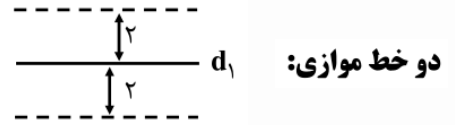
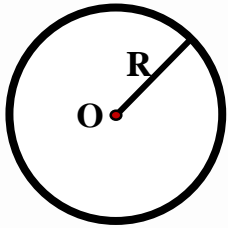


# هندسه ۲ دایره

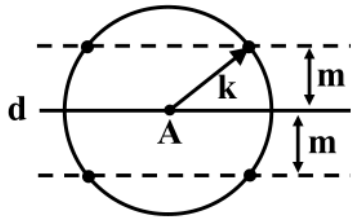
مدرس : نیما خانعلی پور

دایره

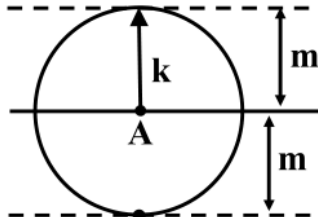
مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله ی آن ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره به اندازه ی  $R$  یا شعاع می باشد.



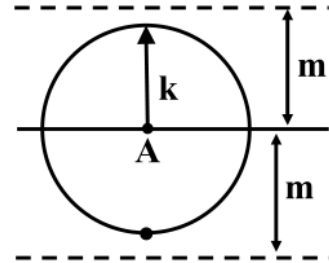
**تذکره:** حالاتی که نقاطی را بخواهیم که از نقطه  $A$  به فاصله  $k$  باشند و از خط  $d$  فاصله  $m$  را داشته باشند یکی از حالات زیر است.



$k > m$   
(جواب ۴)

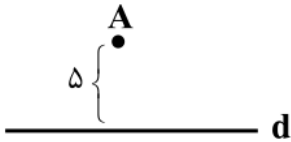


$k = m$   
(جواب ۲)



$k < m$   
(بدون جواب)

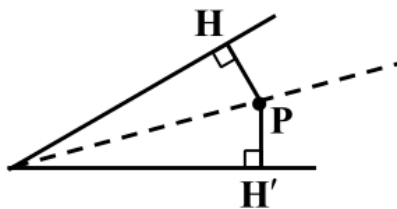
نقطه  $A$  به فاصله ۵ سانتی متر از خط  $d$  قرار دارد. چند نقطه وجود دارد که فاصله اش از  $A$  برابر ۴ و از خط  $d$  برابر ۲ باشد؟



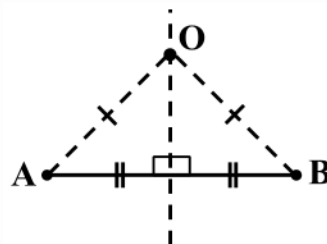
- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۳

مربع  $ABCD$  به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع  $ABCD$  وجود دارد که فاصله اش از قطر  $AC$  برابر  $1/5$  باشد؟

- ۱) ۴
- ۲) ۲
- ۳) ۱
- ۴) صفر



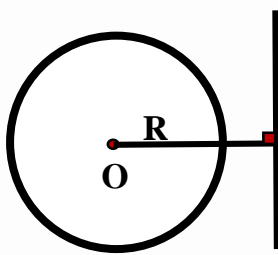
نیمساز:



عمود منصف:

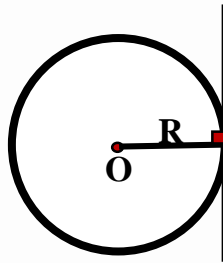
وضعیت نسبی خط و دایره

کافی است فاصله ی مرکز دایره تا خط را به دست آوریم و با شعاع مقایسه کنیم، آن گاه خواهیم داشت:



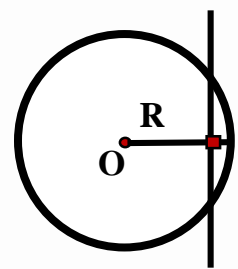
«خط دایره را در دو نقطه قطع می کند»

$$OH < R$$



«خط بر دایره مماس است»

$$OH = R$$



«خط و دایره یکدیگر را قطع نمی کنند»

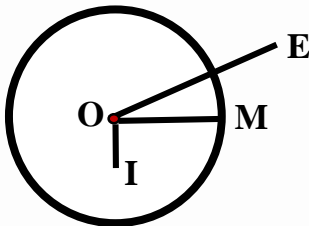
$$OH > R$$

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.  $OI < R$

۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.  $OM = R$

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.  $OE > R$

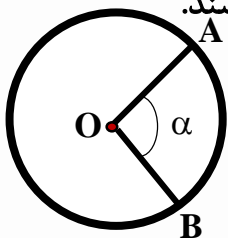


کمان در دایره

دو نقطه  $A, B$  واقع بر محیط دایره را اگر به هم وصل کنیم کمان  $AB$  را تشکیل می دهند که هر کمان قسمتی از محیط دایره است.

