

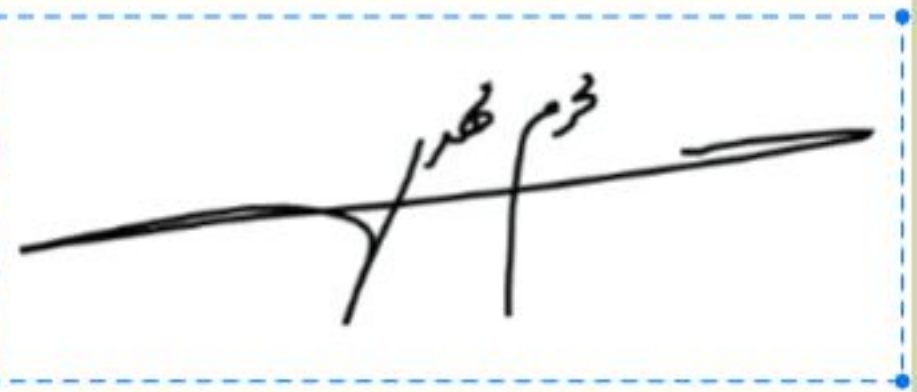
# به نام خداوند بخشنده مهربان

## حد و پیوستگی

- ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی
- ۲ حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)
- ۳ فضایی حد
- ۴ محاسبه حد توابع کسری (حالت  $\frac{\infty}{\infty}$ )
- ۵ پیوستگی



فصل



حل فعالیتها، کار در کلاسها و تمرینهای فصل پنجم حسابان 1

## مفهوم حد و فرایندهای حدی

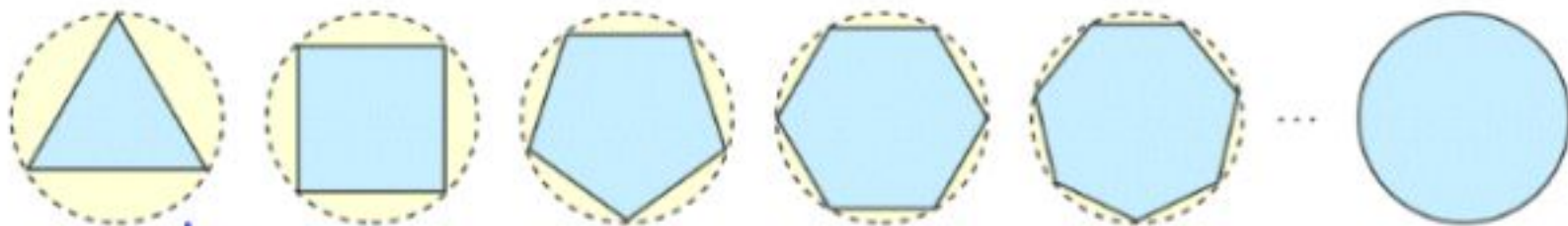
درس

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi

صفحه ۱۱۴

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



دایره

۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟

$$\pi \cdot 1^2 = \pi$$

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد  $\pi$  تا ۵ رقم اعشار را برابر  $\pi = 3.14159$  در نظر بگیریم و مساحت  $n$  ضلعی منتظم واقع در درون دایره

را با  $A_n$  نشان دهیم، جدول زیر مقادیر  $A_n$  را به ازای برخی  $n \in \mathbb{N}$  نشان می‌دهد:

$n$	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
$A_n$	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۲	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۲۲	۲/۸۹۲۵۲	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۲۱۰۷	۳/۱۲۱۳۶	۳/۱۲۱۳۶	۳/۱۲۱۵۰	۳/۱۲۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله  $A_n$  (مساحت  $n$  ضلعی درون

دایره) به عدد  $\pi$  که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم. به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.



یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ را در نظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می باشد. **۱** مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید

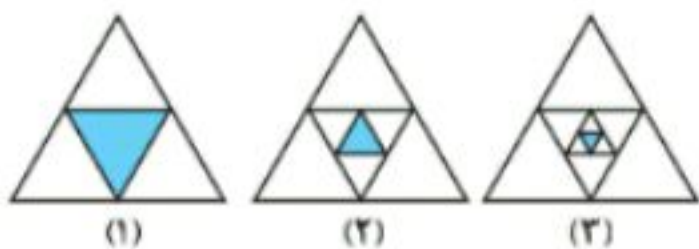
را  $x_1$  و اندازه محیط آن را  $P_1$  می نامیم.

