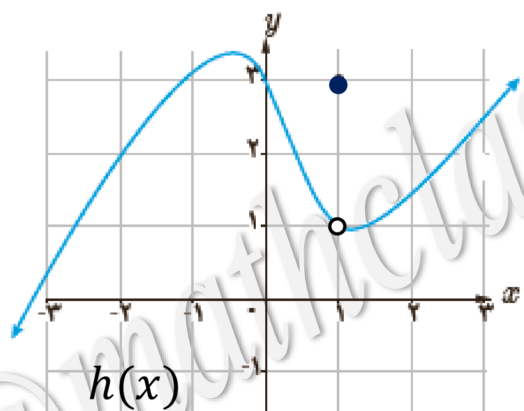
کدام یک از توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته است؟



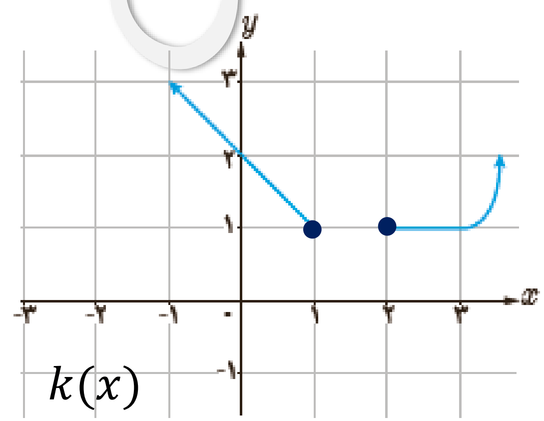
پیوسته است



پیوسته نیست



پیوسته نیست



پیوسته نیست

تمرین ۸ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می گیرد. روش های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی تواند اندازه گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش ها استفاده از تابع زیر است که در آن سن کودک بر حسب سال است.

$$f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & ۰\le t<۱ \\ ۲t+۱۰ & ۱\le t\le ۱۰ \end{cases}$$

به عنوان مثال:

جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع برابر است با: $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=۶\left(\frac{۱}{۲}\right)+۴=۷$

الف) $f(۲)$ و $f(۵)$ را بیابید.

$$f(۲)=۲(۲)+۱۰=۱۴$$

$$f(۵)=۲(۵)+۱۰=۲۰$$

ب) آیا f در بازهٔ $[۰\,,\,۱۰]$ پیوسته است؟

$$\lim_{t\to ۱^-} f(t)=\lim_{t\to ۱^-}(۶t+۴)=۶(۱)+۴=۱۰$$

$$\lim_{t\to ۱^+} f(t)=\lim_{t\to ۱^+}(۲t+۱۰)=۲(۱)+۱۰=۱۲$$

$\rightarrow \quad \lim_{t\to ۱} f(t)=$ موجود نیست

تابع $f(t)$ در $t=۱$ ناپیوسته است، در نتیجه در بازهٔ $[۰\,,\,۱۰]$ ناپیوسته است.

اگر توابع f و g در $x = c$ پیوسته باشند، آنگاه توابع زیر نیز در $x = c$ پیوسته هستند.

k برابر تابع f	$\frac{f}{g}$ به شرطی که $g \neq ۰$	$f+g$ $f-g$
k برابر تابع g	$\frac{g}{f}$ به شرطی که $f \neq ۰$	fg

پس می توان گفت، حاصل عمل جبری بین دو تابع پیوسته، تابعی پیوسته است.

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : پیوستگی تابع $h(x) = ۲x + \sin x$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

تابع h مجموع دو تابع پیوسته $۲x$ و $\sin x$ است لذا تابع h پیوسته است.

سوال ۲ : پیوستگی تابع $h(x) = x - [x]$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

تابع $[x]$ در $x = ۰$ ناپیوسته است لذا تابع h در $x = ۰$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \to ۰^-} h(x) = \lim_{x \to ۰^-} (x - [x]) = ۰ - [۰^-] = ۰ - (-۱) = ۱$$

$$\lim_{x \to ۰^+} h(x) = \lim_{x \to ۰^+} (x - [x]) = ۰ - [۰^+] = ۰ - ۰ = ۰$$

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = ۵$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-۵|}{x-۵} & x \neq ۵ \\ ۳ & x = ۵ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to ۵^-} f(x) = \lim_{x \to ۵^-} \frac{-(x-۵)}{(x-۵)} = \lim_{x \to ۵^-} (-۱) = -۱$$

$$\lim_{x \to ۵^+} f(x) = \lim_{x \to ۵^+} \frac{(x-۵)}{(x-۵)} = \lim_{x \to ۵^+} (+۱) = ۱$$

$$f(۵) = ۳$$

تابع f در $x = ۵$ پیوسته نیست.