زاویه مرکزی

به زاویه ای گفته می شود که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع های آن شعاع های دایره باشند.



$\alpha$  زاویه مرکزی

$$AB = \alpha$$

اندازه ی زاویه ی مرکزی با کمان روبه روی آن برابر است.

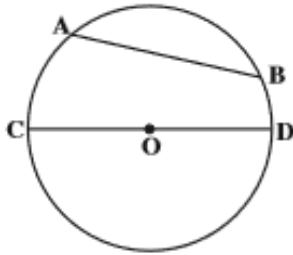
زاویه ی محاطی

زاویه ای است که رأسش روی محیط دایره و ضلع هایش وترهای دایره باشند.

اندازه ی زاویه ی محاطی نصف کمان روبه روی آن است.

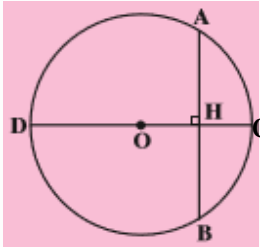
وتر

پاره خطی است که دو سر آن روی محیط دایره است. بزرگترین وتر در دایره قطر است. (۲R)



قضیه

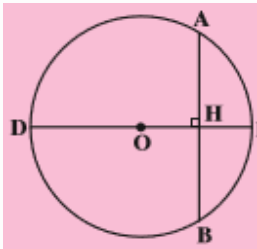
ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود به وتر، کمان نظیرش را نصف می کند.



$$\begin{cases} OB = OA = R \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow[\text{وتر و یک ضلع}]{\triangle AOH \cong \triangle BOH} \begin{cases} AH = BH \\ O_1 = O_2 \rightarrow AC = BC \end{cases}$$

قضیه

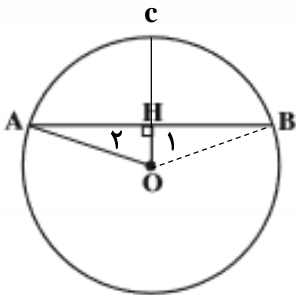
ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن (که از مرکز دایره نگذشته باشد) وصل می کند، به آن عمود است.



$$\begin{cases} AH = HB \\ OB = OA = R \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow[\text{ض ض ض}]{\triangle AOH \cong \triangle BOH} \begin{cases} H_1 = H_2 \\ H_1 + H_2 = 180^\circ \\ 2H_1 = 180^\circ \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{cases}$$

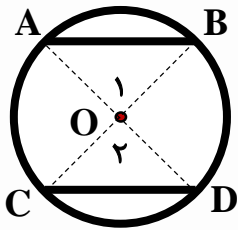
قضیه

ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن وصل می کند، به آن وتر عمود است.



قضیه

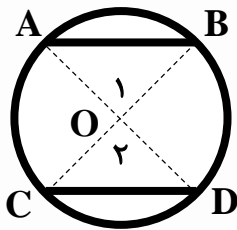
ثابت کنید در هر دایره کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OD \\ OB = OC \end{array} \right. \xrightarrow[\text{ض ض ض}]{\Delta AOH \cong \Delta COH} O_1 = O_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} AB = CD$$

عکس قضیه

ثابت کنید در هر دایره وترهای نظیر کمان های مساوی با هم برابرند.