در این صورت داریم:  $x_1 = \frac{2}{2} = 1$  و  $P_1 = \frac{6}{2} = 3$



**۲** اگر عمل وصل کردن وسط ضلع های مثلث های جدید را ادامه دهیم و در مرحله  $n$ ام طول ضلع مثلث به وجود

آمده را با  $x_n$  و محیط آن را با  $P_n$  نمایش دهیم، با توجه به شکل های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



$x_n$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{2^n}$
$P_n$	۳	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	...	$\frac{3}{2^n}$

**۳** اندازه اضلاع مثلث ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟

صفر

**۴** اندازه محیط این مثلث ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟

صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را  $x$  در نظر بگیریم و  $f$  تابعی باشد که محیط مثلث را بر حسب ضلع آن بیان می کند، آن گاه

داریم  $f(x) = 3x$

همان طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر  $x$ ) به عدد صفر نزدیک می شود، محیط مثلث ها، یعنی مقادیر

تابع  $f$ ، نیز به عدد صفر نزدیک می شوند.

توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  با ضابطه های  $f(x) = x+3$  و  $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  و  $h(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

**۱** مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید:

$f(3) = \dots = 6$  (Handwritten:  $3+3=6$ )

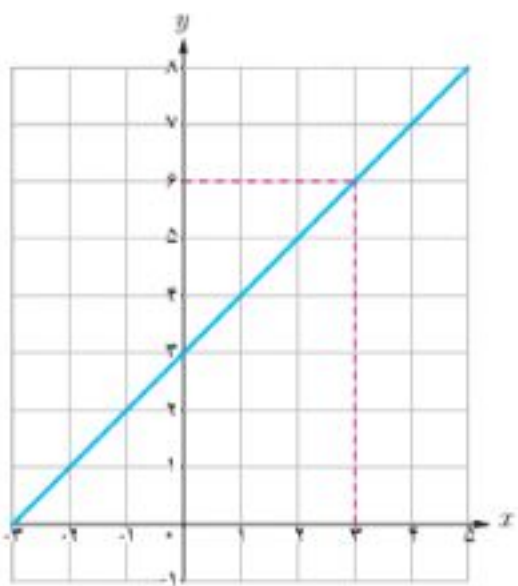
$g(3) = \dots$  (Handwritten:  $\frac{3^2-9}{3-3}$  is undefined)

$h(3) = \dots = 4$

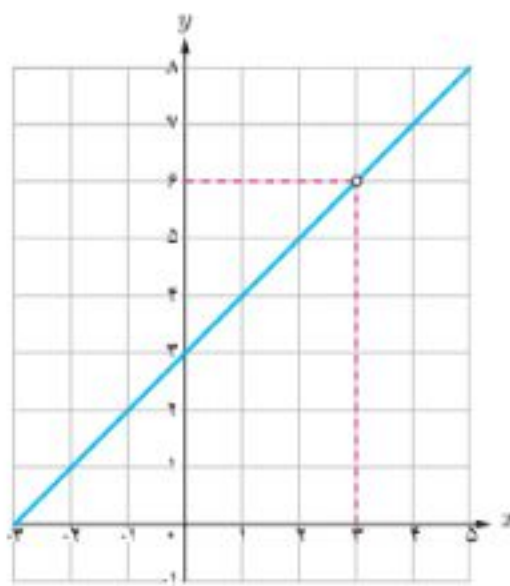
۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر  $x$  را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  هر کدام به چه عددی نزدیک می‌شوند. عدد ۶

$x$	$2/9$	$2/99$	$2/999$	$2/9999$	$\rightarrow 3$	$\leftarrow 3/00001$	$3/0001$	$3/001$	$3/01$	$3/1$
$f(x)$	$5/9$	$5/99$	$5/999$	$5/9999$	$\rightarrow 6$	$\leftarrow 6/00001$	$6/0001$	$6/001$	$6/01$	$6/1$
$g(x)$	$5,9$	$5,99$	$5,999$	$5,9999$	$\rightarrow 6$	$\leftarrow 6,00001$	$6,0001$	$6,001$	$6,01$	$6,1$
$h(x)$	$5,9$	$5,99$	$5,999$	$5,9999$	$\rightarrow 6$	$\leftarrow 6,00001$	$6,0001$	$6,001$	$6,01$	$6,1$

