دبیرستان
استعداد های ناب صالحین

ناحیه ۳ اهواز

جزوه ی درس ریاضیات پایه نهم

فصل هفتم

عبارت های گویا

یادآوری:

تعریف یک جمله‌ای: هر عبارتی را که به صورت حاصلضرب یک عدد حقیقی، در توانهای صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر بیان شده باشد را یک جمله‌ای می‌گویند.

نکته: منظور از اعداد صحیح و نامنفی، همان اعداد حسابی هستند.

مثال: عبارات مقابل یک جمله‌ای هستند.

$3x^2$
- توان صحیح و نامنفی
- متغیر
- عدد حقیقی (ضریب)

$-5x^3y^2$
- توانهای صحیح و نامنفی
- متغیرها
- عدد حقیقی (ضریب)

سؤال: آیا عبارت $5x^{-2}$ یک جمله‌ای است؟ چرا؟

جواب: خیر

زیرا توان متغیر باید عددی صحیح و نامنفی باشد (توان متغیرها باید عددی حسابی باشد) در صورتی که می‌دانیم $-2 \notin W$

مثال: عبارات زیر یک جمله‌ای هستند.

$\frac{3}{5}x^2yz^4$ $\qquad$ $-2.5x^2$

$\sqrt{2}mn$ $\qquad$ $8 \rightarrow$ هر عدد به تنهایی یک جمله‌ای است.

نکته‌ی مهم: عبارتهایی که در آنها متغیر زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق یا در مخرج کسر باشند، یک جمله‌ای به حساب نمی‌آیند

مثال: عبارات زیر یک جمله‌ای نیستند.

$|x|+|y|$ $\qquad$ $\sqrt{x+y}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\frac{1}{x}$ $\qquad$ $|x+y|$

تعریف چند جمله ای: از جمع و تفریق تعدادی یک جمله ای، چند جمله ای تشکیل می شود.

مثال: اگر یک جمله ای های $5x^3$ و $-2x^7$ را با هم جمع کنیم، داریم:

$$-2x^7+5x^3$$

که $-2x^7+5x^3$ عبارتی دو جمله ای است.

مثال: عبارت $5y-3x^2+7$ سه جمله ای است.

مثال: عبارت $xyz-5$ دو جمله ای است.

تعریف عبارت گویا: هر کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد را عبارت گویا می گویند.

مثال: عبارات زیر گویا هستند.

$$\frac{x+3}{x-3} \qquad \frac{-3m}{xyz} \qquad \frac{x^2+5x+20}{12} \qquad \frac{x+y}{z} \qquad \frac{3x^2+5}{m^3}$$

مثال: عبارات زیر گویا نیستند.

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{5}} \qquad \frac{ab}{\sqrt{a+b}} \qquad \frac{3}{|a+b|} \qquad \frac{|x|}{3xy^2} \qquad \frac{\sqrt{x}}{x+y}$$

نکته ی مهم: اگر بخواهیم گویا بودن یا نبودن عبارتی را بررسی کنیم، ابتدا لازم است که آن را تا حد امکان ساده کنیم و سپس در مورد گویا بودن یا نبودن آن قضاوت کنیم.

مثال: شاید در نگاه اول این گونه به نظر برسد که عبارت $\frac{\frac{3}{x}}{5}$ گویا نیست (زیرا صورت این کسر $\frac{3}{x}$ می باشد و به دلیل این که متغیر در مخرج کسر قرار دارد، یک جمله ای به حساب نمی آید) ولی اگر همین عبارت را ساده کنیم، داریم:

$$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{5}{1}} = \frac{3}{5x}$$

و می دانیم که عبارت $\frac{3}{5x}$ عبارتی گویا است.

مقدارهای مجاز برای متغیرهای یک عبارت گویا؛

در یک عبارت گویا مقادیر مختلفی را می توان به جای متغیرهای آن قرار داد. و مقدار عبارت گویا را به ازای آنها بدست آورد.

مثال: حاصل عبارت $\frac{x+3}{x-2}$ را به ازای $x=5, 3, -1$ بدست آورید.

$$x=5 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=\frac{5+3}{5-2}=\frac{8}{3}$$

$$x=3 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=\frac{6}{1}=6$$

$$x=-1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=\frac{-1+3}{-1-2}=\frac{+2}{-3}=-\frac{2}{3}$$

حال اگر بخواهیم حاصل $\frac{x+3}{x-2}$ را به ازای $x=2$ بدست آوریم. داریم:

$$x=2 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=\frac{2+3}{2-2}=\frac{5}{0}$$

و می دانیم که $\frac{5}{0}$ تعریف نشده است.