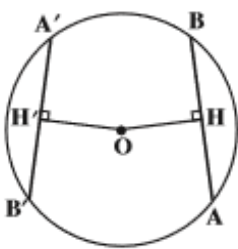


$$AB = CD \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O_1 = O_2 \\ CO = OB \\ AO = OD \end{array} \right.$$

قضیه

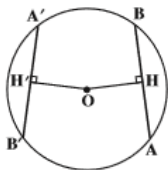
ثابت کنید در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند و برعکس.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} \rightarrow A'H' = AH \\ H = H' = 90^\circ \\ OA = OA' \end{array} \right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} OH = OH'$$

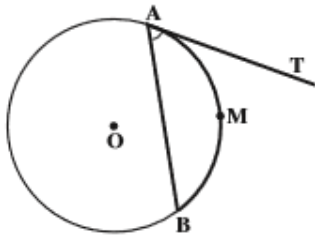
اثبات عکس قضیه



$$\left\{ \begin{array}{l} OH = OH' \\ H = H' = 90^\circ \\ OA = OA' = R \end{array} \right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} A'H' = AH \xrightarrow{\times 2} AB = A'B'$$

### زاویه ظلّی

زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره است. یکی از اضلاعش مماس بر دایره است و ضلع دیگرش وتری از دایره است.

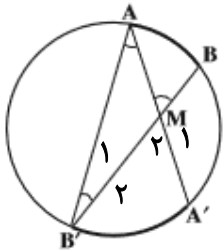


اندازه ی زاویه ی ظلّی نصف کمان روبروی آن است.

### زاویه ی بین دو وتر متقاطع

قضیه: ثابت کنید هرگاه از یک نقطه داخل دایره دو وتر رسم کنیم، زاویه ی حاصل بین دو وتر برابر

است با نصف مجموع کمان های روبه رو به آن با کمان های محصور بین دو وتر.

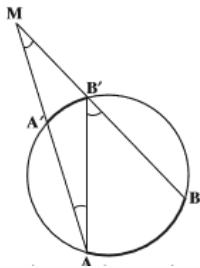


$$M_1 = \frac{AA' + BB'}{2} \quad M_2 = \frac{AB' + A'B}{2}$$

### زاویه ی بین دو قاطع (امتداد دو وتر)

قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین دو قاطع (امتداد دو وتر) برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور

بین دو وتر یا کمان های روبه رو به زاویه ی M.

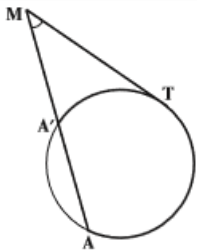


$$M = \frac{AA' - BB'}{2}$$

### زاویه ی بین یک قاطع و یک مماس

قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین یک قاطع و یک مماس برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور

بین قاطع و مماس (کمان های روبه رو به زاویه ی M)



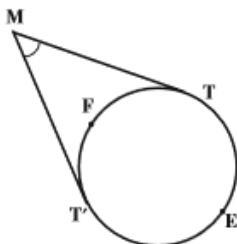
$$M = \frac{|AT - BT|}{2}$$

از B به T وصل می کنیم سپس خواهیم داشت:

### زاویه ی بین دو مماس

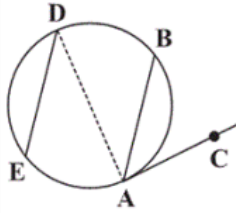
قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین دو مماس برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور بین دو مماس

یا به عبارتی کمان های روبه رو به زاویه ی M.



$$M = \frac{|TET' - TFT'|}{2}$$

- در شکل روبه‌رو  $AC$  مماس بر دایره و  $AB \parallel DE$ ،  $\widehat{AE} = 110^\circ$  می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه  $\widehat{BAC}$  کدام است؟ (  $AD$  قطر دایره است.)



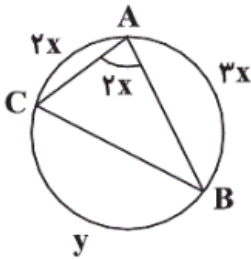
- (۱)  $35^\circ$
- (۲)  $70^\circ$
- (۳)  $40^\circ$
- (۴)  $45^\circ$

$$\widehat{AB} = 180^\circ - \widehat{DB} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

چون  $AB \parallel DE$ ، پس  $\widehat{DB} = \widehat{AE} = 110^\circ$  است. لذا:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \quad \text{زاویه } \widehat{BAC} \text{ زاویه‌ای ظلی است پس:}$$

با توجه به شکل مقابل، حاصل  $y - x$  کدام است؟

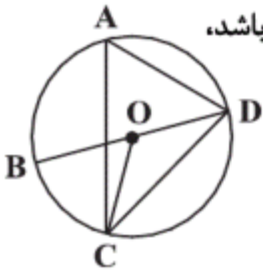


- (۱)  $90^\circ$
- (۲)  $150^\circ$
- (۳)  $120^\circ$
- (۴)  $135^\circ$

اندازه زاویه محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن است یعنی  $\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$  پس  $2x = \frac{y}{2}$ ، در نتیجه:  $y = 4x$ . با توجه به این که