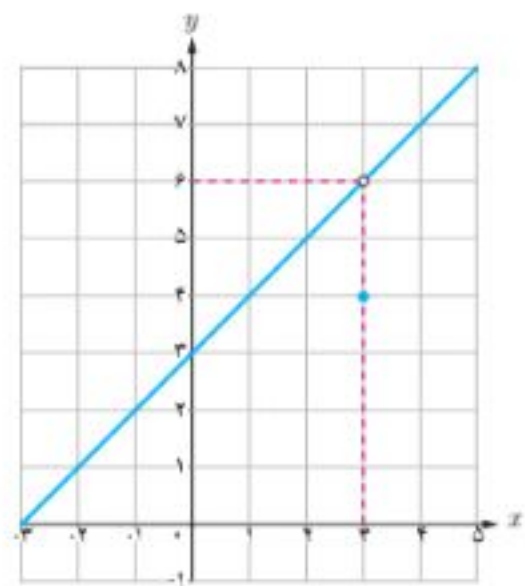
۲ نمودارهای توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  به صورت زیر رسم شده است. از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر  $x$  را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر  $f(x)$ ،  $g(x)$  و  $h(x)$  هر کدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار  $f$



نمودار  $g$



نمودار  $h$

هر ۳ تابع به عدد ۶ نزدیک می‌شوند

صفحه ۱۱۸

۴ حد هر سه تابع وقتی  $x$  به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

شباهت: حد هر سه تابع در  $x = 3$  برابر با ۶ است.

تفاوت: مقدار توابع در  $x = 3$  برابر نیست و مقدار توابع با حد

برابر نیست.

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

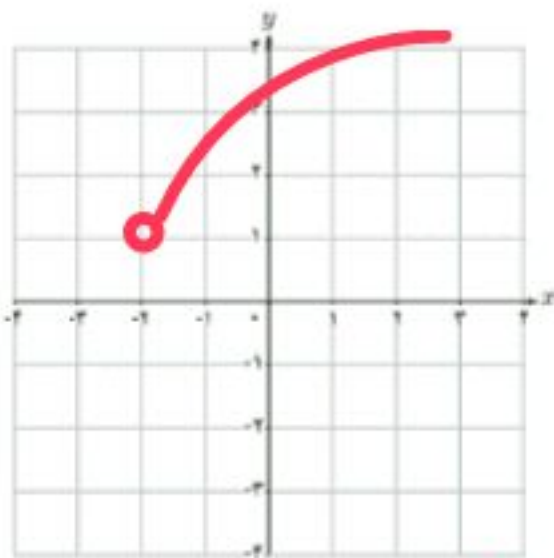
۲ آیا بازه (۲,۳) یک همسایگی ۲ می باشد؟ چرا؟ **بله - طبق تعریف همسایگی راست برای ۲ است**

① همسایگی ۳  $\rightarrow$  (۲, ۴)

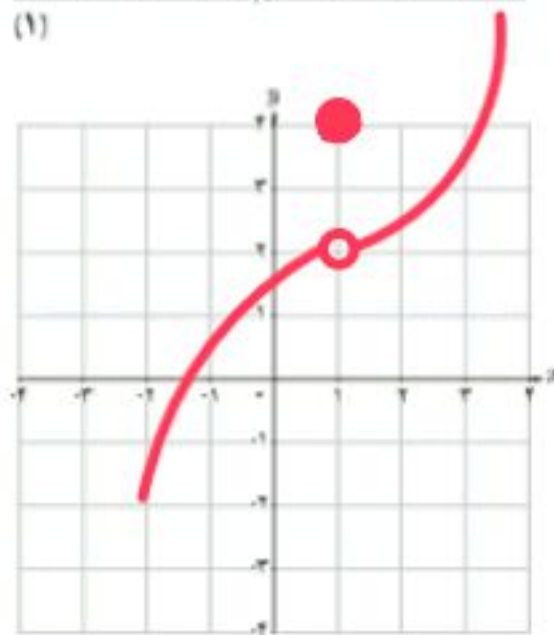
همسایگی محذوف ۳  $\rightarrow$  (۲, ۴) - {۳}