بنابراین می گوییم عبارت گویای $\frac{x+3}{x-2}$ به ازای هر عدد حقیقی تعریف شده است (به جز عدد ۲)

$\frac{x+3}{x-2}$ مقدارهای مجاز برای عبارت $= \mathbb{R}-\{2\}$

عبارت $\mathbb{R}-\{2\}$ به این معنی است که در عبارت $\frac{x+3}{x-2}$ به غیر از عدد ۲ هر عدد حقیقی دیگری را می توانیم قرار دهیم.

مثال: عبارت گویای $\frac{3x^5}{2x-8}$ به ازای عدد ۴ تعریف نشده است. زیرا اگر به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، مخرج کسر به عدد صفر تبدیل می شود. بنابراین می نویسیم؛

$\frac{3x^5}{2x-8}$ مقدارهای مجاز برای عبارت $= \mathbb{R}-\{4\}$

نکته: به مجموعه ی مقدارهای مجاز برای هر عبارت گویا دامنه نیز گفته می شود که با حرف D مشخص می شود.

نکته‌ی مهم: برای بدست آوردن مقادیری که عبارتهای گویا را تعریف نشده می‌کند باید مخرج آن عبارت گویا را مساوی صفر قرار داده و سپس معادله‌ی بدست آمده را حل کنیم و در آخر کار می‌نویسیم:

$\mathbb{R} - \{$جواب های معادله$\}$ = مقدارهای مجاز برای آن عبارت گویا

مثال: عبارات گویای مقابل به ازای چه مقادیری از متغیرهایشان تعریف شده اند.

$\frac{1}{x-2}$

$x-2=0$

$x=2$

$\mathbb{R}-\{2\}$ = دامنه

$\frac{3}{2x-10}$

$2x-10=0$

$2x=+10$

$x=\frac{+10}{2}=+5$

$\mathbb{R}-\{+5\}$ = دامنه

$\frac{x+12}{-3x-6}$

$-3x-6=0$

$-3x=+6$

$x=\frac{+6}{-3}=-2$

$\mathbb{R}-\{-2\}$ = دامنه

نکته‌ی مهم: هنگامی حاصلضرب چند عبارت صفر می‌شود که حداقل یکی از آنها صفر باشد.

$$a.b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ \text{یا} \\ b=0 \end{cases}$$

مثال: عبارت گویای مقابل به ازای چه مقدارهایی تعریف نشده است؟

$\frac{7}{(x-2)(x-5)}$

$$(x-2).(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

بنابراین داریم: $\mathbb{R}-\{2,5\}$ = دامنه

سؤال امتحانی: عبارات گویای مقابل به ازای چه مقادیری از متغیرهایشان تعریف شده اند.

$$\frac{3x+7}{x^2-16}$$

$$x^2-16=0 \Rightarrow (x-4)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

بنابراین $\mathbb{R}-\{4,-4\}=$ دامنه یا $\mathbb{R}-\{\pm 4\}=$ دامنه

$$\frac{2x-10}{x^2+5x+6}$$

$$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+2)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

بنابراین $\mathbb{R}-\{-2,-3\}=$ دامنه

$$\frac{-2m+8}{m.(-2m+12)}$$

$$m.(-2m+12)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ -2m+12=0 \Rightarrow -2m=-12 \\ \quad m=\frac{-12}{-2}=+6 \end{cases}$$

$\mathbb{R}-\{0,+6\}=$ دامنه

$$\frac{-x+4}{m^3-9m}$$

$$m^3-9m=0 \Rightarrow m(m^2-9)=0$$

$$\Rightarrow m(m-3)(m+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-3=0 \Rightarrow m=3 \\ m+3=0 \Rightarrow m=-3 \end{cases}$$

$\mathbb{R}-\{0,3,-3\}=$ دامنه

$$\frac{5x+1}{7}$$

$7=0$ غیرقابل قبول

بنابراین هیچ‌گاه مخرج کسر $\frac{5x+1}{7}$ برابر صفر نمی‌شود و همواره این کسر تعریف شده است.

نکته ی مهم : برای اینکه مقدار یک عبارت گویا برابر صفر شود، باید صورت آن را برابر با صفر قرار دهیم. به بیان بهتر می توان گفت که : یک عبارت گویا زمانی صفر است که صورت آن صفر باشد

مثال: عبارت گویای $\frac{2x-10}{x+7}$ به ازای چه مقادیری از x برابر صفر می باشد

جواب: باید صورت این کسر را برابر با صفر قرار دهیم.

$$2x-10=0$$
$$2x=10$$
$$x=\frac{10}{2}=5$$

یعنی اگر در عبارت $\frac{2x-10}{x+7}$ به جای x عدد ۵ را قرار دهیم، حاصل آن صفر می شود. زیرا؛

$$x=5 \Rightarrow \frac{2x-10}{x+7}=\frac{2\times 5-10}{5+7}=\frac{0}{12}=0$$

مثال: عبارت گویای $\frac{m^2-7m+10}{m^2-9}$ به ازای چه مقادیری از m برابر صفر است؟

$$m^2-7m+10=0 \Rightarrow (m-2).(m-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=+2 \\ m-5=0 \Rightarrow m=+5 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای داده شده به ازای مقادیر ۲+ و ۵+ برابر صفر می باشد

مثال: عبارت گویای $\frac{x^2-16}{x^2+5x}$ به ازای چه مقادیری از x برابر صفر می باشد.

$$x^2-16=0 \Rightarrow (x-4).(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=+4 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای داده شده به ازای مقادیر ۴+ و ۴- برابر صفر می باشد.