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 & \quad \hat{A} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 180^\circ - \widehat{BT} = 50^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 50^\circ \\ \Rightarrow 9x = 360^\circ & \Rightarrow \begin{cases} x = 40^\circ \\ y = 160^\circ \end{cases} \quad y - x = 160^\circ - 40^\circ = 120^\circ \end{aligned}$$

در شکل زیر،  $BD$  قطر دایره است. اگر  $\hat{A} = 7\alpha - 10^\circ$ ،  $\widehat{COD} = 10\alpha + 20^\circ$  و  $O$  مرکز دایره باشد، کمان  $\widehat{BC}$  چند درجه است؟

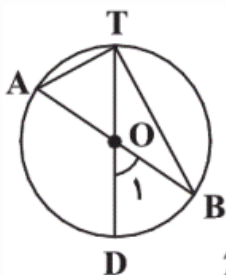


- (۱)  $15^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $45^\circ$
- (۴)  $60^\circ$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} \Rightarrow \hat{A} &= \frac{\widehat{DC}}{2} \\ \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{COD} &= \widehat{DC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{COD}}{2} \Rightarrow \widehat{COD} = 2\hat{A} \Rightarrow 10\alpha + 20^\circ = 2(7\alpha - 10^\circ) \Rightarrow 10\alpha + 20^\circ = 14\alpha - 20^\circ$$

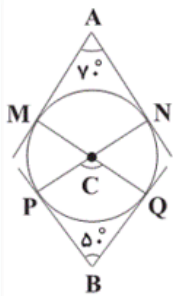
$$\Rightarrow 4\alpha = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ, \quad \widehat{COD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{COD} = 60^\circ$$

در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و  $\hat{A} = 65^\circ$  است. اندازه زاویه  $O_1$  کدام است؟



- (۱)  $65^\circ$
- (۲)  $60^\circ$
- (۳)  $50^\circ$
- (۴)  $45^\circ$

$$\hat{A} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 180^\circ - \widehat{BT} = 50^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 50^\circ$$



در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

- ۱۰۰° (۱)
- ۱۲۰° (۲)
- ۸۰° (۳)
- ۱۴۰° (۴)

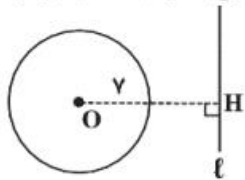
$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \gamma^\circ = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} - \widehat{MN} = 140^\circ \\ \hat{B} &= \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \delta^\circ = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{PMQ} - \widehat{PQ} = 100^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \widehat{MN} &= \widehat{MPN} - 140^\circ \\ \widehat{PQ} &= \widehat{PMQ} - 100^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \widehat{MN} &= 36^\circ - \widehat{MN} - 140^\circ \\ \widehat{PQ} &= 36^\circ - \widehat{PQ} - 100^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \widehat{MN} &= 110^\circ \\ \widehat{PQ} &= 130^\circ \end{aligned} \right.$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{PQ} + \widehat{MN}}{2} = \frac{130^\circ + 110^\circ}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

دایره  $(O, r)$  و خط  $l$  به فاصله  $a+1$  از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار  $a$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱)
- $\frac{3}{2}$  (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

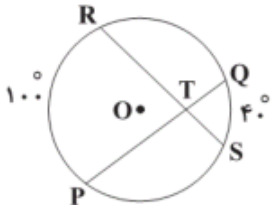
می‌دانیم زمانی خط و دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند که فاصله مرکز دایره تا خط مذکور، بیش‌تر از طول شعاع دایره باشد. بنابراین:



$$OH > r \Rightarrow a+1 > r \Rightarrow a > 6$$

$$\Rightarrow a > 2$$

در دایره  $C(O, r)$ ، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر  $\widehat{RP} = 100^\circ$  و  $\widehat{QS} = 40^\circ$  باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟



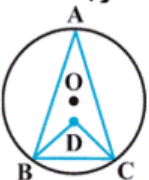
- ۷۰° (۱)
- ۳۵° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۴۰° (۴)