همسایگی راست ۳  $\rightarrow$  (۳, ۴)

همسایگی چپ ۳  $\rightarrow$  (۲, ۳)



(۱)



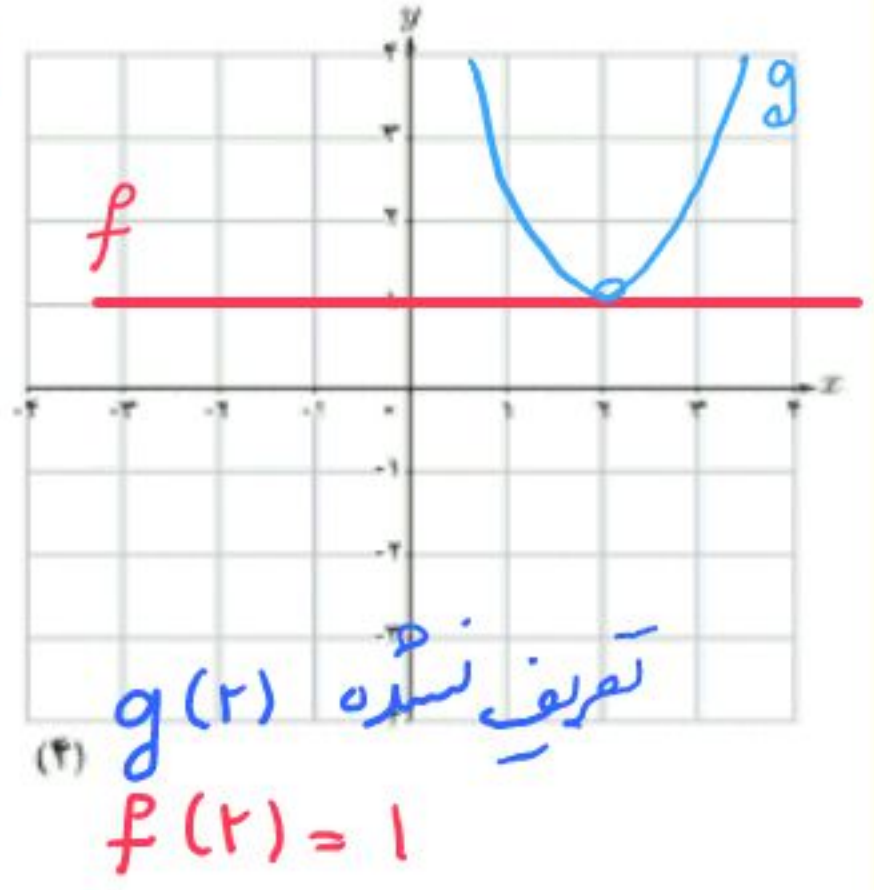
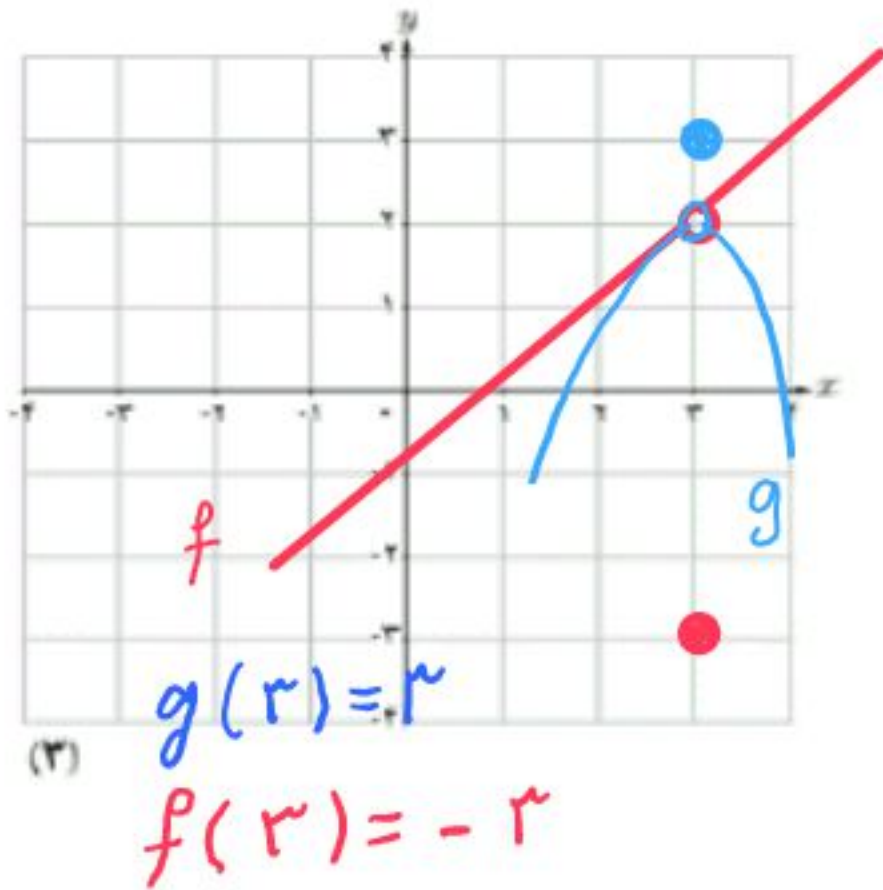
(۲)

۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

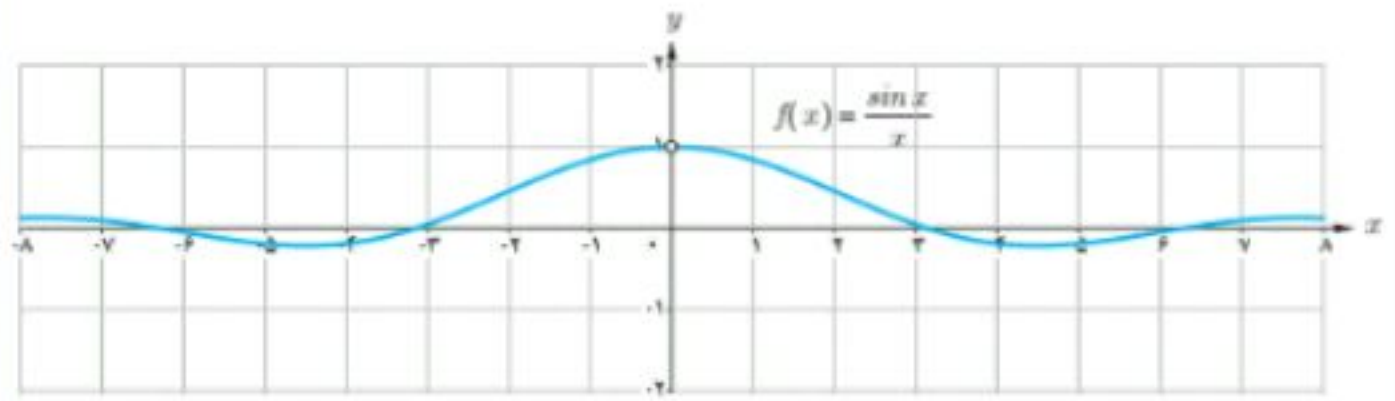
۳ نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و  $f(3) \neq g(3)$ .

۴ نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و  $f$  در ۲ تعریف شده باشد اما تابع  $g$  در ۲ تعریف نشده باشد.



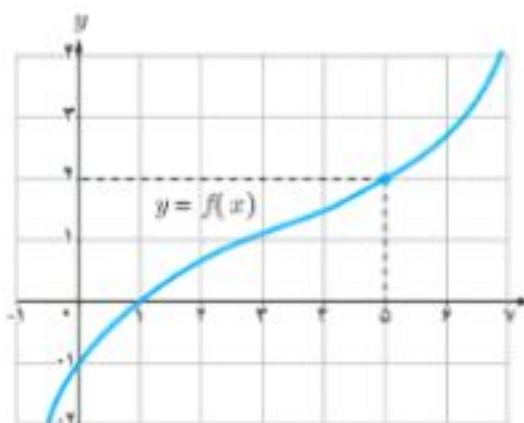
$x$	$\frac{\sin x}{x}$
$\pm 1$	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
$\pm 0.5$	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
$\pm 0.4$	۰/۹۷۳۵۲۵۸۶
$\pm 0.3$	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
$\pm 0.2$	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
$\pm 0.1$	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
$\pm 0.05$	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
$\pm 0.01$	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
$\pm 0.005$	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
$\pm 0.001$	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

۵ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع  $f$ ، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  را به دست آورید. (محور  $x$ ها برحسب رادیان است).