مثال: عبارت گویای $\frac{5}{x+3}$ هیچگاه برابر با صفر نمی شود. زیرا صورت این کسر مخالف صفر است در واقع؛

$5=0$ غیر قابل قبول

مثال: عبارت گویای $\dfrac{x^2-1}{x(x+2)}$

الف) به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

ب) به ازای چه مقادیری از x برابر صفر است؟

جواب الف) باید مخرج را برابر با صفر قرار دهیم.

$$x.(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \qquad D=\mathbb{R}-\{0,-2\}$$

جواب ب) باید صورت را برابر با صفر قرار دهیم.

$$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1).(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=+1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

سؤال مهم: عبارت $\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{2x-10}{x+2}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

جواب: باید مخرج این عبارت را برابر با صفر قرار دهیم.

$$\frac{2x-10}{x+2}=0 \Rightarrow 2x-10=0 \Rightarrow 2x \neq 10$$
$$x \neq \frac{10}{2}=5$$

از طرفی باید کسرهای $\dfrac{3}{x}$ و $\dfrac{2x-10}{x+2}$ هم تعریف شده باشند. می دانیم که کسر $\dfrac{3}{x}$ به ازای $x=0$ و کسر $\dfrac{2x-10}{x+2}$ به ازای $x=-2$ تعریف نشده هستند. بنابراین عبارت داده شده به ازای مقادیر ۰ و ۲- و ۵ تعریف نشده است. پس:

$$D=\mathbb{R}-\{5,-2,0\}$$

مثال : عبارات مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x-3).\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=x-3$$

$$\frac{3x-6}{x^2-4}=\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}.(x+2)}=\frac{3}{x+2}$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x+3}=\frac{(x+2).\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=x+2$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x+3).\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}$$

$$\frac{1}{x+3}\times\frac{x^2+7x+12}{x-5}=\frac{1}{\cancel{x+3}}\times\frac{\cancel{(x+3)}(x+4)}{x-5}=\frac{x+4}{x-5}$$

$$\frac{x-3}{3x-6}\times\frac{x^2-4}{x^2-9}=\frac{\cancel{x-3}}{3\cancel{(x-2)}}\times\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}.(x+3)}=\frac{x+2}{3(x+3)}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2+x}\times\frac{x+1}{x+3}=\frac{(x-3).\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+1)}}\times\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+3}}=\frac{x-3}{x}$$

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}\times\frac{2x+2}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-1)(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)}\times\frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}=\frac{2}{x+4}$$

$$2x-10=2(x-5)$$

$$\frac{x^2-25}{x+1}\div\frac{2x-10}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-5)}.(x+5)}{\cancel{x+1}}\times\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x-5)}}=\frac{(x+5)(x-1)}{2}$$

$$x^2-1=(x-1).(x+1)$$

$x^2+3x-4=(x+4).(x-1)$

$x^2-16=(x-4).(x+4)$

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-1} \div \frac{x^2-16}{x+5} = \frac{\cancel{(x+4)}.\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}.(x+1)} \times \frac{x+5}{(x-4).\cancel{(x+4)}} = \frac{x+5}{(x+1).(x-4)}$$

$x^2-1=(x-1).(x+1)$

$(x+3).(x-3)$

$$\frac{x-3}{x^2+8x+15} \div \frac{x^2-9}{x+5} = \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x+5)}.(x+3)} \times \frac{\cancel{x+5}}{\cancel{(x-3)}.(x+3)} = \frac{1}{(x+3)^2}$$

$(x+5)(x+3)$

$a(a-3)$

$(a-3).(a+3)$

$$\frac{a^2-3a}{a} \div \frac{a^2-9}{a^2+4a+3} = \frac{\cancel{a}\cancel{(a-3)}}{\cancel{a}} \times \frac{(a+1).\cancel{(a+3)}}{\cancel{(a-3)}.\cancel{(a+3)}} = a+1$$

$(a+1).(a+3)$

مثال: مساحت مستطیل مقابل را برحسب x بدست آورید.