از O به وترهای RS و PQ عمود می‌کنیم و پای عمود را به ترتیب H و H' نام‌گذاری می‌کنیم. چون وترهای RS و PQ برابرند پس فاصله آن‌ها از مرکز برابر است یعنی  $OH = OH'$ . دو مثلث قائم‌الزاویه OHT و OH'T به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهیشت‌اند (وتر OT و اضلاع OH و OH'). پس  $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$  و در نتیجه OT نیمساز زاویه PTR است. پس:

$$\hat{O}TR = \frac{1}{2} \hat{P}TR = \frac{1}{2} \left( \frac{100^\circ + 40^\circ}{2} \right)$$

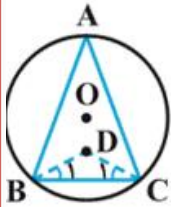
$$= \frac{1}{2} (70^\circ) = 35^\circ$$

در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر  $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟



- ۲۰ (۱)
- ۸۰ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۴۰ (۴)

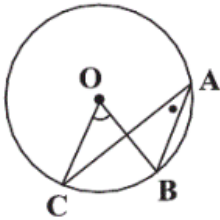




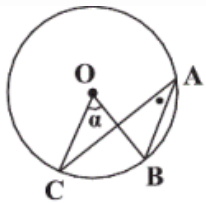
$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{BDC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \quad \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 160^\circ \quad \hat{A} = 20^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 40^\circ$$

دایره C (O, 6) مفروض است. اگر  $\hat{O} = (2x + 10)^\circ$  و  $\hat{A} = (3x - 35)^\circ$  باشد، طول کمان BC کدام است؟



- (1)  $\frac{5\pi}{3}$
- (2)  $2\pi$
- (3)  $\frac{8\pi}{3}$
- (4)  $\frac{10\pi}{3}$

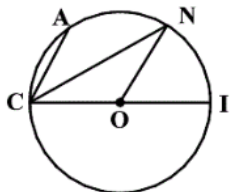


$$\left. \begin{array}{l} \text{مرکزی } \hat{O} = \widehat{BC} \\ \text{محاطی } \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A} \Rightarrow 2x + 10 = 2(3x - 35) \Rightarrow 2x + 10 = 6x - 70$$

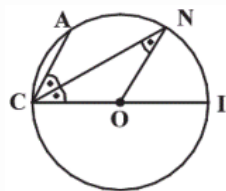
$$\Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow \hat{O} = 2(20) + 10 = 50^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

$$\widehat{BC} \text{ طول} = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \times 6 \times 50^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{3}$$

در شکل مقابل، CI قطر دایره و  $CA \parallel ON$  باشد، آن گاه اندازه زاویه CNO کدام است؟ (O مرکز دایره است).



- (1)  $27/5^\circ$
- (2)  $30^\circ$
- (3)  $35^\circ$
- (4)  $32/5^\circ$



می دانیم اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است، بنابراین داریم:

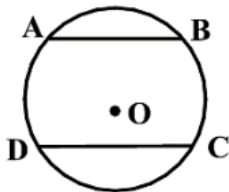
$$\widehat{AC} + \widehat{ANI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ANI} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{ACI} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

از طرفی:  $AC \parallel ON \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{CNO}$  (\*)  $ON = OC \Rightarrow \widehat{CNO} = \widehat{OCN}$  (\*\*)

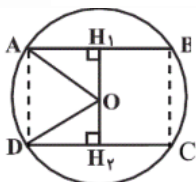
با مقایسه روابط (\*) و (\*\* نتیجه می گیریم:

$$\widehat{CNO} = \widehat{ACN} = \widehat{OCN} = \frac{\widehat{ACI}}{2} = 35^\circ$$

مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع 5 واحد، دو وتر موازی  $AB = 6$  و  $CD = 8$  در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت دوزنقه ABCD کدام است؟



- (1) 56
- (2) 49
- (3) 42
- (4) 35



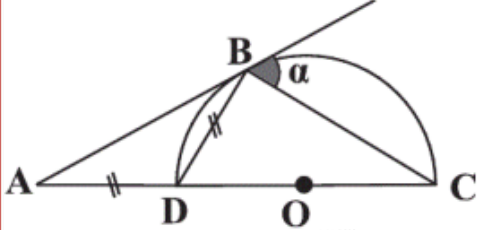
$$OH_1 = \sqrt{OA^2 - AH_1^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4 \quad OH_2 = \sqrt{OD^2 - DH_2^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 3$$

$$\Rightarrow H_1H_2 = OH_1 + OH_2 = 4 + 3 = 7$$

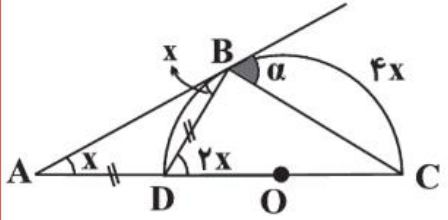
مساحت دوزنقه ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{H_1H_2 \times (AB + CD)}{2} = \frac{7 \times (6 + 8)}{2} = 49$$

