حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل پنجم: کاربرد مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت اول: آزمون یکنوایی

جلسه اول: صفحات ۱۱۲ تا۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

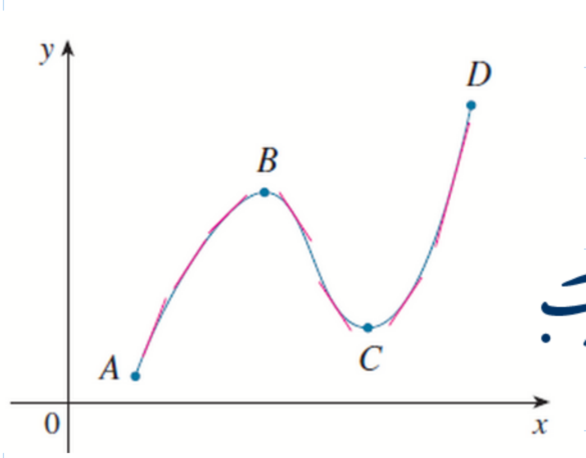
اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

در فصل اول با توابع یکنوا و غیریکنوا آشنا شدید و یکنوایی تابع را با توجه به نمودارش بررسی کردیم.



به نمودار مقابل و خط‌های مماس رسم شده دقت کنید:

در بازه‌هایی که تابع صعودی است شیب خط‌های مماس مثبت و در بازه‌هایی که تابع نزولی است شیب خط‌های مماس منفی است.

۱) آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارت دیگر برای بررسی یکنوایی تابع مشتق پذیر f، از آن مشتق می‌گیریم و مشتق را با رسم جدول، تعیین علامت می‌کنیم. به این جدول تعیین علامت، **جدول تغییرات** تابع می‌گوییم. اگر علامت مشتق در بازه‌ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی و اگر علامت مشتق در بازه‌ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است و بعکس.

مثال: یکنوایی تابع $y=x^3-3x^2+2$ را بررسی کنید.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(2,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی و در بازه $(0,2)$ تابع نزولی است.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a,b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ را بدست آورید.

$$f'(x)=\frac{1(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

تابع در $[-1,1]$ صعودی اکید $\Rightarrow a=-1$ و $b=1 \Rightarrow b-a=1+1=2$

نکته: در توابع پیوسته اگر مشتق تابع در نقاطی جدا از هم در یک بازه صفر شود باز هم تابع روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مثال: یکنوایی تابع $f(x)=x^3$ را بررسی کنید.

$$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x)=-x^3+mx^2-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است؟

$$f'\leqslant 0 \Rightarrow f'(x)=\underbrace{-3}_{<0}x^2+2mx-12\leqslant 0$$

$$\Delta\leqslant 0 \Rightarrow (2m)^2-4(-3)(-12)\leqslant 0$$

$$4m^2-144\leqslant 0 \Rightarrow m^2\leqslant 36 \Rightarrow -6\leqslant m\leqslant 6$$

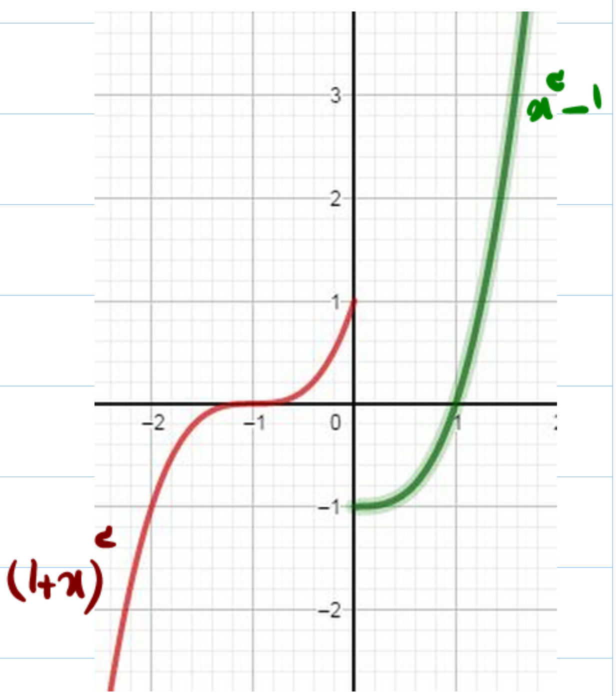
$$m\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$$

نکته: آزمون مشتق اول برای توابع پیوسته برقرار است. پس در توابع کسری، در بازه‌هایی می‌توانیم از این آزمون استفاده کنیم که شامل ریشه مخرج نباشد. در توابع چندضابطه‌ای هم در نقاط مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 0 \\ (1+x)^3 & x<0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(0,2)$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>0 \\ \text{موجود نیست} & x=0 \\ 3(x+1)^2 & x<0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی است ولی برای رسیدن به شاخه سبز باید نزول کند. تابع در $(0,+\infty)$ هم اکیداً صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(0,2)$ که شامل صفر نیست، صعودی است

مثال: تابع $f(x)=\frac{5}{x^2-2x}$ روی کدام بازه نزولی است؟

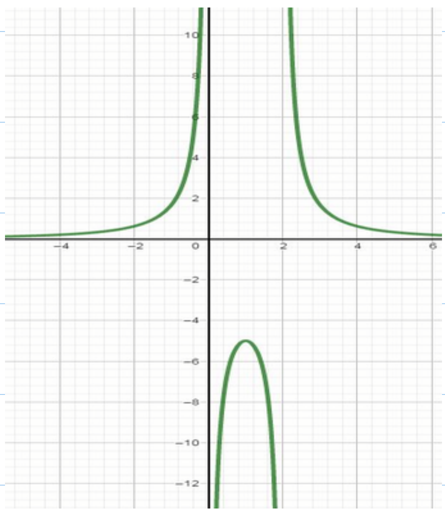
۱) $(1,3)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,4)$

$$f'(x)=\frac{0-5(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-10x-10}{(x^2-2x)^2}$$

$$-10x-10=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن یک علامت داشته باشد و شامل ریشه مخرج نباشد که فقط گزینه ۴ بازه $(2,4)$ هر دو ویژگی را دارد.



به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت دوم: نقطه بحرانی، اکسترمم‌های نسبی

جلسه دوم: صفحات ۱۱۲ تا۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

۲) اکسترمم های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد

که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می نامیم.

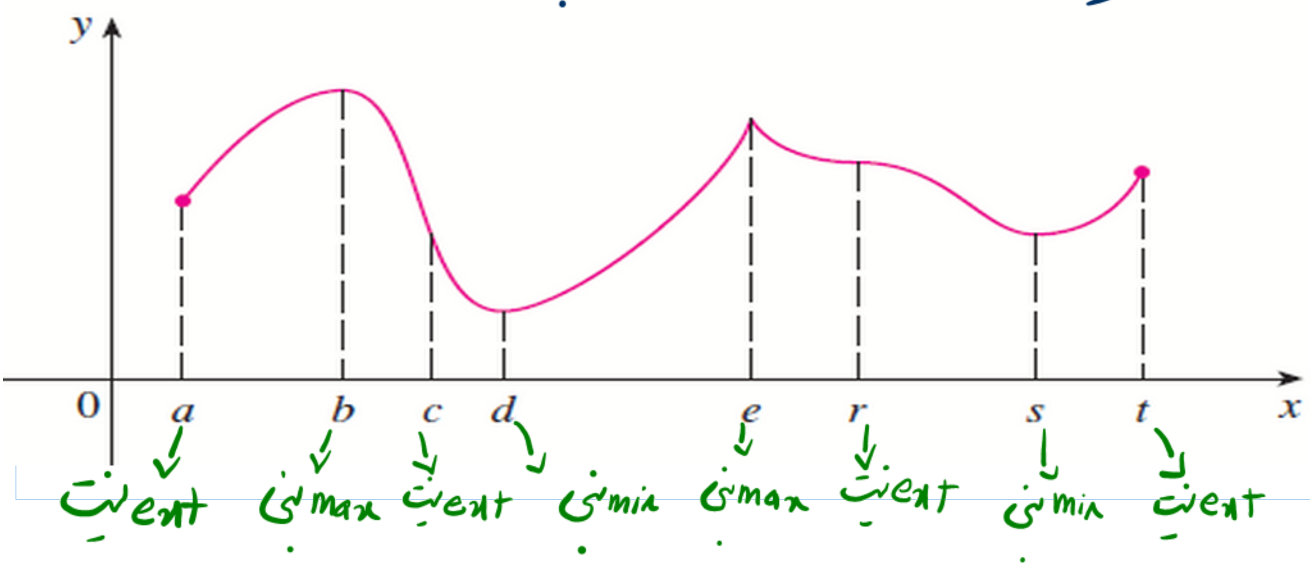
ب) تابع f در نقطه ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد

که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن

min نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن max نسبی می گوییم.

مثال: در نمودار زیر کدام یک از نقاط مشخص شده اکسترمم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترمم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت :

۱) نقطه ابتدا و انتهای دامنه نمی تواند نقطه اکسترمم تابع باشد.

۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

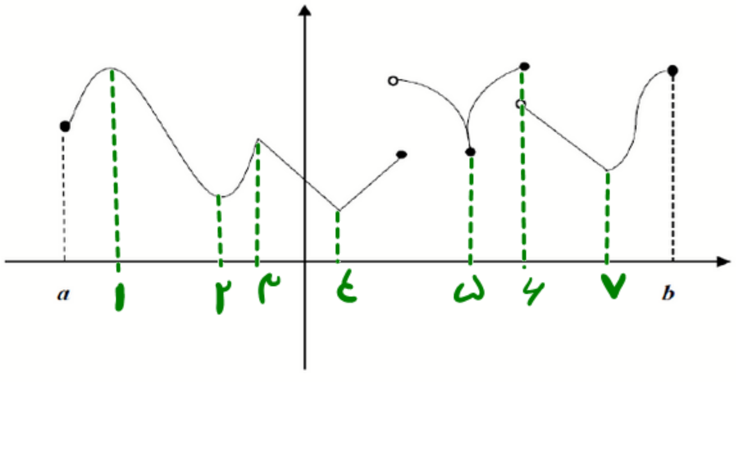
۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه : $f'(c)=0$.

۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد یعنی مختصات این نقطه در معادله تابع صدق می کند.

۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم max نسبی هستند و هم min نسبی.

مثال : تابع مقابل در بازه $[a,b]$

چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ ۷ نقطه

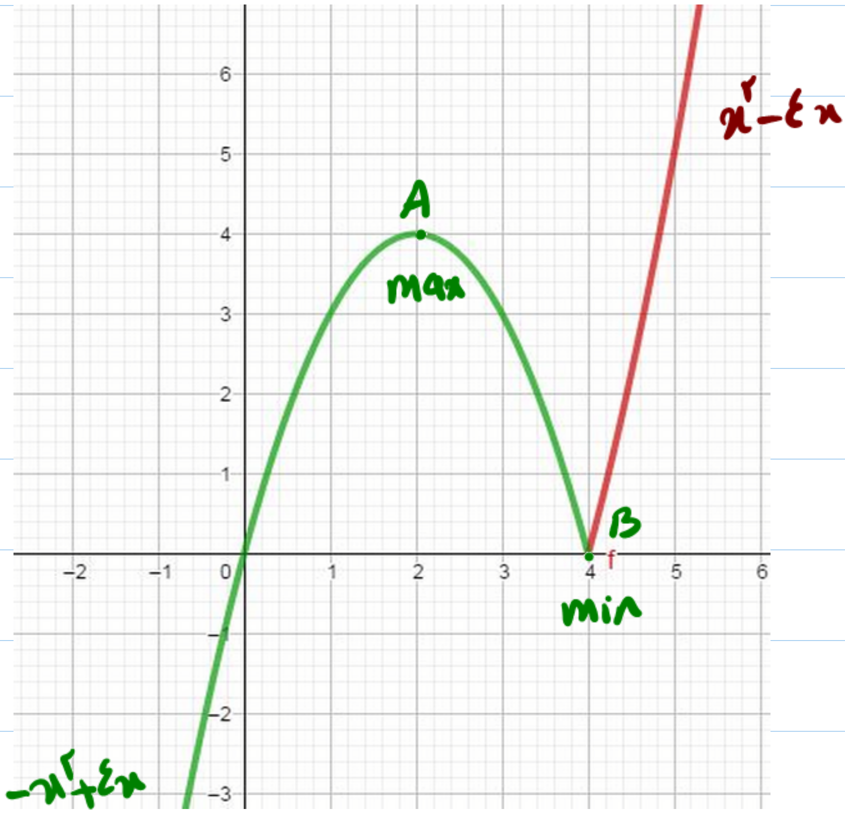


مثال کنکور ۹۸ تجربی :

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$$f(x)=\begin{cases} x(x-4) & x\geq 4 \\ -x(x-4) & x<4 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x & x\geq 4 \\ -x^2+4x & x<4 \end{cases}$$



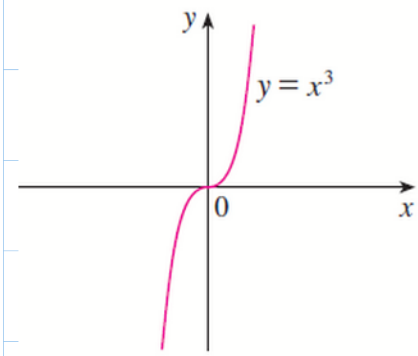
$A(2,4)$: نقطه max $\qquad B(4,0)$ نقطه min

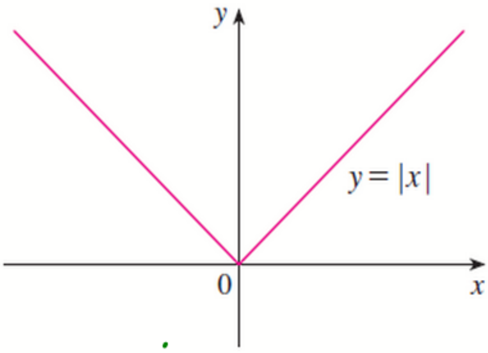
$$AB=\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$ گزینه ۴

نقطه بحرانی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

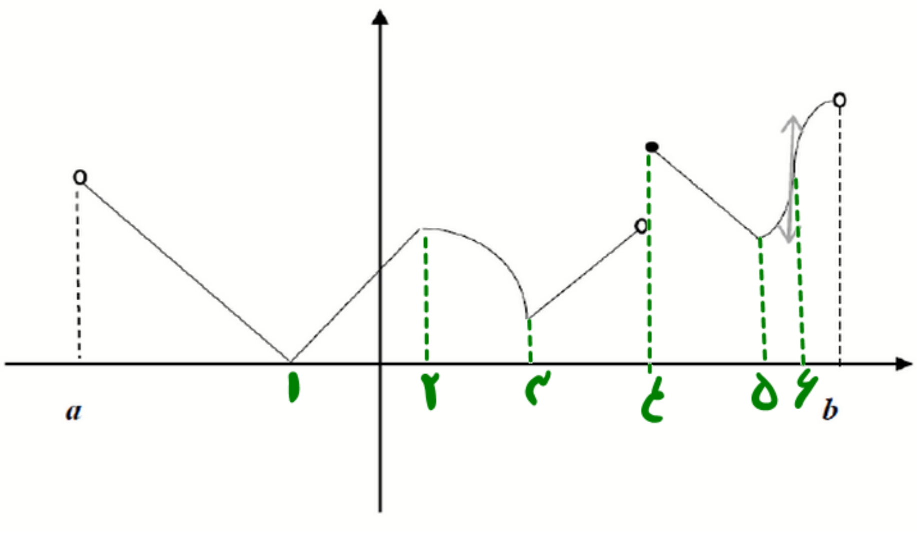




$f'(0)=0$ ، $x=0$ بحرانی

$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ بحرانی

مثال : تابع f با نمودار زیر در بازه (a,b) چند نقطه بحرانی دارد؟



در ۶ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

ولی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

توجه: نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x)=4x^3-12x$ در بازه $[0,4]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow 12(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=-1$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x=1$ و $x=0$ و $x=4$ است.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

1) $f(x)=x^2(x+2)^3$

$$f'(x)=2x(x+2)^3+3(x+2)^2x^2=x(x+2)^2\big(2(x+2)+3x\big)=0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-2,\ x=-\frac{4}{5}$$ نقاط بحرانی

۲) $g(x) = \dfrac{x^3}{(1-x)^2}$ $\qquad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x^2(1-x)\big(3(1-x) + 2x\big) = 0 \Rightarrow x^2(1-x)(-x+3) = 0$$

$x = 0,\ x = \overset{\to \notin D_f}{1},\ x = 3 \Rightarrow$ $x=0$, $x=3$ بحرانی اند

$g'(x) =$ موجود نیست $\Rightarrow (1-x)^4 = 0 \Rightarrow x = 1 \notin D_f$

۳) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & -2 < x \leq 2 \\ x^3 - 18x & 2 < x < 4 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & -2 < x < 2 \\ \text{موجود نیست} & x = 2 \\ 3x^2 - 18 & 2 < x < 4 \end{cases}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \in (-2, 2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \begin{cases} \sqrt{6} \in (2, 4) \\ -\sqrt{6} \notin (2, 4) \end{cases}$$

f' در $x=2$ موجود نیست پس $\{-1,1,2,\sqrt{6}\}$ نقاط بحرانی اند.

۴) $h(x)=x|x^2-1|$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$h(x)=\begin{cases} x(x^2-1) & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ -x(x^2-1) & -1<x<1 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} x^3-x & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ -x^3+x & -1<x<1 \end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ \text{موجود نیست} & x=1 \\ \text{موجود نیست} & x=-1 \\ -3x^2+1 & -1<x<1 \end{cases}$$

$h'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$ و $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}>-1$ پس در این حالت نقاط بحرانی نیستند

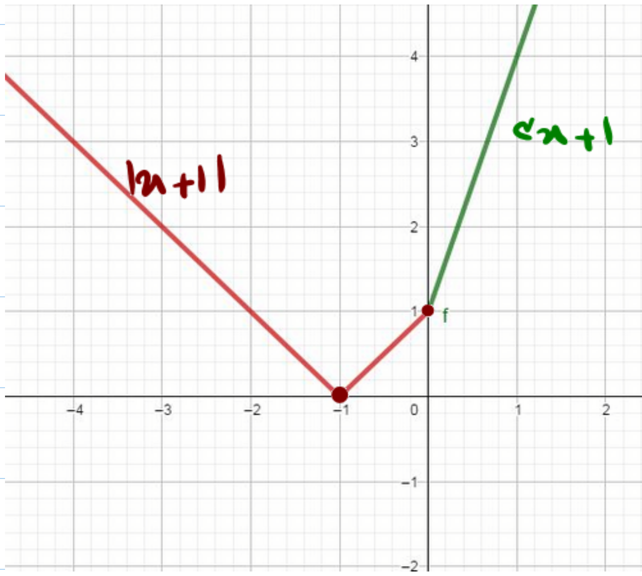
$\Rightarrow -3x^2+1=0 \Rightarrow -3x^2=-1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

در این ضابطه هر دو عدد در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند پس عرابی اند.

بنابراین $\{\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ نقاط عرابی اند.

ه) $f(x) = |2x + |x| + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} |\overbrace{2x+x}^{3x}+1| & x \geqslant 0 \\ |2x - x + 1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x \geqslant 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$

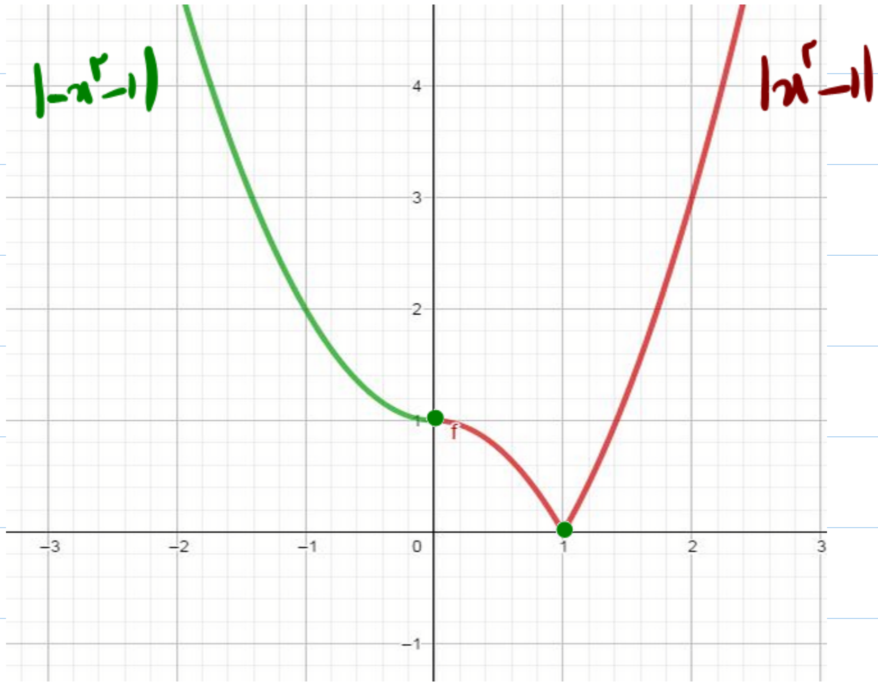


در $x = 0$ و $x = -1$

مشتق موجود نیست پس این نقاط عرابی اند.