$x+2$

$\frac{x^2-x-2}{x+1}$

طول × عرض = مساحت مستطیل

$$= \frac{x^2-1x-2}{x+1} \times \frac{x+2}{1}$$

$$= \frac{(x-2).\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} \times \frac{x+2}{1}$$

$$= (x-2).(x+2) = x^2-4$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$$\frac{1}{x}+\frac{5}{x}=\frac{1+5}{x}=\frac{6}{x}$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{3x+2x}{6}=\frac{5x}{6}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{x-1}=\frac{1(x-1)+1}{x-1}=\frac{x\cancel{-1}\cancel{+1}}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$

$$\frac{y}{x}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{xy+x-1}{x^2}$$

$$\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x+1}=\frac{\overbrace{(x-1).(x+1)}^{\text{مزدوج}}-x.x}{x(x+1)}=\frac{\cancel{x^2}-1\cancel{-x^2}}{x(x+1)}=\frac{-1}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}+1}{x^2-1^2}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{x}{x+3}-\frac{9}{\underbrace{x^2+3x}_{x(x+3)}}=\frac{x.x-9}{x(x+3)}=\frac{x^2-9}{x(x+3)}=\frac{(x-3).\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}}=\frac{x-3}{x}$$

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{a+7}=\frac{3(a+7)+2a}{a(a+7)}=\frac{3a+21+2a}{a(a+7)}=\frac{5a+21}{a(a+7)}$$

$$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{(x+1).(x-1)-x.x}{x(x-1)}=\frac{x^2-1-x^2}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$$

مثال: عبارات مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{\frac{a^2-b^2}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{(a-b).(a+b)}{b}}{\frac{a-b}{ab}}=\frac{a\cancel{b}\cancel{(a-b)}.(a+b)}{\cancel{b}\cancel{(a-b)}}=a(a+b)$$

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+3x+2}{x^2}=\frac{(x+1)(x+2)}{x^2}$$

$$\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}=\frac{\frac{(x+1).(x+2)}{x^2}}{\frac{(x-5)(x+2)}{x^2}}=\frac{\cancel{x^2}(x+1).\cancel{(x+2)}}{\cancel{x^2}(x-5).\cancel{(x+2)}}=\frac{x+1}{x-5}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}=\frac{x^2-3x-10}{x^2}=\frac{(x-5)(x+2)}{x^2}$$

$$4x^2-12x \rightarrow 4x(x-3)$$

$$\frac{4x^2-12x}{x^2+x-12}\div\frac{2}{x+4}=\frac{4x.\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+4)}.\cancel{(x-3)}}\times\frac{\cancel{x+4}}{2}=\frac{4x}{2}=2x$$

$$x^2+x-12 \rightarrow (x+4)(x-3)$$

$$-2x+2=-2(x-1)$$

$$4x+4=4(x+1)$$

$$\frac{-2x+2}{x^2-1}\div\frac{4x+4}{x^2+2x+1}=\frac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}.\cancel{(x+1)}}\times\frac{\cancel{(x+1)}.\cancel{(x+1)}}{4\cancel{(x+1)}}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$x^2+2x+1=(x+1).(x+1)$$

$$x^2-1=(x-1).(x+1)$$

مثال: با توجه به اشاره‌های داده شده، در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$\frac{x+2}{x-2}=\frac{\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2).(x+2)}}{\boxed{(x-2).(x+2)}} \quad \times(x+2)$$

$$\frac{x}{3}=\frac{\boxed{x^2}}{3x} \quad \times x$$

$$\frac{a-3}{2a}=\frac{\underbrace{a^2-9}_{(a-3).(a+3)}}{\boxed{2a.(a+3)}} \quad \times(a+3)$$

$$\frac{2a}{a-1}=\frac{\boxed{2a(a+1)}}{(a-1).(a+1)} \quad \times(a+1)$$

$$\frac{\underbrace{3x-6}_{3(\cancel{x-2})}}{\underbrace{x^2-1x-2}_{(\cancel{x-2}).(x+1)}}=\frac{\boxed{3}}{x+1}$$

$$\frac{x+2}{x}=\frac{\boxed{(x+2).(x-2)}}{\underbrace{x^2-2x}_{x(x-2)}} \quad \times(x-2)$$

$$\frac{z}{3z-1}=\frac{\boxed{2z}}{\underbrace{6z-2}_{2(3z-1)}} \quad \times 2$$

$$\frac{a-3}{a}=\frac{\boxed{(a-3).(a+1)}}{\underbrace{a^2+a}_{a(a+1)}} \quad \times(a+1)$$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$\frac{m+1}{m-2}=\frac{m^2+3m+2}{\boxed{}}$$

جواب: m^2-4

نکته ی مهم:

$$\boxed{a-b=-(b-a)}$$

مثال: عبارت $3-2x$ را می توانیم به صورت $-(2x-3)$ نیز بنویسیم.

