رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در محاسبهٔ حد :

1 توابع گویا : برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در این نوع توابع کافیست صورت و مخرج کسر را تجزیه، سپس ساده نماییم.

مثال : $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{0}{0}$ مُبهم $\longrightarrow \lim_{x\to 4}\frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

توجه : گاهی مواقع هنگام تجزیه به سختی افتاده و لازم است روش ساده تری را برای این منظور مطرح کنیم. لذا بهتر است از جدول هورنر استفاده کنیم. (توضیح آن در کلیپ موجود است)

مثال : $\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-7x^2+5x+2}{x-2}=\frac{0}{0}$ مبهم

	2	-7	5
2		4	-6
	$2x^2$	$-3x$	-1

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(2x^2-3x-1)}{\cancel{x-2}}=8-6-1=1$$

مثال : $\lim_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3-5x-4}{x^3+1}=\frac{0}{0}$ مبهم

صورت	1	2	0	-5
-1		-1	-1	1
	$1x^3$	$+1x^2$	$-1x$	-4

مخرج	1	0	0
-1		-1	1
	$1x^2$	$-1x$	$+1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^3+x^2-x-4)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}=\frac{-1+1+1-4}{1+1+1}=-1$$

مثال : با فرض $f(x)=3x^2+x-1$ مطلوبست :

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $\longrightarrow f(1)=3+1-1=3$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1-3}{x-1}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

	3	1
1		3
	$3x$	4

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+4)}{\cancel{x-1}}=7$$

ب) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\longrightarrow f(x+h)=3(x+h)^2+(x+h)-1=3x^2+6xh+3h^2+x+h-1$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2+x+h-1-3x^2-x+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+h^2+h}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6x+3h+1)}{\cancel{h}}=6x+1$$

مثال: به ازای چه مقدار از m داریم: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+mx^2-m-1}{4x-4} = 2$

$\frac{1+m-m-1}{4-4} = \frac{0}{0}$ = حد

	1	m	0
1		1	m+1
	$1x^2$	$(m+1)x$	$(m+1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+(m+1)x+(m+1))}{4\cancel{(x-1)}} = \frac{1+m+1+m+1}{4} = 2 \Rightarrow 2m+3=8 \Rightarrow m=\frac{5}{2}$$

تمرین: به ازای چه مقدار از a و b داریم: $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+ax+b}{x+2} = 3$

باید صورت کسر برابر صفر باشد، در غیر این صورت حد مقدار تعریف نشده بوده و ۳ نمی‌شد. $\frac{4-2a+b}{0}$ = حد

$\Rightarrow 4-2a+b=0$ ① $\Rightarrow$ حد $= \frac{0}{0}$ مبهم

	1	a
-2		-2
	$1x$	$a-2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+a-2)}{\cancel{x+2}} = -4+a = 3 \Rightarrow a=7 \xrightarrow{①} 4-14+b=0 \Rightarrow b=10$$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x}$ ، حاصل $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)\,g(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x^2-x-1} \times \frac{2x+1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\cancel{(2x+1)}(x-1)} \times \frac{\cancel{2x+1}}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

تمرین: با فرض $f(x)=x^2+x$ مطلوب است $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

$$f(1+h) = (1+h)^2+(1+h) = 1+2h+h^2+1+h = h^2+3h+2 \quad , \quad f(1)=1+1=2$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+3h+2-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+3)}{\cancel{h}} = 3$$

② **توابع رادیکالی:** برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در این توابع باید صورت یا مخرج، هرکدام که رادیکالی است را گویا کرده، سپس کسر را ساده کنیم.

مثال: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x+8}+3)}=\frac{1}{6}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}\times\frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{3x-5}+2)}{3x-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\cancel{x-3})(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3(\cancel{x-3})}=\frac{6\times 4}{3}=8$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(8-2x)(2+\sqrt{x})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{(\cancel{4-x})(3+\sqrt{2x+1})}{2(\cancel{4-x})(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{2\times 4}=\frac{3}{4}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\times\frac{\sqrt[3]{x}^{2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}^{2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(\sqrt[3]{x}^{2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3}$$

توجه: گاهی مواقع می‌توان با استفاده از یک تجزیهٔ ساده و بدون گویا کردن عبارات، حد را محاسبه نمود.