و) $g(x) = |x|x| - 1|$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x) - 1| & x \geqslant 0 \\ |x(-x) - 1| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \geqslant 0 \\ |-x^2 - 1| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق صفر است. پس $\{0,1\}$

نقاط بحرانی هستند.

v) $f(x)=(x-2)\,x^{\frac{2}{3}}$

$f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)=0 \rightarrow 5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$

$f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$ پس $\{0,\frac{4}{5}\}$ نقاط بحرانی‌اند.

۸) $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'(x)$: موجود نیست $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}=0 \Rightarrow 3x-x^3=0$

$\Rightarrow x(3-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ 3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

پس $\{\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}\}$ نقاط بحرانی اند.

۹) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$D_f: 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow D_f=[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0$$

۲ـ و ۲ نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌اند و در شیب معوج هم هستند پس بحرانی اند

مجموعه نقاط بحرانی با طول های: $\{0, \pm 2\}$

1.) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

$D_f: \quad x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $\{0, \pm 1\}$ مجموعه طول های نقاط بحرانی است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت سوم: آزمون مشتق اول

جلسه سوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترمم های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، max نسبی دارد.

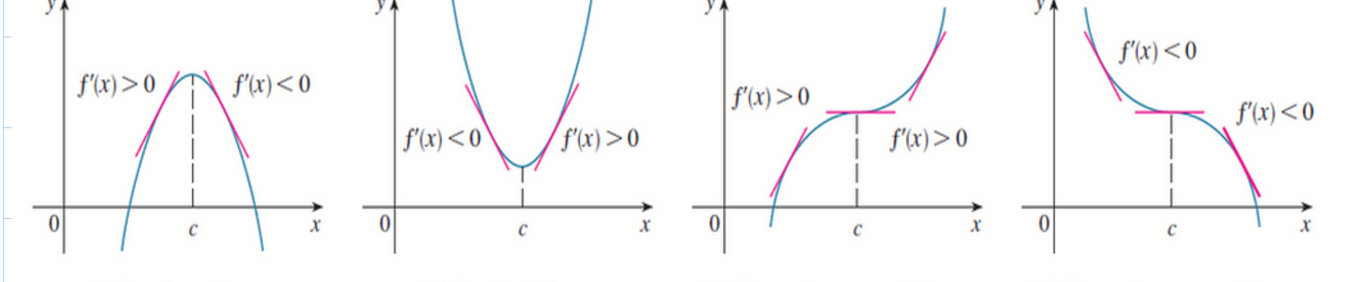
x		c	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، min نسبی دارد.

x		c	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد آنگاه f در c ، max یا min نسبی ندارد.

به شکل های زیر دقت کنید :



(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^5-5x^3$ را بیابید.

$$f'(x)=5x^4-15x^2=0 \Rightarrow 5x^2(x^2-3)=0 \begin{cases} 5x^2=0 \to x=0 \\ x^2-3=0 \to x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0	1	$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

مثال: فاصله نقطه min نسبی تابع $y=x^3-12x+12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y'=3x^2-12=0 \xRightarrow{\div 3} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$	

$A(2,-4)$ min نسبی $\qquad O(0,0)$

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

$$y'=\frac{1(x^2-2x)-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}=\frac{x^2-2x-2\overbrace{(x-1)(x+1)}^{x^2-1}}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

$$y'=0 \rightarrow -x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta=4-4\times(-1)(2)=4+8=12$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{-2}=\begin{cases}-1+\sqrt{3}\\ -1-\sqrt{3}\end{cases}$$

$y'=$ موجود نیست : $(x^2-2x)^2=0 \rightarrow x=0,2$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^{2}+2x-3}{x^{2}+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}(x^{2}+1)-2x(x^{2}+2x-3)}{(x^{2}+1)^{2}}$$

$$=\frac{2(x^{3}+x+x^{2}+1-x^{3}-2x^{2}+3x)}{(x^{2}+1)^{2}}==\frac{2(-x^{2}+4x+1)}{(x^{2}+1)^{2}}$$

$$f'(x)=0 \quad : \quad -x^{2}+4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-4(-1)(1)=20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=2\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^{2}+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^{2}+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{10+6\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{25-10\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30}{25-20}$$

گزینه ۱

$$= \frac{-5+5\sqrt{5}}{5} = -1+\sqrt{5}$$

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = x-\sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}} \qquad D_f = [\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

$$y'=0 : \quad \sqrt{2x-1}-1=0 \rightarrow \sqrt{2x-1}=1 \rightarrow 2x-1=1 \Rightarrow x=1$$

$y' =$ ناموجود $: \quad \sqrt{2x-1}=0 \Rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

min نسبی $: \quad (1,0)$

مثال: طول نقطه max نسبی تابع $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2 + 2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1}=\frac{2(x-1)^2+6(x-1)x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'=0 \rightarrow 2(x-1)(4x-1)=0 \rightarrow x=1,\frac{1}{4}$$

$f'=$ موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f'	$-$	ت ن	$+$		$-$		$+$	
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		min		max		min		

گزینه ۱

مثال: اگر $(1,1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^4+ax^2+bx+1$ باشد، a,b را بیابید.

$(1,1) \xrightarrow[\text{در تابع صدق می‌کند}]{\text{روی نمودار تابع}} f(1)=1+a+b+1=1 \rightarrow a+b=-1$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=4x^3+2ax+b \Rightarrow f'(1)=4+2a+b=0$

$\rightarrow 2a+b=-4$

$$-\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases}$$
$a=-3$

$-3+b=-1 \rightarrow b=2$

مثال: تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ فاقد اکسترمم نسبی است. حدود a را بیابید.

$$f'(x)=3x^2+2ax+1$$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضریب x^2، ۳ مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$$f'\geq 0 \;:\; \Delta\leq 0 \;:\; 4a^2-12\leq 0 \rightarrow a^2\leq 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت چهارم: اکسترمم‌های مطلق

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۲ تا۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

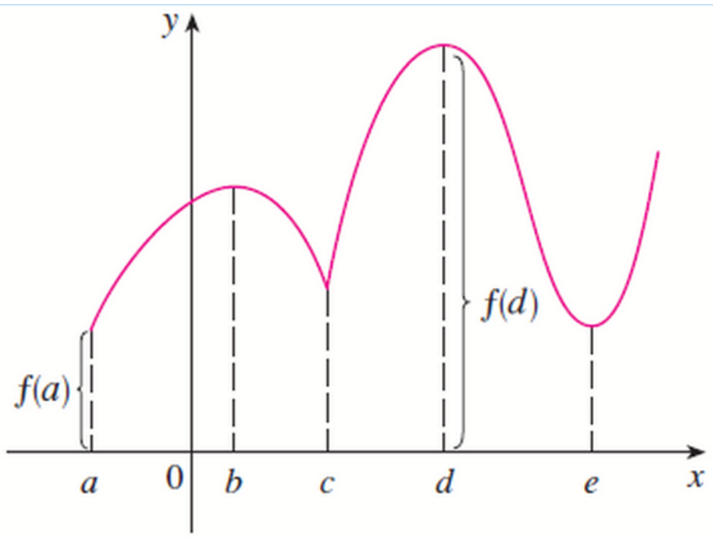
گروه ریاضی استان همدان

۴) اکسترمم های مطلق تابع :

الف) تابع f در $x=c \in D_f$ ، ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f داشته باشیم : $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌گوییم.

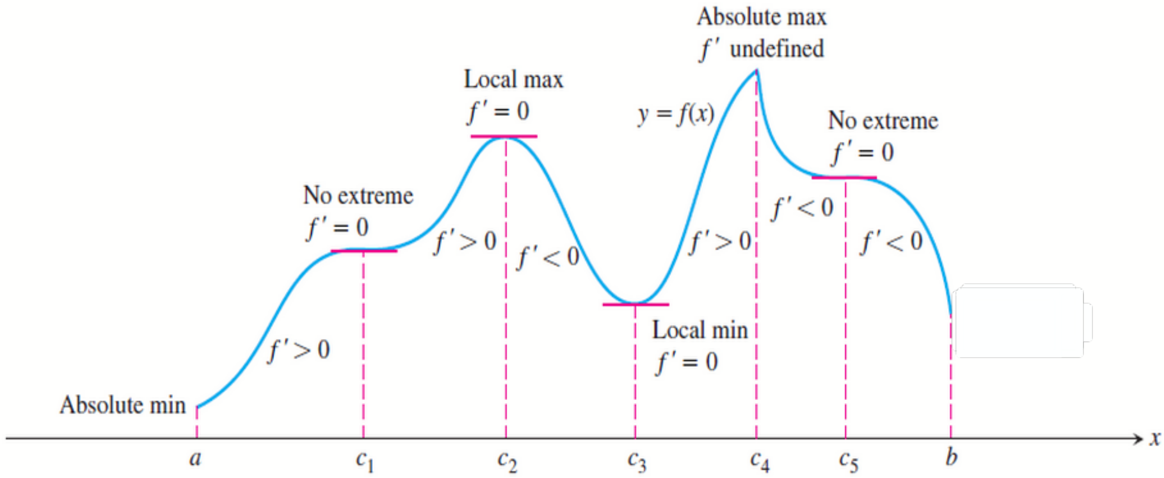
ب) تابع f در $x=c \in D_f$ ، مینیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f داشته باشیم : $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می‌گوییم.