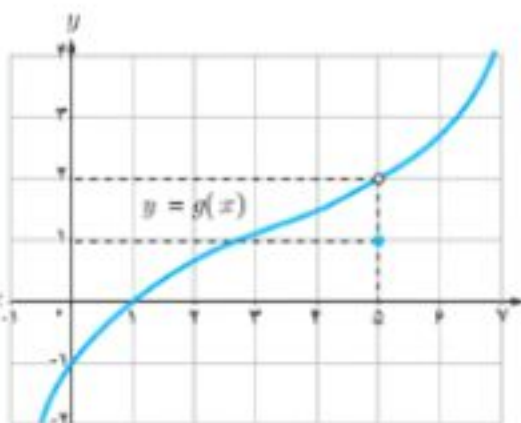


$x \rightarrow 0$  میل می‌کند  
 $\frac{\sin x}{x}$  میل می‌کند  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

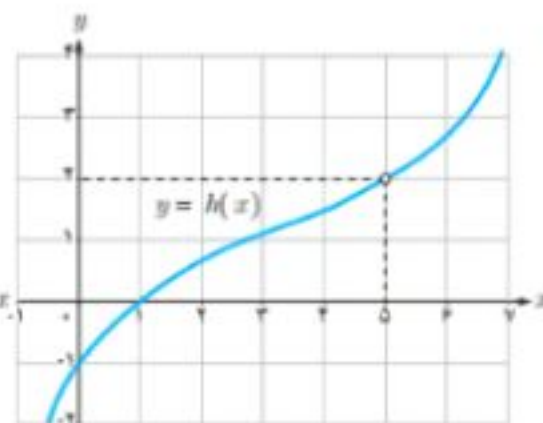
۱ نمودار سه تابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه  $x=5$ ، مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$$