مثال: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{فاکتورگیری در صورت}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}(\cancel{\sqrt{x}-1})}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=1$

مثال: $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{تجزیه مزدوج در صورت}} \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\cancel{\sqrt{x}-2}} = 2+2=4$

نوجه: گاهی مواقع با تغییر متغیر مناسب می‌توان به راحتی رفع ابهام نموده و حد را محاسبه کرد.

مثال: $\lim_{x\to 4} \frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} \rightsquigarrow$ می‌گیریم: $\sqrt{x}=t \Rightarrow \begin{cases} x=t^2 \\ t\to 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 2} \frac{t^2-3t+2}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{\cancel{(t-2)}(t-1)}{\cancel{t-2}} = 2-1=1$$

مثال: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

می‌گیریم: $\sqrt[6]{x}=t \Rightarrow \begin{cases} x=t^6 \\ t\to 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{حد} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}{\sqrt[6]{t^6}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3-t^2}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2\cancel{(t-1)}}{\cancel{t-1}} = 1$$

مثال: با فرض $f(x)=\sqrt{x}$ مطلوبست $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$f(x+h)=\sqrt{x+h}$

$$\Rightarrow \text{حد} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمرین: عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$.

$\text{حد} = \frac{\sqrt{b}-2}{0} \longrightarrow$ باید صورت کسر برابر صفر باشد، در غیر این صورت حد تعریف نشده بوده و برابر ۱ نمی‌شود

$$\Rightarrow \sqrt{b}-2=0 \Rightarrow \sqrt{b}=2 \Rightarrow b=4$$

$$\Rightarrow \text{حد} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+4}-2}{x} \times \frac{\sqrt{ax+4}+2}{\sqrt{ax+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{ax+4}+2)} = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4}=1 \Rightarrow a=4$$

نکته: درصورتی که مبهم $\frac{0}{0}$، با وجود جزء صحیح پدید آید، ابتدا فقط حد جزء صحیح ها را حساب کرده سپس رفع ابهام می کنیم.

مثال: $$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}\xrightarrow{\lim_{x\to 2^+}[x]=2}\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}}=2\times 4=8$$

مثال: $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-[x^3]}{x-[x]}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-[x^3]}{x-[x]}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-[x^3]}{x-[x]}\xrightarrow[\lim_{x\to 1^+}[x]=1]{\lim_{x\to 1^+}[x^3]=1}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\cancel{x-1})(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3\Longrightarrow$$ تابع در $x=1$ حد ندارد

نکته: در محاسبه حد توابع قدرمطلق دار (وقتی $x\to a$) اگر به حالت مبهم رسیدیم، باید با بررسی علامت عبارت درون قدرمطلق در همسایگی a، قدرمطلق را حذف و کسر را ساده کنیم.

مثال: $$\lim_{x\to 2}\frac{|x-1|+|x-3|-x}{4x-|x|-6}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{x-1-x+3-x}{4x-x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{-(\cancel{x-2})}{3(\cancel{x-2})}=-\frac{1}{3}$$

مثال: $$\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}=\frac{0}{0}$$ مبهم

در همسایگی راست ۵ عبارت درون قدرمطلق، مثبت و در همسایگی چپ ۵، منفی است پس باید حدهای چپ و راست را محاسبه نمود. (هرگاه عبارت درون قدرمطلق صفر شد باید حدهای چپ و راست را حساب کنیم.)