در نمودارهای زیر داریم :



در $x=a$ ، min مطلق داریم.

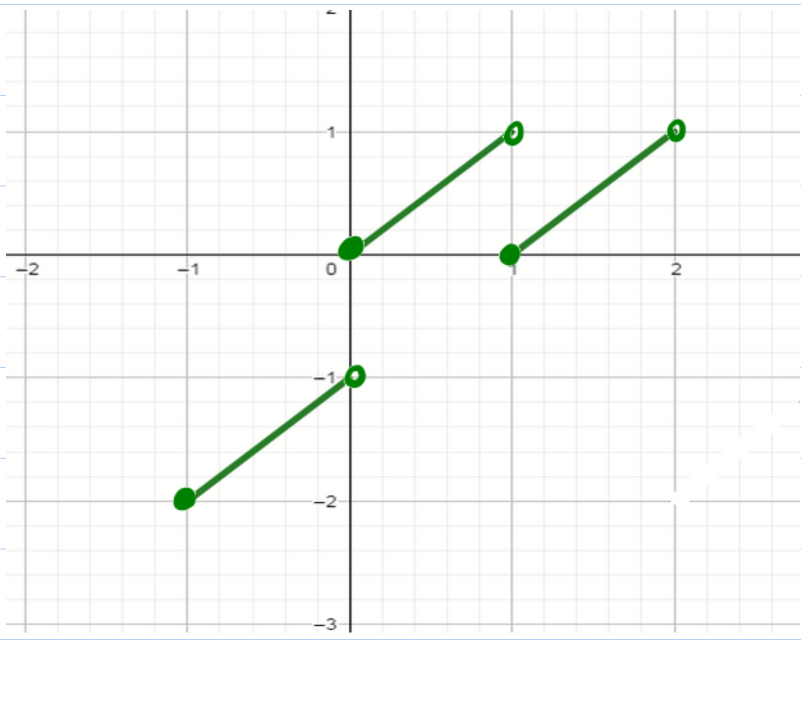
در $x=d$ ، max مطلق داریم.



min مطلق   max نسبی   min نسبی   max مطلق و نسبی

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=x-[x]^2$ را روی بازه $[-1,2)$ بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\leq x<0 \\ x & 0\leq x<1 \\ x-1 & 1\leq x<2 \end{cases}$$

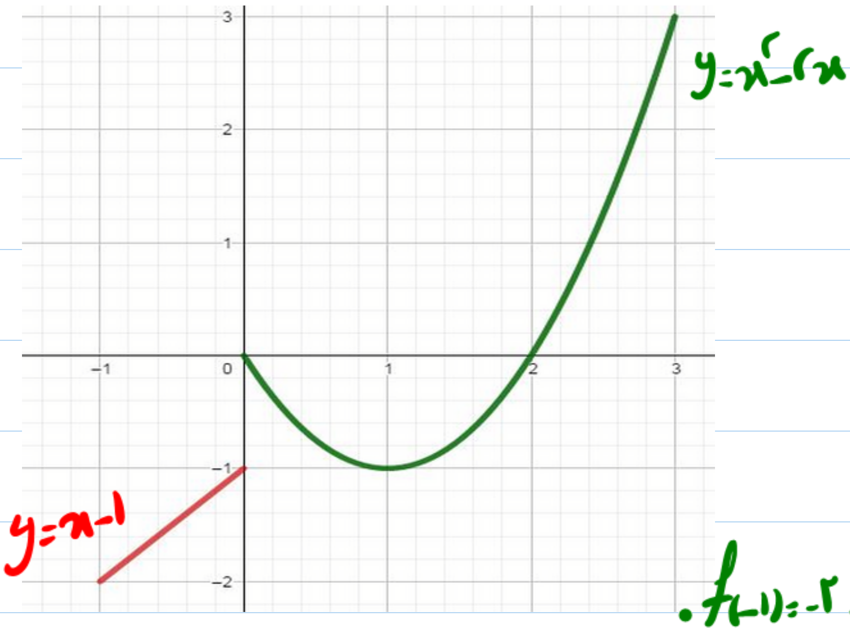


max مطلق ندارد.

$x=-1$ ، min مطلق داریم

که مقدار آن $f(-1)=-2$ است.

مثال: مقادیر max, min مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ x-1 & -1\le x<0 \end{cases}$ را بیابید.



max مطلق در $x=3$ ؛

مقدار $f(3)=3$.

min مطلق در $x=-1$ با مقدار -2 ، $f(-1)=-2$.

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه max و min مطلق دارد.

روش یافتن اکسترمم های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a,b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a,b]$ می‌یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب می‌کنیم. بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی ۹۸

مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2-15x$ را روی بازه $[-4,4]$ کدام است؟

۱) -18 و 24 ۲) -45 و 27 ۳) -36 و 27 ۴) -27 و 36

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \quad \begin{cases} x = 5 \notin D_f \\ x = -3 \ \checkmark \end{cases}$$

پس تابع ۳ نقطه بحرانی در $x=-4$ ، $x=-3$ و $x=3$ دارد.

x	-4	-3	3
y	$\frac{68}{3}$	27	-45
		مطلق max	مطلق min

$$f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{-64 - 48 + 180}{3} = \frac{68}{3}$$

$$f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 - 15(-3) = -9 - 9 + 45 = 27$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3^3) - (3)^2 - 15(3) = 9 - 9 - 45 = -45$$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $[-\frac{1}{2}, 1]$ چقدر از کمترین مقدار آن در این بازه بیشتر است؟

۱) $\frac{16}{21}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{19}{21}$

$$f'(x) = \frac{-(2x-1) \times 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$ بحرانی

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{3}$	1
	min	max	

$$f(-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{1+2+4}{4}}=\frac{4}{7}$$

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{1-2+4}{4}}=\frac{4}{3}\ ,\quad f(1)=\frac{1}{1-1+1}=1$$

$$max-min=\frac{4}{3}-\frac{4}{7}=\frac{28-12}{21}=\frac{16}{21}$$

گزینه ۱ ✓

مثال: مقادیر max، min مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ را بیابید.

$$f'(x)=\frac{1\times\sqrt{4-x^2}}{1}+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\times x=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D_f:\ 4-x^2\geq 0\rightarrow x^2\leq 4\rightarrow -2\leq x\leq 2\rightarrow D_f=[-2,2]$$

$$f'(x)=0\rightarrow -2x^2+4=0\rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
y	0	-2	2	0
		min	max	

$f(2) = f(-2) = 0$

$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$

مقدار max مطلق $= 2$ ، مقدار min مطلق $= -2$

مثال: حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) 20 ۳) 10 ۴) $5\sqrt{5}$

D_f : ① $x \geq 0$

② $5 - x \geq 0 \to x \leq 5$

$D_f = ① \cap ② = [0, 5]$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$f'(x) = 0 \to 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \to 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$

$\xrightarrow[2]{\text{به توان}}$ $4(5-x)=x \rightarrow 20-4x=x \rightarrow -5x=-20 \rightarrow x=4$

x	0	4	5
y	$\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$
	min	max	

$f(0)=0+\sqrt{5}=\sqrt{5}$

$f(4)=2\times 2+1=5$

$\max \times \min = 5\sqrt{5}$ گزینه ۴

$f(5)=2\sqrt{5}+0=2\sqrt{5}$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x}$ در فاصله $[-1,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{-3}{4}$ ۲) $\frac{-3}{8}$ ۳) $\frac{-2}{3}$ ۴) $\frac{-8}{3}$

$f(x)=(2x-1)x^{\frac{1}{3}}=2x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8x-1)=\frac{8x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)=0 \rightarrow 8x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{8}$

$f'(x)=$ موجود نیست : $3\sqrt[3]{x^2}=0 \rightarrow x=0$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	3	0	$-\frac{3}{8}$	1
	max		min	

$f(-1) = -3 \times (-1) = 3$ $\qquad$ $f(0) = (-1) \times 0 = 0$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4} - 1) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ $\qquad$ $f(1) = 1 \times 1 = 1$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازه (a,b)، در روش بالا به جای $f(a)$، $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$، $\lim_{x \to b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آنگاه تابع در این بازه max یا min مطلق نخواهد داشت. در مورد بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$ و $(-\infty,a]$، $(a,+\infty)$، $[a,+\infty)$ و $(-\infty,+\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^4 - 3x^2$ در بازه $[-1,2)$ مفروض است. اکسترمم‌های مطلق آن را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(2) = 8 - 12 = -4 \quad , \quad f(-1) = -1 - 3 = -4$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x^3 - 3x^2 = 64 - 48 = 16$$

x	-1	0	2	$\overset{حد}{4}$
y	-4	0	-4	16

چون مقدار max در حد تابع وقتی $x \to 4^-$

اتفاق افتاده است پس max مطلق ندارد ولی min مطلق دارد: $f(-1) = f(2) = -4$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty$$ فاقد max مطلق است.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$ در $x = 2$، min مطلق دارد:

گزینه ۲ : $f(2) = 4 + 8 = 12$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

قسمت پنجم: بهینه سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

بهینه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بیشترین یا کم ترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی شود و باید با توجه به داده های مسأله تابع هدف را بسازیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات انجام می دهیم:

۱ـ درصورت لزوم شکل مناسبی رسم می کنیم.

۲ـ اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کمکی) آن را برحسب یک متغیر می نویسیم.

۳ـ از تابع هدف مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم. مقدار اکسترمم تابع هدف را محاسبه می کنیم.

مثال : اگر x و y دو عدد مثبت باشد که $xy=6$، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+3y$ را محاسبه کنید.