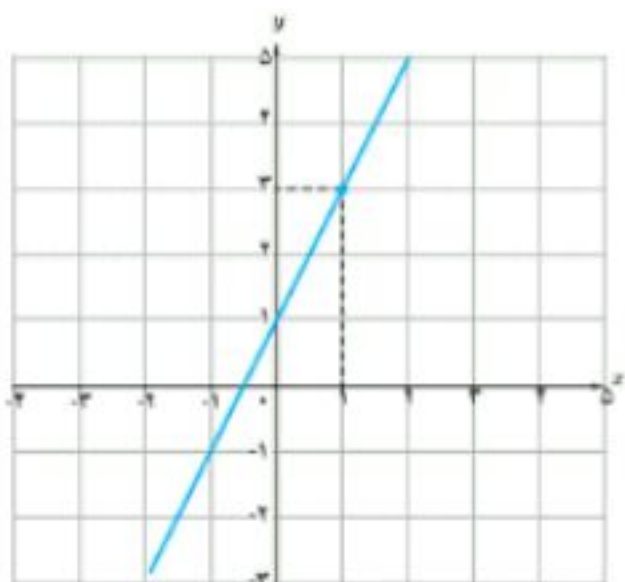


$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 1$$

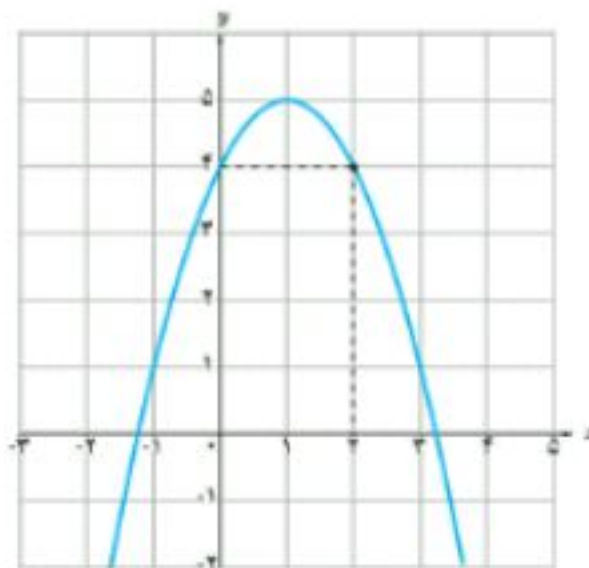


$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 2$$

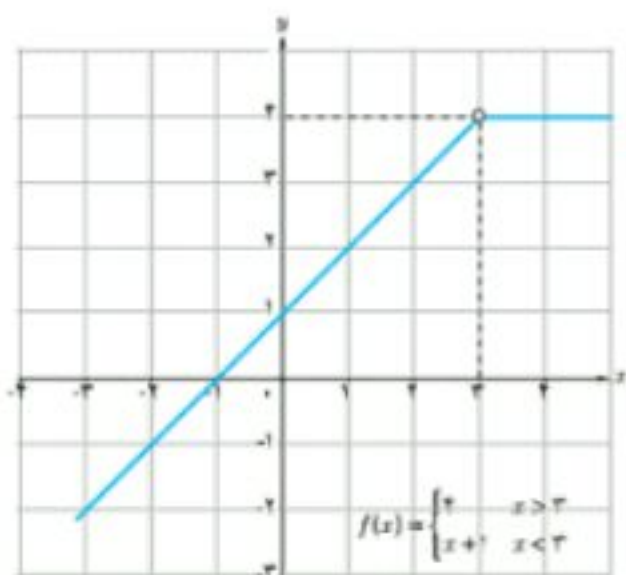
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



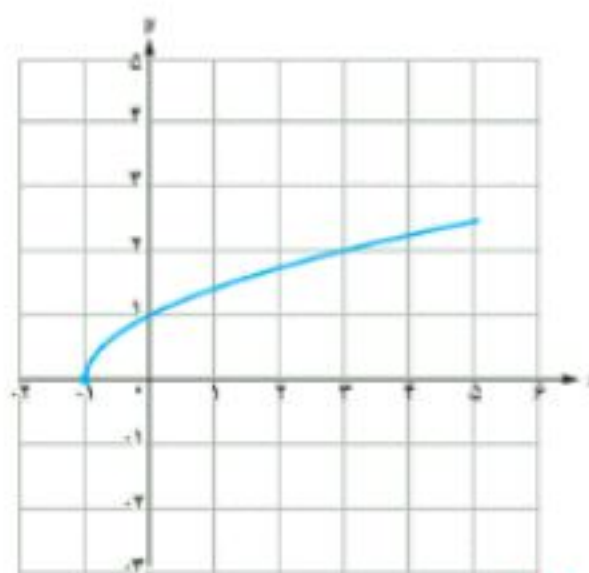
$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+1} = 2 \text{ حد ندارد}$$

با تکمیل هر یک از جدول های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x+4) = \dots$

x	-1	-0.9	-0.1	-0.01	→ 0	← 0.001	0.01	0.1	0.5	1
f(x)	7	9.7	4.3	4.03	→ ?	← 4.997	3.97	3.7	2.5	1

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$  .  $f(x) = \begin{cases} x-4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

x	-2	-1.5	-1.1	-1.01	-1.001	→ -1	← -0.999	-0.99	-0.9	-0.8
f(x)	-6	-5.5	-5.1	-5.01	-5.001	→ ?	← -4.999	-4.9	-4.8	