مثال: عبارات مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{a-b}{b-a}=\frac{-\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}=-1$$

$$\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{a\cancel{b}(a-b)}{\cancel{b}(b-a)}\quad\frac{a\cancel{(a-b)}}{-\cancel{(a-b)}}=\frac{a}{-1}=-a$$

مثال: عبارت مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{\underbrace{4-6x}_{2(2-3x)}}{x+3}\div\frac{3x-2}{\underbrace{x^2+4x+3}_{(x+1).(x+3)}}=\frac{2(2-3x)}{\cancel{x+3}}\times\frac{(x+1).\cancel{(x+3)}}{3x-2}=\frac{2\cancel{(2-3x)}.(x+1)}{-\cancel{(2-3x)}}=$$

$$=\frac{2(x+1)}{-1}=-2(x+1)$$

مثال: ساده‌شده‌ی عبارت $-a-\frac{1-a}{a-1}$ کدام است؟ (نمونه دولتی ایلام ۹۷-۹۶)

الف) $-a-1$ ب) $1-a$ ج) $a+1$ د) $-1+a$

جواب: می دانیم که:

$$\frac{1-a}{a-1}=\frac{-\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}}=-1$$

بنابراین داریم:

$$-a-\frac{1-a}{a+1}=-a-(-1)=-a+1=1-a$$

که نشان می دهد گزینه‌ی «ب» درست می باشد.

نکته‌ی مهم:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{1}\times\frac{1}{b}$$

بنابراین کسر $\frac{a}{b}$ را می‌توانیم به صورت حاصلضرب دو کسر $\frac{1}{b}$ و $\frac{a}{1}$ بنویسیم.

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که حاصلضرب آنها $\frac{3x}{x+y}$ بشود.

$$\frac{3x}{x+y}=\frac{3x}{1}\times\frac{1}{x+y}$$

بنابراین عبارات گویای مورد نظر عبارتند از: $\frac{1}{x+y}$ و $\frac{3x}{1}$

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که حاصلضرب آنها $\frac{x+1}{x-1}$ بشود.

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+1}{1}\times\frac{1}{x-1}$$

بنابراین عبارات گویای مورد نظر عبارتند از: $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{x+1}{1}$

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که حاصلضرب آنها $\frac{2x+1}{x+y}$ بشود.

$$\frac{2x+1}{x+y}=\frac{2x+1}{x-y}\times\frac{x-y}{x+y}$$

نکته: به جای $x-y$ در مخرج کسر اولی و صورت کسر دومی می‌توانستیم هر جمله‌ای های دلخواه دیگری را نیز بنویسیم.

$$\frac{2x+1}{x+y}=\frac{2x+1}{x-3}\times\frac{x-3}{x+y}$$

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که حاصلضرب آنها $\frac{x^2}{2x-3}$ بشود.

$$\frac{x^2}{2x-3}=\frac{x^2}{x+4}\times\frac{x+4}{2x-3}$$

$$\frac{x^2}{2x-3}=\frac{x^2}{3x-1}\times\frac{3x-1}{2x-3}$$

مثال: در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a-1}{b}}=\frac{a}{b}\times\boxed{}$$

جواب: $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{a-1}{b}}=\frac{b}{a-1}$

نکته‌ی مهم:

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}$$

بنابراین کسر $\frac{a+b}{c}$ را می‌توانیم به صورت حاصلجمع دو کسر $\frac{b}{c}$ و $\frac{a}{c}$ بنویسیم.

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که مجموع آنها $\frac{x+y}{3z}$ بشود.

$$\frac{x+y}{3z}=\frac{x}{3z}+\frac{y}{3z}$$

بنابراین عبارات گویای مورد نظر عبارتند از: $\frac{y}{3z}$ و $\frac{x}{3z}$

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که مجموع آنها $\frac{x+1}{x-1}$ بشود.

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}$$

بنابراین عبارات گویای مورد نظر عبارتند از: $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{x}{x-1}$

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که مجموع آنها $\frac{x^2+7}{3x-1}$ بشود

$$\frac{x^2+7}{3x-1}=\frac{x^2+1}{3x-1}+\frac{6}{3x-1}$$

$$\frac{x^2+7}{3x-1}=\frac{x^2-1}{3x-1}+\frac{8}{3x-1}$$

نکته: این که در صورت کسرها، کدام چند جمله‌ای را بنویسیم به صورت سلیقه‌ای است ولی باید حتماً مجموع صورت این دو کسر، همان x^2+7 باشد.

مثال: دو عبارت گویا بنویسید که:

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{x-3}{y+2}$ بشود.

$$\frac{x-3}{y+2}=\frac{x-3}{1}\times\frac{1}{y+2}$$

ب) حاصل جمع آنها $\frac{x-3}{y+2}$ بشود.

$$\frac{x-3}{y+2}=\frac{x}{y+2}+\frac{-3}{y+2}$$

$$\frac{x-3}{y+2}=\frac{x-1}{y+2}+\frac{-2}{y+2}$$

مثال: عبارت گویایی بنویسید که اگر با $\frac{2}{x+1}$ جمع شود، حاصل آن $\frac{3x+1}{x^2+x}$ بشود.