رابطه کمکی : $xy=6 \rightarrow y=\frac{6}{x}$

$$P = 2x + 3\times\frac{6}{x} \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{18}{x}$$ تابع هدف

$$P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{x^2} = 2 \to 2x^2 = 18 \to x^2 = 9 \xRightarrow{x>0} x = 3$$

$$y = \frac{6}{3} = 2 \qquad P_{min} = 2\times 3 + 3\times 2 = 6 + 6 = 12$$

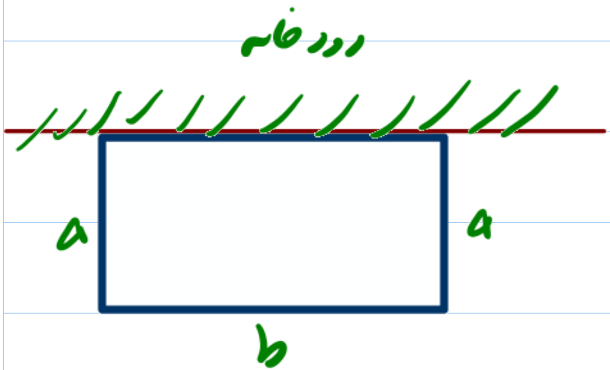
مثال: اگر $x+y=4$ باشد، ماکزیمم x^3y را بیابید.

$$y = 4 - x \;:\; P = x^3 y \Rightarrow P(x) = x^3(4-x) = 4x^3 - x^4$$

$$P'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x) = 0 \begin{cases} 4x^2 = 0 \to x = 0 \to min \\ 3 - x = 0 \to x = 3 \to max \end{cases}$$

$$y = 4 - 3 = 1 \;:\; P_{max} = 3^3 \times 1 = 27$$

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟



$$48 = 2a + b$$ رابطه اصلی

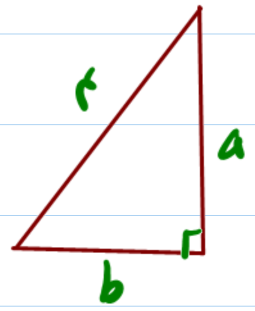
$$\to b = 48 - 2a$$

تابع هدف : $S = a\times b = a(48-2a) = 48a - 2a^2$

$S'(a) = 48 - 4a = 0 \to 4a = 48 \to a = 12 \; ; \; b = 48 - 24 = 24$

$S_{max} = 12 \times 24 = 288$

مثال : طول وتر مثلث قائم الزاویه ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن را بیابید.



رابطه فیثاغورس : $a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - a^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{16 - a^2}$

$S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow S = \frac{1}{2}a\sqrt{16-a^2}$

$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16-a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{16-a^2}} \times \frac{1}{2}a$

$S'(a) = \frac{16-a^2-a^2}{2\sqrt{16-a^2}} = \frac{16-2a^2}{2\sqrt{16-a^2}} = \frac{8-a^2}{\sqrt{16-a^2}}$

$S'(a) = 0 \to 8 - a^2 = 0 \to a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$

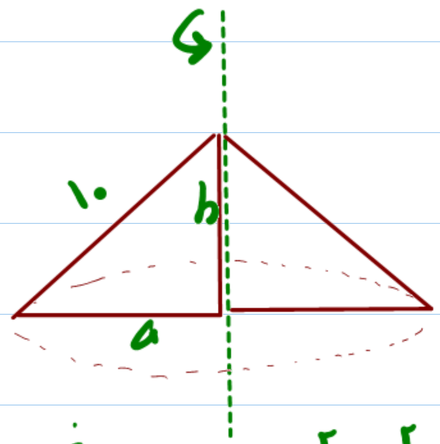
$S_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

مثال: کنکور تجربی ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصـل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود که شعاع قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند:



تابع هدف: $V=\frac{1}{3}\pi a^2 b$

رابطه کمکی: $a^2+b^2=100 \rightarrow a^2=100-b^2$: رابطه فیثاغورس

$$V=\frac{1}{3}\pi(100-b^2)b=\frac{1}{3}\pi(100b-b^3)$$

$$V'(b)=\frac{1}{3}\pi(100-3b^2)=0 \rightarrow 3b^2=100 \rightarrow b^2=\frac{100}{3}$$

$$a^2=100-\frac{100}{3}=\frac{200}{3}$$

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}}}=\sqrt{2}$$

گزینه ۴

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۹:

کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+7}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

نقطهٔ $B(x,y)$ را روی تابع در نظر می‌گیریم. فاصله $A(5,0)$ تا B را تابع هدف

می‌گیریم که باید min شود:

رابطه کمکی $y=\sqrt{2x+7}$ $\qquad AB=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}$

تابع هدف $AB=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$

$$(AB)'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$$

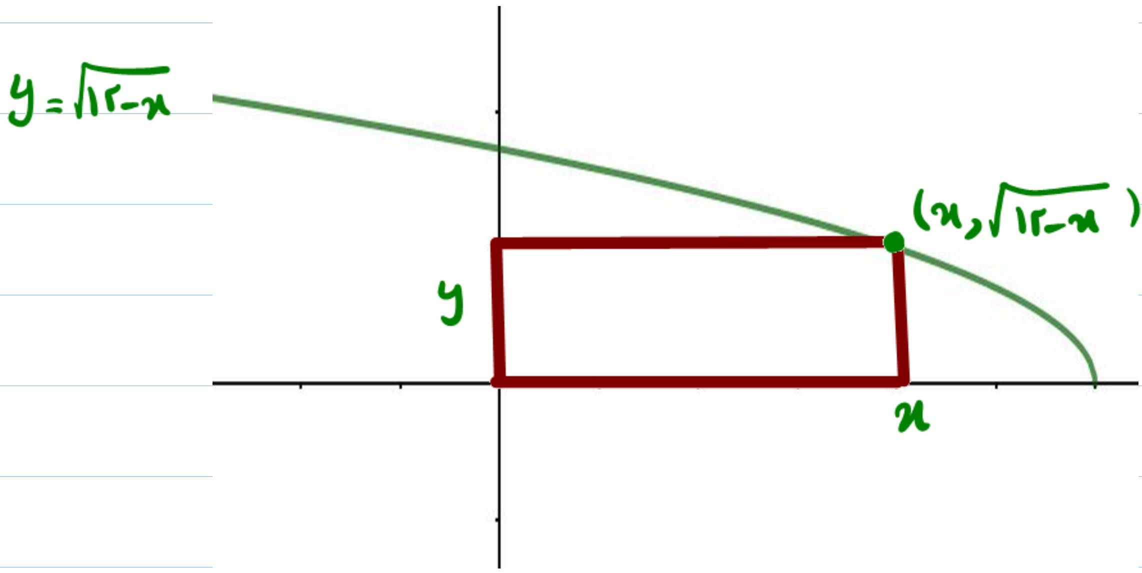
$$(AB)_{min}=\sqrt{4^2-8\times4+32}=\sqrt{16}=4$$

گزینه ۱

مثال: کنکور تجربی ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2 - x^3}$

$S'(x) = \dfrac{24x - 3x^2}{2\sqrt{12x^2 - x^3}} \to S' = 0 \longrightarrow 24x - 3x^2 = 0$

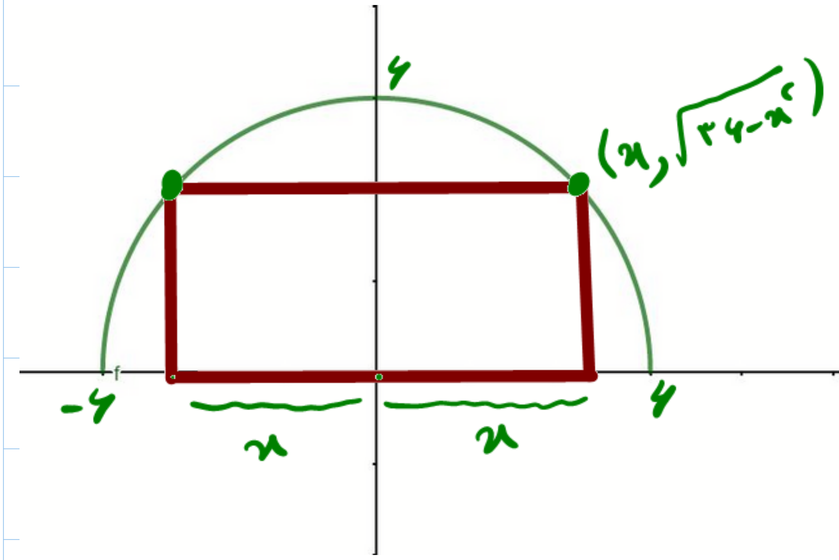
$3x(8-x) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = 8 & \checkmark \end{cases}$. $y = \sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2$

$S_{max} = 8 \times 2 = 16$ گزینه ۴

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶



$x^2+y^2=36$ معادله دایره

$y^2=36-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{36-x^2}$

$$S=2x\times y=2x\sqrt{36-x^2}=2\sqrt{36x^2-x^4}$$

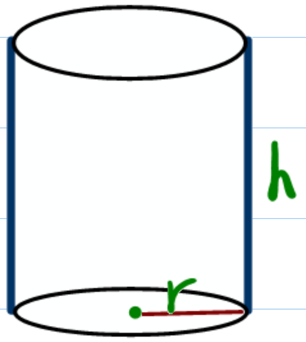
$$S'_{(x)}=2\,\frac{72x-4x^3}{2\sqrt{36x^2-x^4}}=0 \rightarrow 72x-4x^3=0$$

$$4x(18-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{18}\ \checkmark \\ x=-\sqrt{18} \end{cases} \quad y=\sqrt{36-18}=\sqrt{18}$$

$$S_{max}=2\times\sqrt{18}\times\sqrt{18}=2\times 18=36$$ گزینه ۴

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه شکل بسازیم که گنجایش آن 2π لیتر باشد. ارتفاع

استوانه چقدر باشد تا هزینه فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟



$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow r^2 h = 2$

$\Rightarrow h = \dfrac{2}{r^2}$ رابطه کمکی

$S_{\text{کل}} = S_{\text{قاعده‌ها}} + S_{\text{جانبی}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$S_{\text{کل}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \dfrac{2}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ تابع هدف

$S'(r) = 2\pi\left(\dfrac{2r}{1} - \dfrac{2}{r^2}\right) = 0$

$\dfrac{2r^3 - 2}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 2 = 0 \rightarrow r^3 = 1 \rightarrow r = 1$

$h = \dfrac{2}{r^2} = \dfrac{2}{1} = 2$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