مطابق شکل در نیم‌دایره‌ای به مرکز O، زاویه  $\alpha$  چند درجه است؟ (AB در B بر نیم‌دایره مماس است).

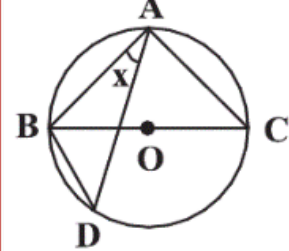


- (۱) ۴۵
- (۲) ۵۰
- (۳) ۵۵
- (۴) ۶۰

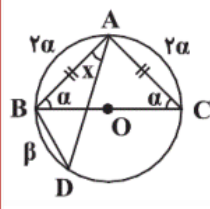


با فرض  $\hat{A} = \hat{ABD} = x$  داریم:  
 $\hat{BDC} = \hat{A} + \hat{ABD} \Rightarrow \hat{BDC} = 2x \Rightarrow \widehat{BC} = 4x$   
 $\hat{ABD} = x \Rightarrow \widehat{BD} = 2x$   
 حال:  
 $\widehat{BDC} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 4x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$   
 در نتیجه:  $\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{4x}{2} = 2x = 60^\circ$

در شکل مقابل،  $AB = AC$  و  $\widehat{BD} + \widehat{AC} = 130^\circ$  می‌باشد. اندازه  $\hat{BAD} = x$  کدام است؟ (O مرکز دایره است).

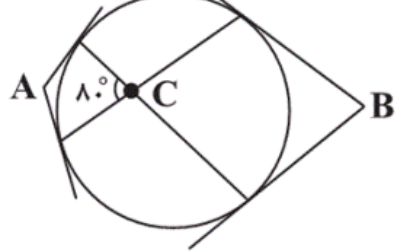


- (۱) ۱۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۳۵



با توجه به شکل:  
 اگر اندازه کمان  $\widehat{BD}$  را  $\beta$  در نظر بگیریم، آن‌گاه طبق فرض داریم:  
 $AB = AC \Rightarrow \hat{ABC} = \hat{BCA} = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = 2\alpha$   
 $\widehat{AC} + \widehat{BD} = 130^\circ \Rightarrow 2\alpha + \beta = 130^\circ$  (۱)  
 از طرفی  $\widehat{BAC} = 180^\circ$  در نتیجه:  $4\alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \xrightarrow{(1)} 90^\circ + \beta = 130^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ \Rightarrow x = \frac{\beta}{2} = 20^\circ$

مطابق شکل از نقاط A و B بر دایره مماس‌هایی رسم می‌کنیم. اگر اندازه زاویه C برابر  $80^\circ$  درجه باشد، آن‌گاه مجموع دو

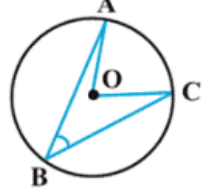


زاویه A و B چند درجه است؟

- (۱) ۸۰
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۱۶۰
- (۴) ۲۰۰

از طرفی می‌دانیم  $\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{PCQ} = 200^\circ$  پس:  $\hat{A} + \hat{B} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{PQ}}{2} = 100^\circ$

مطابق شکل مقابل، دایره  $C(O, 2)$  مفروض است. اگر طول کمان AC برابر  $\frac{\pi}{3}$  باشد، اندازه زاویه ABC کدام است؟



- (۱)  $22/5^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $75^\circ$

از رابطه  $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$  اندازه کمان AC مشخص می‌شود. داریم:  
 $L = \frac{\pi \times 2}{180} \alpha = \frac{\pi}{90} \alpha \rightarrow \alpha = \widehat{AC} = 45^\circ$   
 چون زاویه ABC زاویه محاطی است، پس اندازه آن نصف کمان AC است، پس:  
 $\hat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 22/5^\circ$