عبارت مورد نظر $= A$

$$A + \frac{2}{x+1} = \frac{3x+1}{x^2+x}$$

$$A = \frac{3x+1}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}} - \frac{2}{x+1} = \frac{3x+1-2x}{x(x+1)} = \frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر ما $\frac{1}{x}$ می باشد

مثال: عبارت گویایی بنویسید که وقتی در $\frac{x^2-1}{x+5}$ ضرب می شود، حاصل آن $x-1$ بشود.

عبارت مورد نظر $= A$

$$A \times \frac{x^2-1}{x+5} = x-1 \Rightarrow A = \frac{\frac{x-1}{1}}{\frac{x^2-1}{x+5}} = \frac{(x-1)(x+5)}{x^2-1}$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}.(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x+5}{x+1}$$

مثال: عبارت گویای $\frac{3-x}{x+5}$ را درچه عبارتی ضرب کنیم تا حاصل آن $\frac{-1}{x+3}$ بشود.

عبارت مورد نظر $= A$

$$\frac{3-x}{x+5} \times A = \frac{-1}{x+3} \Rightarrow A = \frac{-\frac{1}{x+3}}{\frac{3-x}{x+5}} = \frac{-1(x+5)}{(3-x)(x+3)}$$

$$= \frac{-1(x+5)}{-(x-3)(x+3)} = \frac{x+5}{x^2-9}$$

مثال: اگر $A = \frac{x^2-1}{x+5}$ و $B = \frac{x+5}{x+1}$ باشد. حاصل $A \times B$ را بیابید.

اتحاد مزدوج

$$A \times B = \frac{x^2-1}{x+5} \times \frac{x+5}{x+1} = \frac{(x-1).\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+5}} \times \frac{\cancel{x+5}}{\cancel{x+1}} = x-1$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

تقسیم چند جمله ای ها

الف) تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای؛ ابتدا ضرایب عددی را با توجه به قوانین ساده کردن کسرها ساده کرده و سپس با توجه به قوانین ساده کردن توانها، عبارتهای توانی را ساده می کنیم.

مثال: تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\frac{-12x^7}{+3x^4} = -4x^3$$

$$\frac{\cancel{2}^{1}x^3y^7\cancel{z}}{\cancel{6}_{3}xy^2\cancel{z}} = \frac{1}{3}x^2y^5$$

$$\frac{x^2y^3}{-x^5y} = -\frac{y^2}{x^3}$$

ب) تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای؛ این نوع تقسیم را به چند تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای تفکیک کرده و سپس حاصل آن را بدست می آوریم.

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$$\frac{15x^4y+10xy^2-5xy}{5xy} = \frac{15x^4\cancel{y}}{5x\cancel{y}} + \frac{10\cancel{x}y^2}{5\cancel{x}y} - \frac{\cancel{5xy}^{1}}{\cancel{5xy}_{1}} = 3x^3+2y-1$$

$$\frac{24x^3y^2z^3-20x^2y^3z}{15x^2y^2z} = \frac{\cancel{24}^{8}x^3y^2z^3}{\cancel{15}_{5}x^2y^2z} - \frac{\cancel{20}^{4}x^2y^3z}{\cancel{15}_{3}x^2y^2z} = \frac{8}{5}xz^2 - \frac{4}{3}y$$

$$\frac{-7xy^2+x^5}{5x^3y^3} = \frac{-7xy^2}{5x^3y^3} + \frac{x^5}{5x^3y^3} = \frac{-7}{5x^2y} + \frac{x^2}{5y^3}$$

ج) تقسیم چندجمله ای بر چند جمله ای؛ فرض کنید می خواهیم چندجمله ای $3x^3+7x+2x^2-1$ را بر $x+2$ تقسیم کنیم. باید مراحل زیر را به ترتیب و با دقت انجام دهیم.

مرحله ی اول؛ ابتدا هم مقسوم و هم مقسوم علیه را از بزرگترین توان متغیر که در اینجا همان x می باشد به صورت نزولی می نویسیم (به این عمل استاندارد کردن هم گفته می شود)

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+2x^2+7x-1 & x+2 \\ \hline \end{array}$$

مرحله ی دوم؛ اولین جمله ی مقسوم را بر اولین جمله ی مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت این تقسیم می نویسیم.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+2x^2+7x-1 & x+2 \\ \cline{2-2} & 3x^2 \end{array} \qquad \frac{3x^3}{x}=3x^2$$

مرحله ی سوم؛ عبارت خارج قسمت را در عبارت مقسوم علیه ضرب کرده و زیر عبارت مقسوم می نویسیم و سپس علامتها را قرینه می کنیم و حاصل جمع و تفریق ها را بدست می آوریم. (در این مرحله باید توجه داشته باشیم که باقیمانده را برحسب توانهای نزولی x بنویسیم. (باقیمانده استاندارد باشد)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^3}+2x^2+7x-1 & x+2 \\ \cline{2-2} \underset{-}{\cancel{+3x^3}}\ \underset{-}{+}6x^2 & 3x^2 \\ \hline -4x^2+7x-1 & \end{array} \qquad 3x^2(x+2)=3x^3+6x^2$$