جلسه ششم: صفحات ۱۲۷ تا۱۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

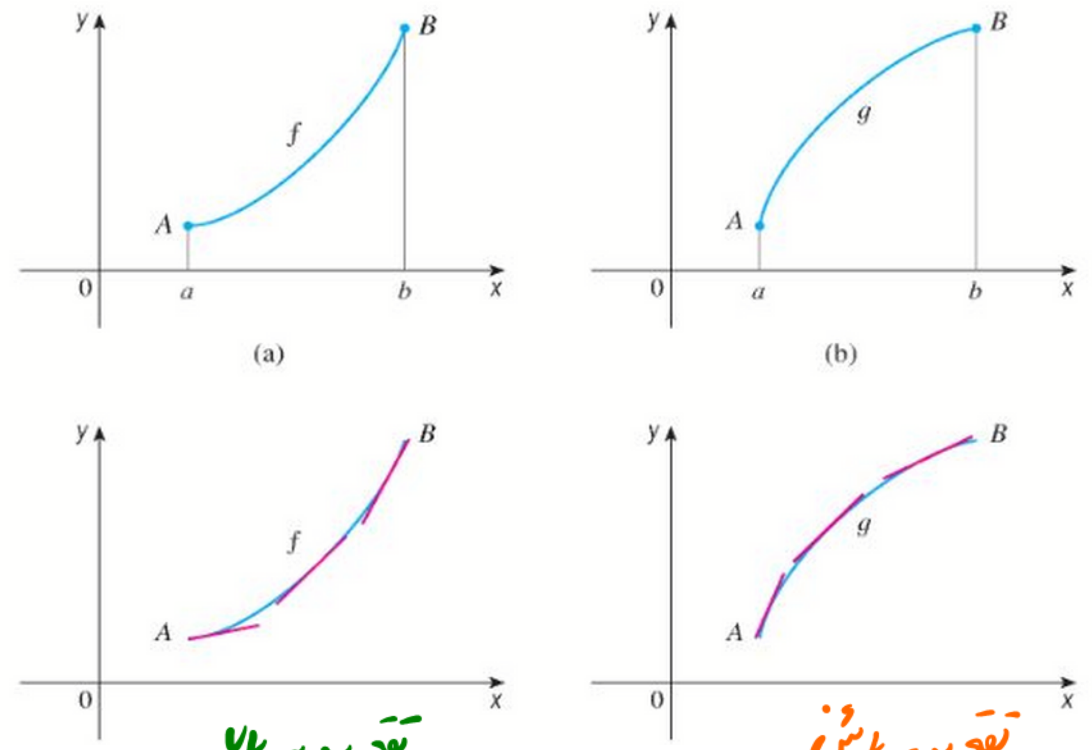
اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

جهت تقعر:

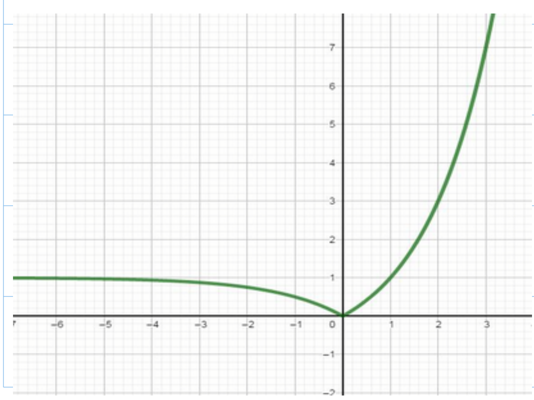
اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، زیر منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقعر رو به بالا است.

اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، بالای منحنی قرار گیرند، می‌گوییم تقعر رو به پایین است.



تقعر رو به بالا   تقعر رو به پایین

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=|2^x-1|$ را تعیین کنید.



در $(0,+\infty)$ تقعر رو به بالا

در $(-\infty,0)$ تقعر رو به پایین

یافتن جهت تقعر بدون رسم نمودار :

به شکل های تعریفِ بالا در حالت تقعر رو به پایینِ دقت کنید. شیب خط مماس بر منحنی از چپ به راست در حال کاهش است و می دانیم شیب مماس بر منحنی یعنی مشتق. پس مشتق تابع در حال کاهش است. به عبارت دیگر مشتق آن نزولی است و اگر یک تابع نزولی باشد، مشتق آن منفی است پس داریم :

$$f'' < 0 \Rightarrow (f')' < 0 \Rightarrow \text{مشتق } f' \text{ منفی است} \Rightarrow f' \text{ نزولی}$$

برای تقعر رو به بالا هم به نتیجه مشابهی می رسیم.

قضیه : فرض کنید f'' به ازای هر نقطه از بازه باز I موجود باشد :

۱ـ اگر برای هر x از I : $f''(x) > 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

۲ـ اگر برای هر x از I : $f''(x) < 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

۳ـ اگر برای هر x از I : $f''(x) = 0$ باشد آنگاه آزمون بی نتیجه است.

نکته: برای تعیین جهت تقعر تابع f باید مشتق دوم را تعیین علامت کنیم.

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ را مشخص کنید.

$$f'(x)=\frac{1(1+x^2)-2x\times x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\times 2x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(1+x^2)\Big(-(1+x^2)-2(1-x^2)\Big)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \qquad 2x(x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

مثال: به ازای چه مقادیری از a، تقعر منحنی $f(x)=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالا است؟

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+3x$$

$$f''(x)=\underbrace{12x^2}_{+}+6ax+3>0 \xrightarrow{\div 3} 4x^2+2ax+1>0$$

$$\Delta<0: \quad \Delta=4a^2-4\times4\times1<0 \rightarrow 4a^2-16<0 \rightarrow a^2<4$$

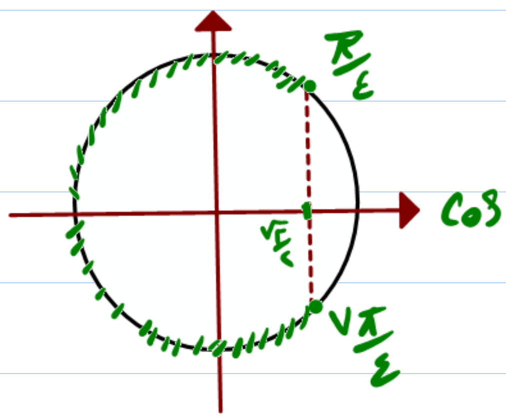
$$\Rightarrow -2<a<2$$

مثال: مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x$ و $0\leq x\leq 2\pi$ رو به بالا است، در چه بازه‌ای است؟

$$f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x \quad : \quad f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x>0$$

$$-2\sqrt{2}\cos x>-2 \Rightarrow \cos x<\frac{-2}{-2\sqrt{2}} \rightarrow \cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



تقعر رو به بالا در بازه $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$

نقطه عطف :

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف نمودار تابع f می‌گوییم هرگاه :

۱) تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد.

۲) جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کند.

نکته : وقتی می‌گوییم تابع f در $(c, f(c))$ خط مماس دارد، یعنی در این نقطه مشتق متناهی دارد یا در این نقطه پیوسته است و مشتق نامتناهی دارد.

مثال: نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} - 10\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+2) = \frac{10}{9}\,\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$x=-2$

$x=0$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$+$	
f	$\frown$	$\smile$	$\smile$	

تابع در $x=-2$ نقطه عطف دارد زیرا بر تابع در این نقطه مماس قابل رسم است و مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد.

۲) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

$$g'(x)=\frac{x^2-1-2x\times x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$g''(x)=\frac{-2x(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)\left(-(x^2-1)-2(-x^2-1)\right)}{(x^2-1)^4}$$

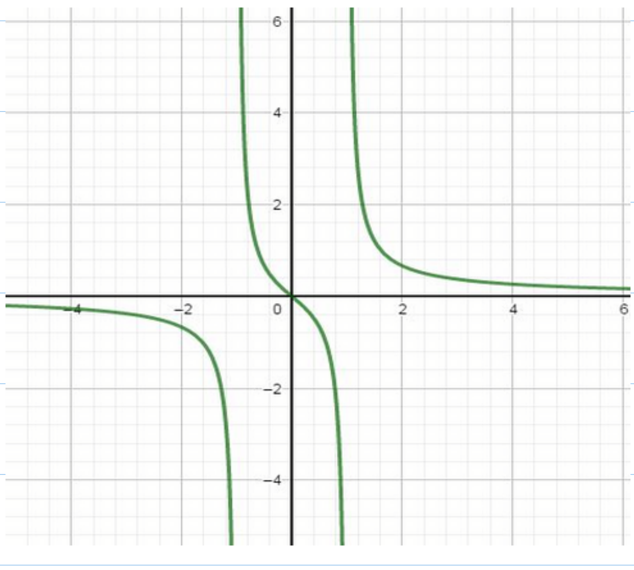
$$=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

0 , ± 1

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
g''	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
g	⌒	‖	⌣		⌒	‖	⌣

عطف

در $x=0$ نقطه عطف دارد.



چند نکته درباره نقطه عطف:

۱- خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف تابع از نمودار تابع عبور می‌کند.

۲- لزومی ندارد تابع در نقطه عطف مشتق دوم داشته باشد. مثلاً تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$.

۳- در نقطه عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

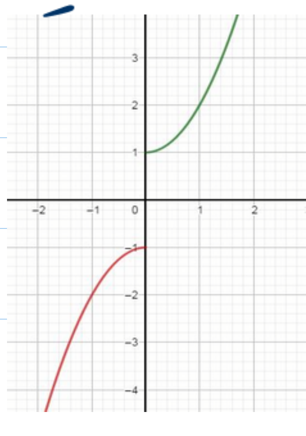
۴- هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن صفر باشد لزوماً نقطه عطف نیست. مثلاً تابع $y=x^4$ در $x=0$.

$f'(x)=4x^3 \; : \; f''(x)=12x^2 \; : \; f''(0)=0$

$12x^2>0$ است پس f'' اطراف $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد پس $x=0$ عطف نیست.

۵- هر نقطه که جهت تقعر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطه عطف نیست. این نقطه ممکن است نقطه ناپیوستگی یا مشتق‌ناپذیری باشد.