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{x-5}}=1$$
$$\lim_{x\to 5^-}\frac{|x-5|}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{-(\cancel{x-5})}{\cancel{x-5}}=-1$$
$\Longrightarrow$ تابع در $x=5$ حد ندارد

مثال: $$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x-2|}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2+x-2|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x+2|\times|x-1|}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)(\cancel{x-1})}{(x+1)(\cancel{x-1})}=\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2+x-2|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x+2|\times|x-1|}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+2)(-(\cancel{x-1}))}{(x+1)(\cancel{x-1})}=\frac{-3}{2}$$
$\Longrightarrow$ تابع در $x=1$ حد ندارد

مثال: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|\times|x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}} \times \frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(\underset{x+2}{\cancel{x^2-4}})} = \frac{-3\times 8}{3\times 4} = -2$$

---

③ توابع مثلثاتی:

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در این توابع، کافیست با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی، کسر را ساده کنیم. (در ادامه، به تناسب فرمول ها را یادآور خواهیم شد)

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(\cancel{1-\sin x})(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}} = 1+1 = 2$

مثال: $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

فرمول: $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \pi} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to \pi} \frac{(1-\cos x)(\cancel{1+\cos x})}{\cancel{1+\cos x}} = 1-(-1) = 2$$

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

فرمول: $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

فرمول: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\cos x-\sin x})}{\cancel{\cos x-\sin x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

فرمول: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{(\cancel{\cos x-\sin x})(\cos x+\sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{0}{0}$ مبهم (فرمول: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)}{(1-\cos x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)\times\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cos^2 x}}{\cancel{(1-\cos x)^2}}=\frac{2\times\frac{2}{1}}{1}=4$$

نکته: اگر θ برحسب رادیان باشد، آنگاه $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ ، $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1$.

همچنین برای معکوس کسرهای فوق نیز تساوی برقرار است: $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta}{\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta}{\tan\theta}=1$

مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2$

مثال: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

مثال: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sin(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sin(x-4)}\times\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sin(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

مثال: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2x-\frac{\pi}{3}}{\tan(x-\frac{\pi}{6})}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2(x-\frac{\pi}{6})}{\tan(x-\frac{\pi}{6})}=2\times 1=2$

مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\times 2}{3x\times 2}=\dfrac{1\times 2}{3}=\dfrac{2}{3}$

مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x-\tan 2x}{4x}=\dfrac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0}5\dfrac{\sin 5x}{5x}-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\tan 2x}{2x}=\dfrac{10}{4}-\dfrac{2}{4}=2$

مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\,2\cancel{x}}{\frac{\sin 5x}{5x}\,5\cancel{x}}=\dfrac{1\times 2}{1\times 5}=\dfrac{2}{5}$

مثال: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{|1-\cos x|} = \frac{0}{0}$ مبهم

* همواره $1-\cos x$ نامنفی است بنابراین $|1-\cos x| = 1-\cos x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} = 1\times 2 = 2$$

مثال: $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \frac{0}{0}$ مبهم

فرمول: $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{2\times\frac{x-a}{2}} = \frac{2\cos a}{2} = \cos a$$

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$

فرمول: $1-\cos(\text{زاویه}) = 2\sin^2(\text{نصف زاویه})$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

مثال: $$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\times 2\sin^2 x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{x} = 4$$

توجه: گاهی با یک تغییر متغیر مناسب، راحت تر می توان حد را محاسبه نمود.
اغلب وقتی $x\to a$ ، کافیست $x-a=t$ و $t\to 0$ فرض شود و همچون مثال های بعد، ادامه داد.

مثال: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x} = \frac{0}{0}$ مبهم $\longrightarrow$ می گیریم: $x-\frac{\pi}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+t\\ t\to 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{2(\frac{\pi}{2}+t)-\pi}{\cos(\frac{\pi}{2}+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin t} = -2$$

مثال: $\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi} = \frac{0}{0}$ مبهم $\longrightarrow$ می گیریم: $x+\pi=t \Rightarrow \begin{cases} x=-\pi+t\\ t\to 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\cos(-\pi+t)+1}{-\pi+t+\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{-\cos t+1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cdot \sin t}{t(1+\cos t)} = \frac{1\times 0}{1+1} = 0$$

مثال: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x-\pi} = \frac{0}{0}$ مبهم $\longrightarrow$ تغییر: $x-\frac{\pi}{4}=t \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+t \\ t\to 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+2t)-1}{\pi+4t-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t} = \lim_{t\to 0} -\frac{1-\cos 2t}{4t} = \lim_{t\to 0} -\frac{2\sin^2 t}{4t}$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{\sin t \cdot \overset{1}{\frac{\sin t}{t}}}{2} = -\frac{0\times 1}{2} = 0$$