مرحله ی چهارم؛ مرحله ی دوم و سوم را تا جایی ادامه می دهیم که بزرگترین توان متغیر باقیمانده از بزرگترین توان متغیر مقسوم علیه کمتر باشد.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^3}+2x^2+7x-1 & x+2 \\ \cline{2-2} \underset{-}{\cancel{+3x^3}}\ \underset{-}{+}6x^2 & 3x^2-4x+15 \\ \hline \cancel{-4x^2}+7x-1 & \\ \underset{+}{\cancel{-4x^2}}\ \underset{+}{-}8x & \\ \hline \cancel{+15x}-1 & \\ \underset{-}{\cancel{+15x}}\ \underset{-}{+}30 & \\ \hline -31 & \end{array}$$

$\frac{3x}{x}=3x^2$, $3x^2(x+2)=3x^3+6x^2$

$\frac{-4x^2}{x}=-4x$, $-4x(x+2)=-4x^2-8x$

$\frac{+15x}{x}=+15$, $+15(x+2)=+15x+30$

نکته : اگر باقیمانده ی یک تقسیم صفر شود، می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر است.

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید و امتحان درستی آنرا بنویسید.

$$5x - 1 + 6x^2 \;\Big|\; x+1$$

جواب: مقسوم علیه ($x+1$) برحسب توانهای نزولی x مرتب شده است ولی مقسوم ($6x^2 - 1 + 5x$) برحسب توانهای نزولی x مرتب نیست که ابتدا باید آنرا برحسب توانهای نزولی x مرتب کنیم.

بنابراین داریم:

$$\begin{array}{l|l} +6x^2 + 5x - 1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{\pm 6x^2 \pm 6x} & +6x - 1 \\ \quad -1x - 1 & \\ \quad \underline{\mp 1x \mp 1} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$$\frac{+6x^2}{x} = +6x \quad , \quad +6x(x+1) = +6x^2 + 6x$$

$$\frac{-1x}{x} = -1 \quad , \quad -1(x+1) = -1x - 1$$

همان طورکه مشاهده می کنید، چون باقیمانده ی این تقسیم صفر شده است، می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر است.

امتحان درستی تقسیم انجام شده: برای امتحان درستی تقسیم انجام شده باید رابطه ی زیر برقرار باشد.

$$\boxed{\text{مقسوم = باقیمانده + خارج قسمت × مقسوم علیه}}$$

$$(+6x - 1) \times (x + 1) + 0 = +6x^2 + 6x - x - 1 = 6x^2 + 5x - 1$$

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید. (خرداد ماه ۹۵ - خوزستان)

$$\begin{array}{l|l} +3x^2 - 10x + 9 & 3x - 4 \\ \cline{2-2} \underline{\mp 3x^2 \pm 4x} & +1x - 2 \\ \quad -6x + 9 & \\ \quad \underline{\pm 6x \mp 8} & \\ \qquad +1 & \end{array}$$

$$\frac{+3x^2}{3x} = +1x \quad , \quad +1x(3x - 4) = +3x^2 - 4x$$

$$\frac{-6x}{3x} = -2 \quad , \quad -2(3x - 4) = -6x + 8$$

اکنون امتحان درستی آنرا بررسی می کنیم

$$(+1x - 2).(3x - 4) + (+1) = +3x^2 \underbrace{- 4x - 6x}_{\text{متشابه}} + 8 + 1$$
$$= +3x^2 - 10x + 9$$

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید و باقیمانده را مشخص کنید.

$$-12y^2+y^3+4y+5 \;\Big|\; 1+y^2$$

جواب: ابتدا باید مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توانهای نزولی x مرتب کنیم.

$$\begin{array}{l|l} +y^3-12y^2+4y+5 & y^2+1 \\ \cancel{+y^3}\ \pm y & +y-12 \\ \hline -12y^2+3y+5 & \\ \cancel{-12y^2}\ -12 & \\ \hline +3y+17 & \end{array}$$

$\frac{+y^3}{y^2}=+y \quad , \quad +y(y^2+1)=+y^3+y$

$\frac{-12y^2}{y^2}=-12 \quad , \quad -12(y^2+1)=-12y^2-12$

نکته: همانطور که مشاهده می کنید درجه ی باقیمانده یعنی $+3y+17$ نسبت به متغیر y برابر 1 می باشد، ولی درجه ی مقسوم علیه یعنی y^2+1 نسبت به متغیر y برابر ۲ می باشد. بنابراین چون درجه ی باقیمانده از درجه ی مقسوم علیه کمتر است (۲ > ۱) تقسیم را پایان یافته اعلام می کنیم.