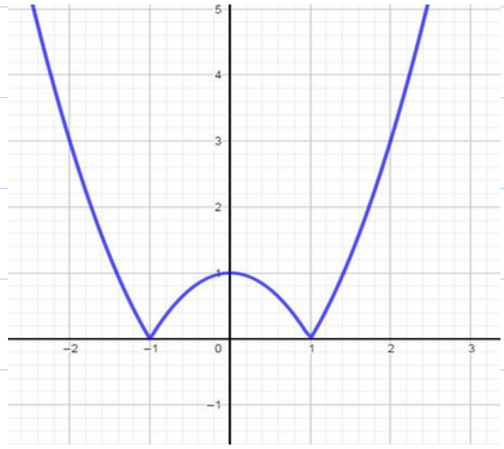
مثلاً:



$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ -x^2-1 & x<0 \end{cases}$$

$x=0$ عطف نیست زیرا در این نقطه تابع پیوسته نیست.

$g(x)=|x^2-1|$



$x=-1$ و $x=1$ عطف نیستند زیرا در این نقاط دو نیم مماس بر تابع رسم می‌شود

مثال: کنکور ریاضی ۹۷

خط راستی بر نمودار تابع $y=x^3-2x^2+3x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند.

شیب این خط کدام است؟ ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پس در نقطه عطف بر تابع مماس رسم شده است.

عطف $x=\frac{2}{3} \Leftarrow y''=6x-4=0$: $y'=3x^2-4x+3$

شیب خط مماس در نقطه عطف : $y'(\frac{2}{3})=3(\frac{2}{3})^2-4\times\frac{2}{3}+3$

گزینه ۴ $=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+3=\frac{-4}{3}+3=\frac{5}{3}$

مثال: اگر $A(1,-11)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$f(1)=-11$ نقطه عطف روی تابع : $f(1)=1+a+b=-11 \Rightarrow a+b=-12$ ①

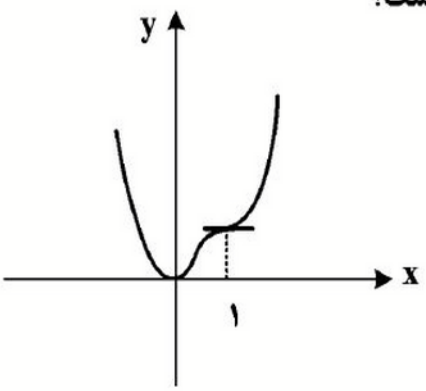
$f''(1)=0$: $f'(x)=3x^2+2ax+b$: $f''(x)=6x+2a$

$f''(1)=6+2a=0 \rightarrow a=-3 \xRightarrow{①} -3+b=-12 \Rightarrow b=-9$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$: $f(-1)=-1-3+9=5$ گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۸

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ است. a کدام است؟



۱) -8
۲) -7
۳) -5
۴) -4

در $x=1$ نقطه عطف داریم پس $f''(1)=0$.

در $x=1$ مماس افقی داریم پس $f'(1)=0$.

در $x=0$ ، min نسبی داریم پس $f'(0)=0$.

$$f'(0)=0 \;:\; f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$$

$$\Rightarrow f'(0)=0+0+0+c=0 \rightarrow c=0$$

$$f'(1)=0 \;:\; f'(1)=12+3a+2b+0=0 \rightarrow 3a+2b=-12$$

$$f''(1)=0 \;:\; f''(x)=36x^2+6ax+2b$$

$$f''(1)=36+6a+2b=0 \rightarrow 3a+b=-18$$

$$-\begin{cases} 3a+2b=-12 \\ 3a+b=-18 \end{cases}$$

$$b=6$$

$$3a+6=-18 \rightarrow 3a=-24 \rightarrow a=-8$$

گزینه ۱

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس سوم: رسم نمودار تابع

جلسه هفتم: صفحات ۱۳۷ تا۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش و پرورش استان همدان

معاونت آموزش متوسطه

اداره تکنولوژی و گروه های آموزشی

گروه ریاضی استان همدان

رسم نمودار توابع :

برای رسم نمودار یک تابع مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱- دامنه تابع را می یابیم .

۲- مجانب های تابع را درصورت وجود بدست می آوریم .

۳- مشتق اول تابع را پیدا می کنیم و جدول تغییرات تابع را می یابیم .

۴- مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم و جهت تقعر تابع را می یابیم .

۵- محل برخورد نمودار تابع را با محورهای مختصات درصورت امکان تعیین می کنیم .

۶- با استفاده از اطلاعات بدست آمده، نمودار تابع را رسم می کنیم .

نکته : اگر محاسبات زیادی داشت یا طولانی بود، از برخی مراحل صرفنظر می کنیم .

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^3+3x^2-4$ را رسم کنید .

$D=\mathbb{R}$: فاقد مجانب

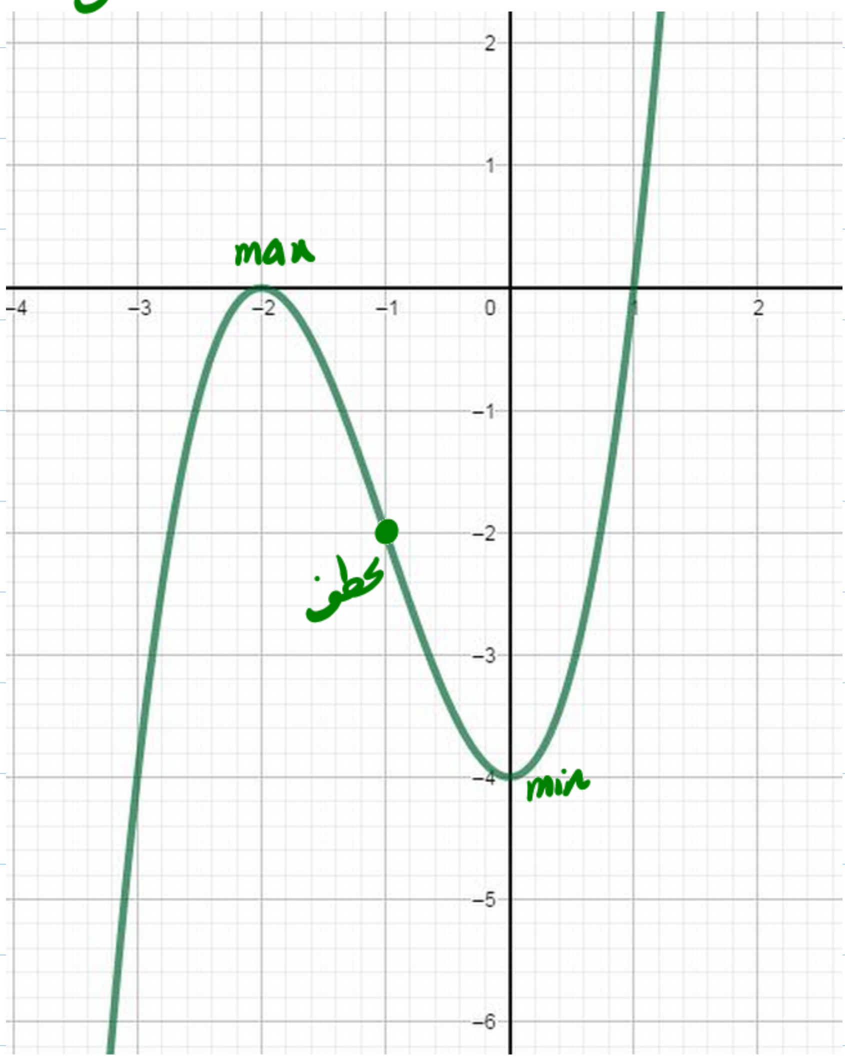
$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0 max	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$	

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	-2	$\smile$	

عطف



چند نکته درباره نمودار تابع درجه سوم :

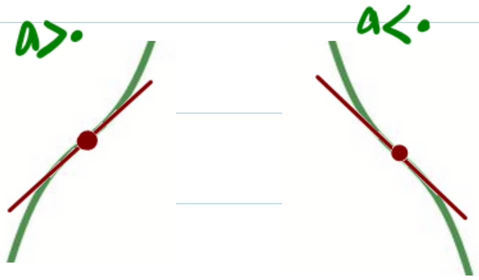
اگر صورت کلی تابع درجه ۳ ، $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشد :

۱- اگر $a>0$ باشد ، نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود و اگر $a<0$ باشد نمودار از ناحیه دوم شروع و به ناحیه چهارم ختم می‌شود.

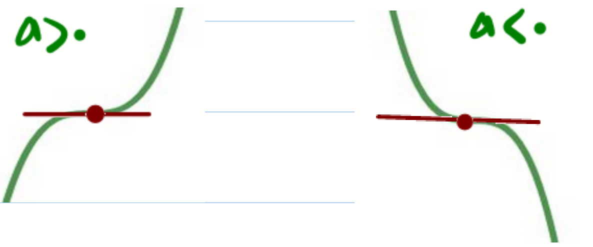
۲- مشتق اول تابع درجه سوم به صورت $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ است که یک تابع درجه دوم است. ریشه‌ی مشتق به شرطی که f' در آن‌ها تغییر علامت دهد نقاط ext نسبی f هستند.

$$\Delta_{f'} = 4b^2-4(3a)(c)=4(b^2-3ac)$$

الف) اگر $\Delta_{f'}<0$ باشد ، f فاقد ext نسبی است.

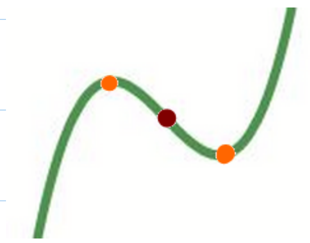


ب) اگر $\Delta_{f'}=0$ باشد ، f فاقد ext نسبی است ولی در ریشه مشتق خط مماس افقی بر تابع قابل رسم است.

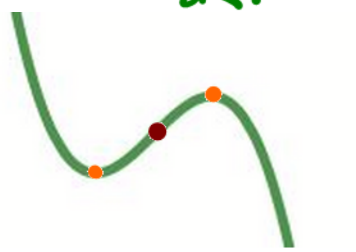


پ) اگر $\Delta_{f'} > 0$ باشد، f دارای یک min نسبی و یک max نسبی است.

$a>0$



$a<0$



۳- مشتق دوم تابع درجه سوم به صورت $f''(x)=6ax+2b$ است. پس تابع همواره یک نقطه عطف دارد:

$$6ax+2b=0 \rightarrow 6ax=-2b \rightarrow x=\frac{-2b}{6a}$$

$$\Rightarrow \quad x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a}$$

۴- در حالتی که f، ext نسبی دارد، نقطه عطف وسط پاره‌خطی است که نقاط ext نسبی را به هم وصل می‌کند.