نمونه تست ——— نمونه تست

۱- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ کدام است؟ ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$ (ریاضی خارج ۹۱)

با توجه به رابطهٔ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، می‌توان نوشت: $\sin x=\tan x.\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan x.\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x.\sin^2 x}{\sin^3 x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x\times 2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\tan x}}{\cancel{\tan x}\cos x\times 2} = \frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

۲- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[7]{x}-1)}{(x-1)^6}$ کدام است؟ ۱) $6!$ ۲) $7!$ ۳) $\frac{1}{7!}$ ۴) $\frac{1}{6!}$

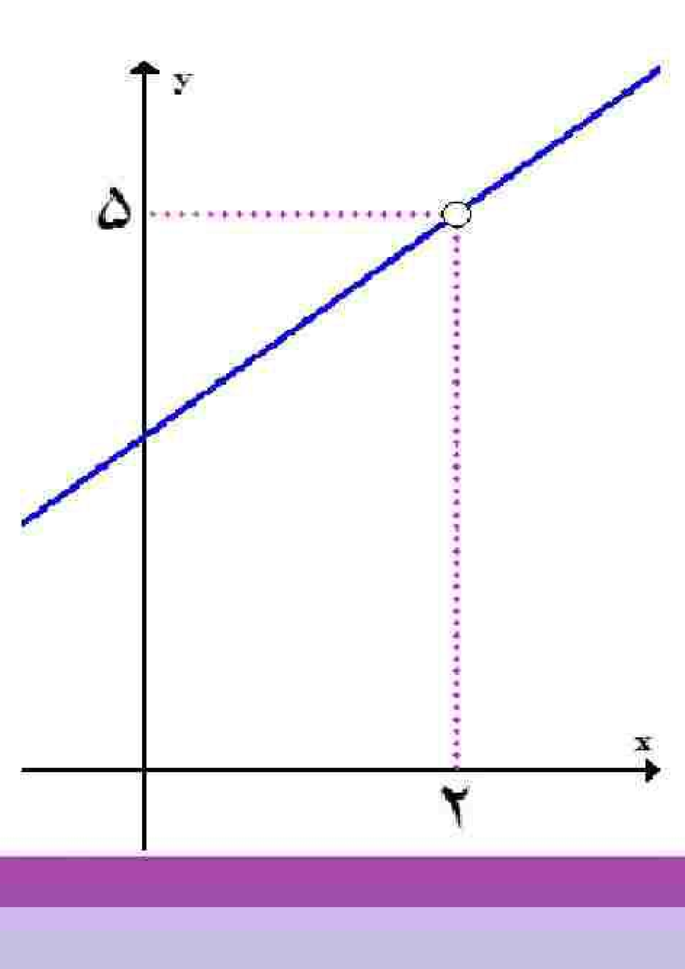
توجه: در محاسبهٔ حد، هنگامی که $x\to 1$، می‌توان به جای $\sqrt[n]{x}-1$ عبارت $\frac{x-1}{n}$ را جایگزین کرد، به عبارت دیگر: $\sqrt[n]{x}-1 \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{n}$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{2}\times\frac{x-1}{3}\times\cdots\times\frac{x-1}{7}}{(x-1)^6} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)^6}{7!}}{(x-1)^6} = \frac{1}{7!}$$

۳- حاصل $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-[x^3]}{2x^2-x[x]-2[x]}$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

می‌دانیم $\lim_{x\to 2^+}[x]=2$ ، $\lim_{x\to 2^+}[x^3]=8$ ، بنابراین:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{2x^2-2x-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{2\cancel{(x-2)}(x+1)} = 2$$



۴- شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x+b}$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) -8 ۴) -4

تابع f در $x=2$ تعریف نشده، پس ۲ ریشهٔ مخرج است: $2+b=0 \Rightarrow b=-2$

از طرفی در $x=2$ دارای حد می‌باشد پس باید ۲ ریشهٔ صورت نیز باشد: $4+2+a=0 \Rightarrow a=-6$

$\Rightarrow a+b=-8$