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید و امتحان درستی آن را بنویسید. (خرداد ۹۶ـ خوزستان)

$$4x^3-5x^2+70 \;\Big|\; x-2$$

مثال: اگر باقیمانده‌ی تقسیم $5x^3+11x^2+x+m$ بر $x+1$ برابر ۴ باشد، مقدار m چقدر است؟

جواب: ابتدا مقسوم را بر حسب توانهای نزولی x مرتب می‌کنیم

$$\begin{array}{l|l} +5x^3+11x^2+x+m & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{+5x^3}\ +5x^2} & +5x^2+6x-5 \\ \quad -\qquad - & \\ \quad +6x^2+x+m & \\ \quad \underline{\cancel{+6x^2}\ +6x} & \\ \quad -\qquad - & \\ \qquad -5x+m & \\ \qquad \underline{\cancel{-5x}\ -5} & \\ \qquad +\qquad + & \\ \qquad +m+5 & \end{array}$$

$$\frac{+5x^3}{x}=+5x^2 \quad , \quad +5x^2(x+1)=+5x^3+5x^2$$

$$\frac{+6x^2}{x}=+6x \quad , \quad +6x(x+1)=+6x^2+6x$$

$$\frac{-5x}{x}=-5 \quad , \quad -5(x+1)=-5x-5$$

همانطور که در صورت سؤال گفته شده است، باقیمانده‌ی این تقسیم ۴ می‌باشد. بنابراین باید مقدار $+m+5$ را برابر ۴ قرار دهیم.

$$+m+5=4$$
$$m=4-5=-1$$

مثال: مقدار a چقدر باشد تا $9x^3+5x+a$ بر $3x+2$ بخشپذیر باشد.

$$\begin{array}{l|l} 9x^3+5x+a & 3x+2 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{+9x^3}\ +6x^2} & 3x^2-2x+3 \\ \ -\qquad - & \\ \quad -6x^2+5x+a & \\ \quad \underline{\cancel{-6x^2}\ -4x} & \\ \quad +\qquad + & \\ \qquad +9x+a & \\ \qquad \underline{\cancel{+9x}\ +6} & \\ \qquad -\qquad - & \\ \qquad\quad a-6 & \end{array}$$

$$\frac{9x^3}{3x}=3x^2 \quad , \quad 3x^2(3x+2)=9x^3+6x^2$$

$$\frac{-6x^2}{3x}=-2x \quad , \quad -2x(3x+2)=-6x^2-4x$$

$$\frac{+9x}{3x}=+3 \quad , \quad +3(3x+2)=+9x+6$$

برای این که مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر باشد، باید باقیمانده برابر صفر باشد.

$$a-6=0$$
$$a=+6$$

مثال : تقسیم مقابل را انجام دهید و باقیمانده را مشخص کنید.

$$-7x+4x^2+1 \;\Big|\; x+2$$

مثال : تقسیم مقابل را انجام دهید.

$$11x^2+12x^3-2+x \;\Big|\; -1+3x$$

مثال : تقسیم مقابل را انجام دهید و خارج قسمت و باقیمانده را مشخص کنید.

$$3x^3+x^2-1x-1 \;\Big|\; x-1$$

مثال: باقیمانده‌ی تقسیم $4x^3+10x^2+4x+a$ بر $2x+2$ برابر -7 است. مقدار a کدام گزینه می‌باشد. (نمونه دولتی ۹۷ـ گیلان)

الف)

الف) ۱

ب) -2

ج) -7

د) -9

جواب: گزینه‌ی « د »

مثال: اگر باقیمانده‌ی تقسیم $2x^3-7x^2+5$ بر x^2-2، برابر $ax+b$ باشد، حاصل $a+b$ کدام گزینه می‌باشد؟ (نمونه دولتی ۹۶ـ بوشهر)

الف) ۱۳

ب) ۵

ج) -5

د) -13

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}-7x^2+5 & x^2-2 \\ \hline \cancel{+2x^3}-4x & 2x \\ -\quad\quad + & \\ \hline -\cancel{7x^2}+4x+5 & \\ \cancel{-7x^2}+14 & \\ +\quad\quad - & \\ \hline +4x-9 & \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{x^2}=2x \quad , \quad 2x(x^2-2)=2x^3-4x$$

$$\frac{-7x^2}{x^2}=-7 \quad , \quad -7(x^2-2)=-7x^2+14$$

اکنون در صورت سؤال گفته است که باقیمانده‌ی این تقسیم $ax+b$ می‌باشد. که اگر این عبارت را با باقیمانده‌ای که ما بدست آورده‌ایم، مقایسه کنیم، داریم:

$$ax+b=+4x-9 \Rightarrow a=+4 \,,\, b=-9 \Rightarrow a+b=+4+(-9)=-5$$

بنابراین گزینه‌ی « ج » درست است.