مثال: اگر مجموع مقادیر max, min نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2+x-m$ مساوی دو باشد، m را بیابید.

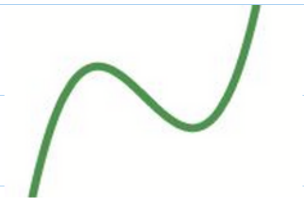
$$\frac{y_{max}+y_{min}}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow \frac{2}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow y_{\text{عطف}} = 1$$

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{3a} = -\frac{-3}{3\times 1} = 1 \qquad \text{عطف } (1,1)$$

$(1,1) \xrightarrow{\text{در تابع}} f(1)=1-3+1-m=1 \Rightarrow m=-2$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$ به کدام صورت است؟

(1 

(2 

(3 

(4 

نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود: $a=\frac{1}{3}>0$

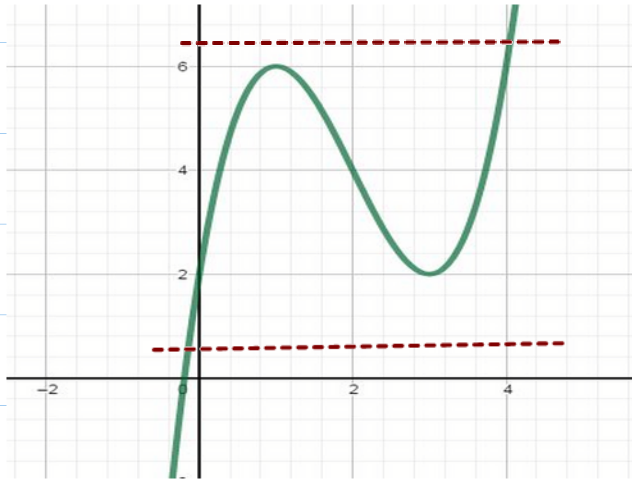
فاقد ext نسبی است ولی $f'(x)=x^2-2x+1$: $\Delta_{f'}=4-4\times1\times1=0$

در عطف مماس افقی است. پس گزینه 1 درست است.

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ به ازای چه مقادیری از m، معادله $f(x)=m$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4x+3=0 \to x=1,3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	
			max		min		



$m<2$ یا $m>6$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{1-x}$ را رسم کنید. $\left(f(x)=\frac{2x-1}{-x+1}\right)$

$D=\mathbb{R}-\{1\}$

$x=1$ مجانب قائم:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow y=-2$ مجانب افقی

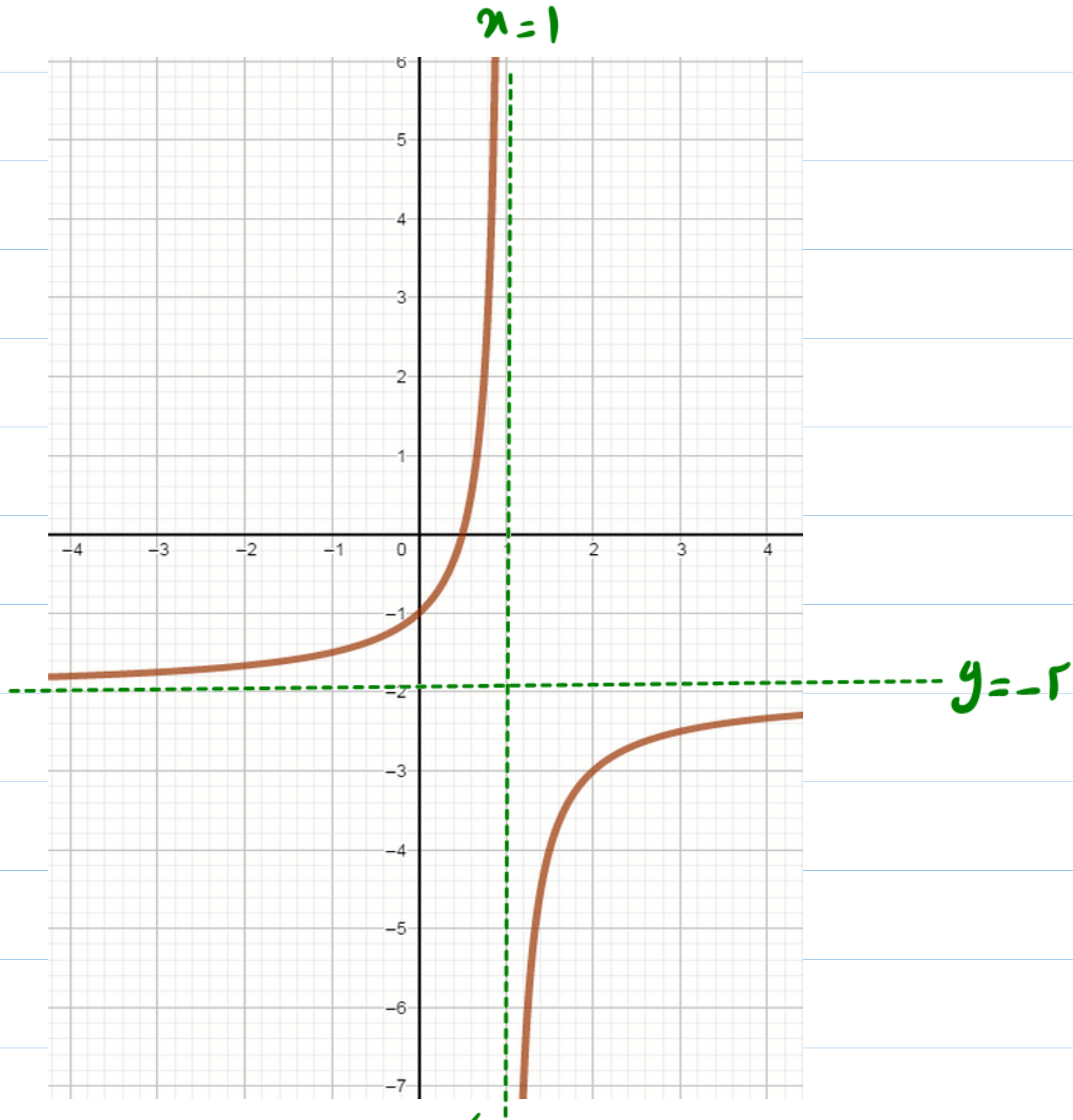
$f'(x)=\frac{2(1)-(-1)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

نقطه کمکی

x	$-\infty$		1	2		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$		$+$	
f	-2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	-3	$\nearrow$	-2

محل برخورد با محور yها: $x=0 \rightarrow y=\frac{2\times 0-1}{1-0}=-1$

محل برخورد با محور xها: $y=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

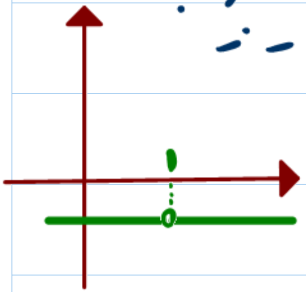


نکته: توابع به فرم کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم، به شرطی $c\neq 0$ باشد

(اگر $c=0$ باشد تابع خطی می‌شود) و $ad-bc\neq 0$ باشد. اگر $ad-bc=0$ باشد

تابع ثابت $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ می‌شود)

مثال: اگر نمودار تابع $y=\dfrac{ax+2}{2x+b}$ به صورت زیر باشد، a و b را بیابید.



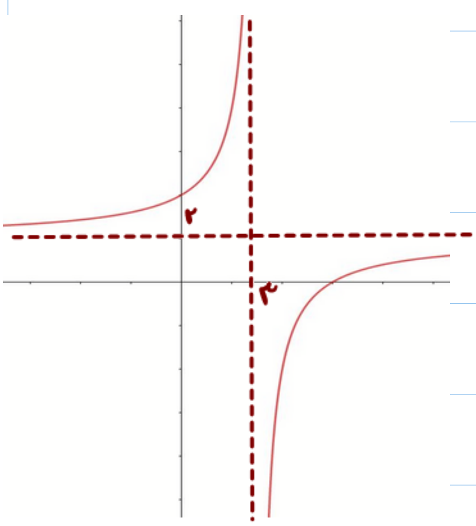
نمودار تابع ثابت است پس: $ab-2(2)=0 \Rightarrow ab=4$

$x=1$ ریشه مخرج است پس $2\times1+b=0 \Rightarrow b=-2$

$a(-2)=4 \Rightarrow a=-2$

تذکر: تابع هموگرافیک فاقد extremum نسبی و نقطه عطف است و دارای یک مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$ است، که نقطه تلاقی مجانب‌ها یعنی نقطه $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ مرکز تقارن تابع است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+4}{bx+1}$ به صورت زیر است. a و b را بیابید.



$x=4$ مجانب قائم: پس $x=4$ ریشه مخرج:

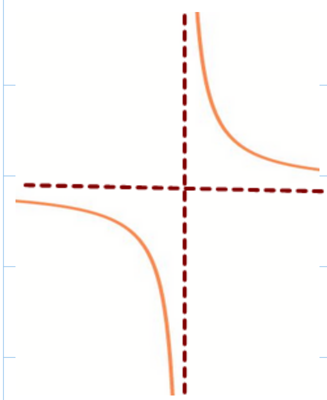
$4b+1=0 \rightarrow b=-\frac{1}{4}$

$y=2$ مجانب افقی:

$\frac{a}{b}=2 \rightarrow a=2b=2(-\frac{1}{4})=-\frac{2}{4}$

نکته: می‌دانیم مشتق تابع هموگرافیک به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است. این تابع روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و در دو طرف مجانب قائم با توجه به علامت $ad-bc$ یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+1}{x-2}$ به صورت زیر باشد، حدود m را بیابید.



$x=2$ مجانب قائم است، پس در بازه‌ی $(-\infty,2)$ و $(2,+\infty)$

تابع اکیداً نزولی است پس f' منفی است $(ad-bc<0)$

$$m(-2)-(1)(1)<0 \Rightarrow -2m-1<0$$

$$\Rightarrow -2m<1 \rightarrow m>-\frac{1}{2}$$