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : نشان دهید تابع f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲-۱ & x<-۱\\ ۰ & -۱\le x<۰\\ \frac{۱}{۲}x & ۰\le x\end{cases}$$

پیوستگی یا ناپیوسته بودن تابع f را در $x=-۱$ و $x=۰$ بررسی می کنیم.

تابع f در سایر اعداد حقیقی پیوسته است.

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^-}\left((x-۱)^۲-۱\right)=((-۱)-۱)^۲-۱=۳$$

$$f(-۱)=\lim_{x\to -۱^+} f(x)=۰$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته نیست.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰$$

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\frac{۱}{۲}(۰)=۰$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است.

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : حدود a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۲$ پیوسته نباشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-x & x<۲ \\ ۲a+x^۲ & x\geq ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۳-x)=(۲)^۳-(۲)=۶$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲a+x^۲)=۲a+(۲)^۲=۲a+۴$$

برای این که تابع f در $x=۲$ پیوسته نباشد می بایست : $\lim_{x\to ۲^+} f(x)\neq \lim_{x\to ۲^-} f(x)$

$$۲a+۴\neq ۶ \quad\rightarrow\quad ۲a\neq ۲ \quad\rightarrow\quad a\neq ۱$$

تمرین تکمیلی

سوال ۶ : مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{x-1} - 1 & x < 2 \\ 7 & x = 2 \\ 3 + ax^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{b}{x-1} - 1\right) = \frac{b}{(2)-1} - 1 = b - 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3 + ax^2) = 3 + a(2)^2 = 4a + 3$$

$$f(2) = 7$$

چون تابع f در $x = 2$ پیوسته است لذا با مساوی قرار دادن حد راست تابع با مقدار تابع در $x = 2$ مجهول a و با مساوی قرار دادن حد چپ تابع با مقدار در $x = 2$ مجهول b را به دست می آوریم.

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad \to \quad 7 = 4a + 3 \quad \to \quad 2a = 2 \quad \to \quad a = 1$$

$$f(2) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad \to \quad 7 = b - 1 \quad \to \quad b = 8$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر در صفر پیوسته نخواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-a)=-a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=\lim_{x\to 0^+}a=a$$

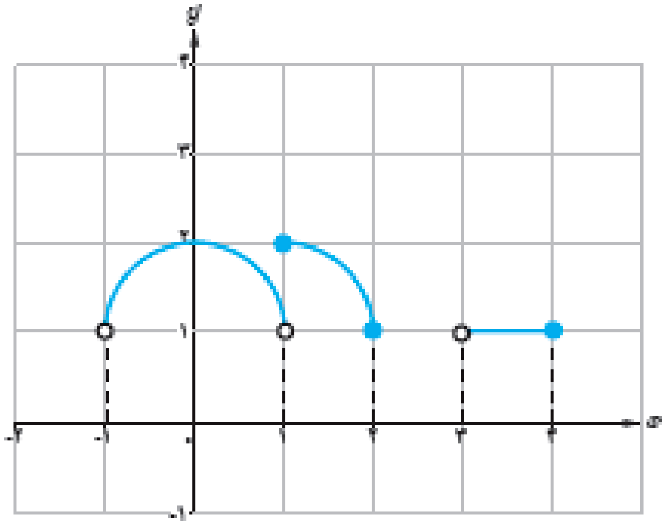
$$f(0)=1$$

برای این که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد می بایست با مساوی قرار دادن حد راست تابع با مقدار تابع در $x=0$ و همچنین با مساوی قرار دادن حد چپ تابع با مقدار در $x=0$ ، مقداری مساوی برای مجهول a به دست آید که می بینیم اینچنین نیست.

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\quad\rightarrow\quad -a=1\quad\rightarrow\quad a=-1$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\quad\rightarrow\quad a=1$$

تمرین تکمیلی



سوال ۸ : در شکل روبه رو نمودار تابع f رسم شده است.

کدام یک از عبارت های زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟

الف) تابع f در بازهٔ [۱ , ۲] پیوسته است.

پیوسته است زیرا در هر نقطه از بازهٔ (۱ , ۲) پیوسته و در نقطهٔ ۱ پیوستگی راست و در نقطهٔ ۲ پیوستگی چپ دارد.

ب) تابع f در بازهٔ [۳ , ۴] پیوسته است.

پیوسته نیست زیرا در هر نقطه از بازهٔ (۱ , ۲) پیوسته و در نقطهٔ ۳ پیوستگی راست ندارد.

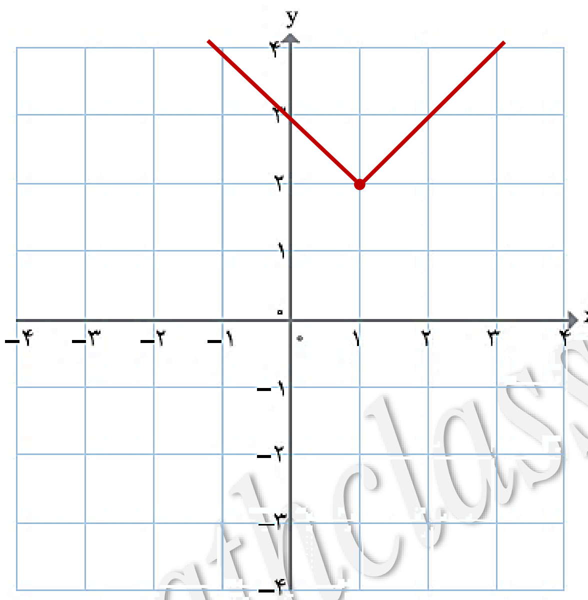
پ) تابع f در بازهٔ [۰ , ۲] پیوسته است.

پیوسته نیست زیرا در هر نقطه از بازهٔ (۰ , ۲) پیوسته نیست. (در یک پیوسته نیست)

تمرین تکمیلی

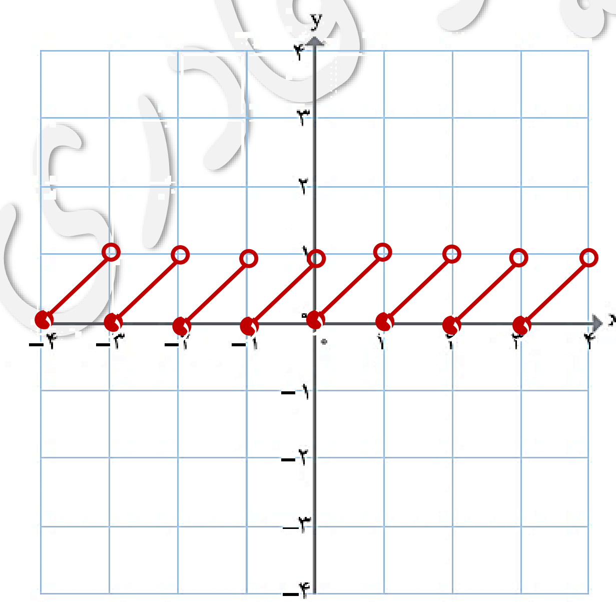
سوال ۹ : با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = |x - ۱| + ۲$



هیچ نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

ب) $y = x - [x]$



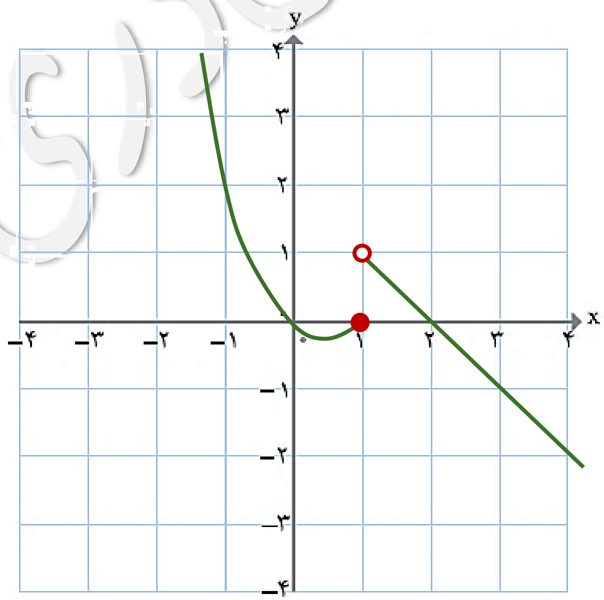
در اعداد صحیح ناپیوسته است.

در درس های قبل با روش رسم این توابع آشنا شده ایم.

تمرین تکمیلی

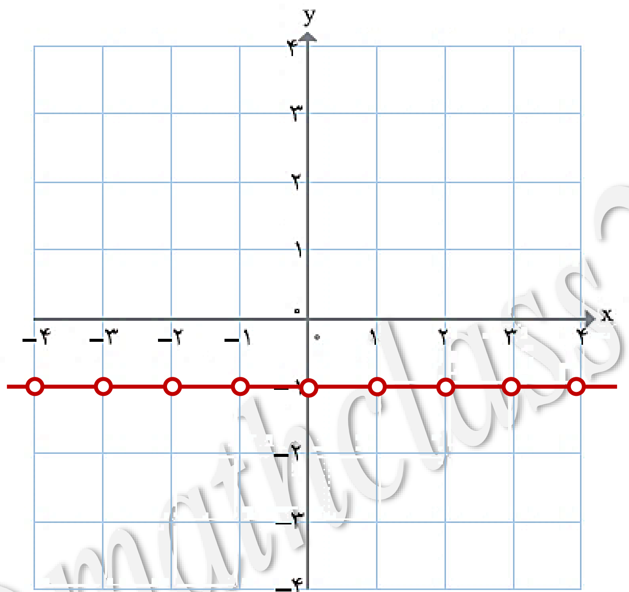
سوال ۱۰ : با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

ت) $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$



فقط در $x = 1$ ناپیوسته است.

پ) $y = x + [-x] = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$



در اعداد صحیح ناپیوسته است.

در درس های قبل با روش رسم این توابع آشنا شده ایم.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱ : مقدار a را طوری بیابید که توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۱ \\ a & x = ۱ \\ -x + ۲ & x > ۱ \end{cases}$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (۲x - ۱) = ۲(۱) - ۱ = ۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (-x + ۲) = -۱ + ۲ = ۱$$

$$f(۱) = a$$

چون تابع f در $x = ۱$ پیوسته است لذا با مساوی قرار دادن حد راست و حد چپ تابع با مقدار تابع در $x = ۱$ مجهول a را به دست می آوریم.

$$f(۱) = \lim_{x \to ۱^+} f(x) \quad \rightarrow \quad a = ۱$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲ : مقدار a را طوری بیابید که توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

ب) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ a & x = ۱ \end{cases}$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱} \left(\frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} \right) =$$

$$\lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)(x + ۲)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱} (x + ۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

$$f(۱) = a$$

چون تابع f در $x = ۱$ پیوسته است لذا با مساوی قرار دادن حد راست و حد چپ تابع با مقدار تابع در $x = ۱$ مجهول a را به دست می آوریم.

$$f(۱) = \lim_{x \to ۱} f(x) \quad \to \quad a = ۳$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳ : مقدار a را طوری بیابید که توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

پ) $h(x) = ([x] - a)[x]$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \big(([x] - a)[x]\big) = ([۱^-] - a)[۱^-] = ۰$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} \big(([x] - a)[x]\big) = ([۱^+] - a)[۱^+] = ۱ - a$$

$$f(۱) = ([۱] - a)[۱] = ۱ - a$$

چون تابع f در $x = ۱$ پیوسته است لذا با مساوی قرار دادن حد راست و حد چپ تابع با مقدار تابع در $x = ۱$ مجهول a را به دست می آوریم.

$$f(۱) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) \ \rightarrow\ ۱ - a = ۰ \ \rightarrow\ a = ۱$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۴ : تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+x & x<۰ \\ ۲ & x=۰ \\ ۲\cos x-\sin x & x>۰ \end{cases}$ داده شده است. پیوستگی تابع f را در $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(۰)=۲$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۳x^۲+x)=۳(۰)^۲+۰=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲\cos x-\sin x)=۲\cos ۰-\sin ۰=۲-۰=۲$$

$\rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=$ موجود نیست

تابع $f(x)$ در $x=۰$ ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵ : نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر در صفر پیوسته نیستند.

$$f(x)=\begin{cases} x & x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+۱ & x>۰ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} x=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲x+۱)=\lim_{x\to ۰^+} a=۱$$

$$f(۰)=a$$

همین طور که مشاهده می شود، حد چپ و راست تابع در $x=۰$ هیچگاه برابر نمی شوند.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)\neq \lim_{x\to ۰^-} f(x)$$

در نتیجه به ازای هر مقداری از a ، f در صفر پیوسته نخواهد بود.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۶ : تابع $f(x) = [x]$ در بازهٔ $(۲ , k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

تابع $f(x) = [x]$ در بازهٔ $(۲ , ۳)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k برابر ۳ می باشد.

سوال ۱۷ : بازهٔ بسته ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{۳ - x}$ بر آن بازهٔ پیوسته باشد.

می دانیم تابع f در دامنه اش پیوسته است. پس :

$$۳ - x \geq ۰ \quad \rightarrow \quad ۳ \geq x$$

اگر تابعی در بازه ای پیوسته باشد، آنگاه در هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

به عنوان مثال می توان گفت: تابع f روی بازهٔ $[۱ , ۲]$ پیوسته است.

پایان درس سوم