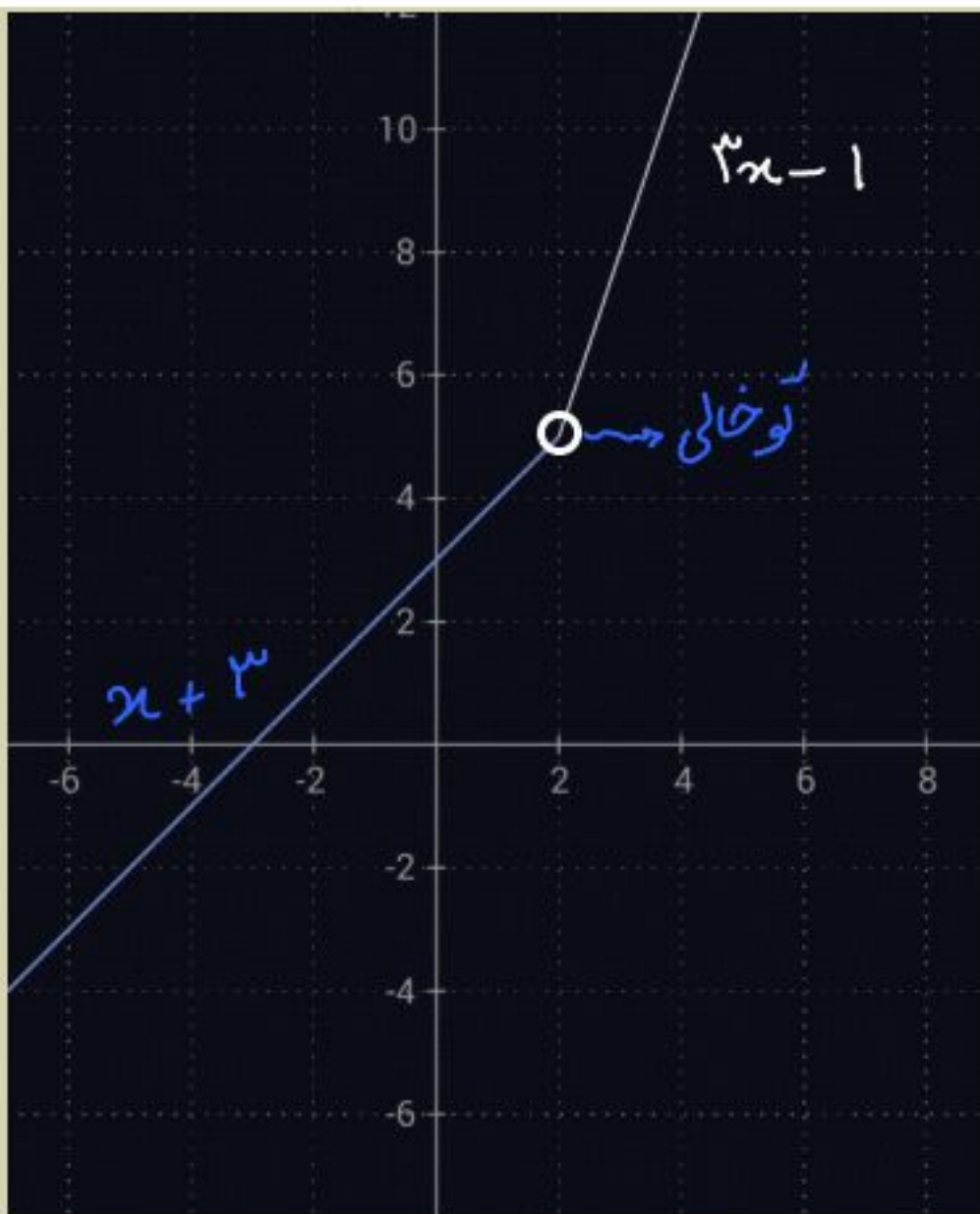
$\downarrow$   
-5.01
 $\downarrow$   
-4.99

تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

الف) آیا تابع  $f$  در نقطه  $x=2$ ، تعریف شده است؟ خیر

ب) با رسم نمودار  $f$  و یا نوشتن جدول مقادیر  $f$  در همسایگی محذوف 2 مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  را به دست آورید.



$x = 4 \rightarrow f(x) = 11$
$x = 3 \rightarrow f(x) = 10$
$x = 2.5 \rightarrow f(x) = 7.5$
$x = 2.1 \rightarrow f(x) = 5.3$
$x = 2.01 \rightarrow f(x) = 5.03$
$x = 2.001 \rightarrow f(x) = 5.003$
⋮
$x = 1.999 \rightarrow f(x) = 4.999$
$x = 1.99 \rightarrow f(x) = 4.99$
$x = 1.9 \rightarrow f(x) = 4.9$
$x = 1.5 \rightarrow f(x) = 4.5$
$x = 1 \rightarrow f(x) = 4$

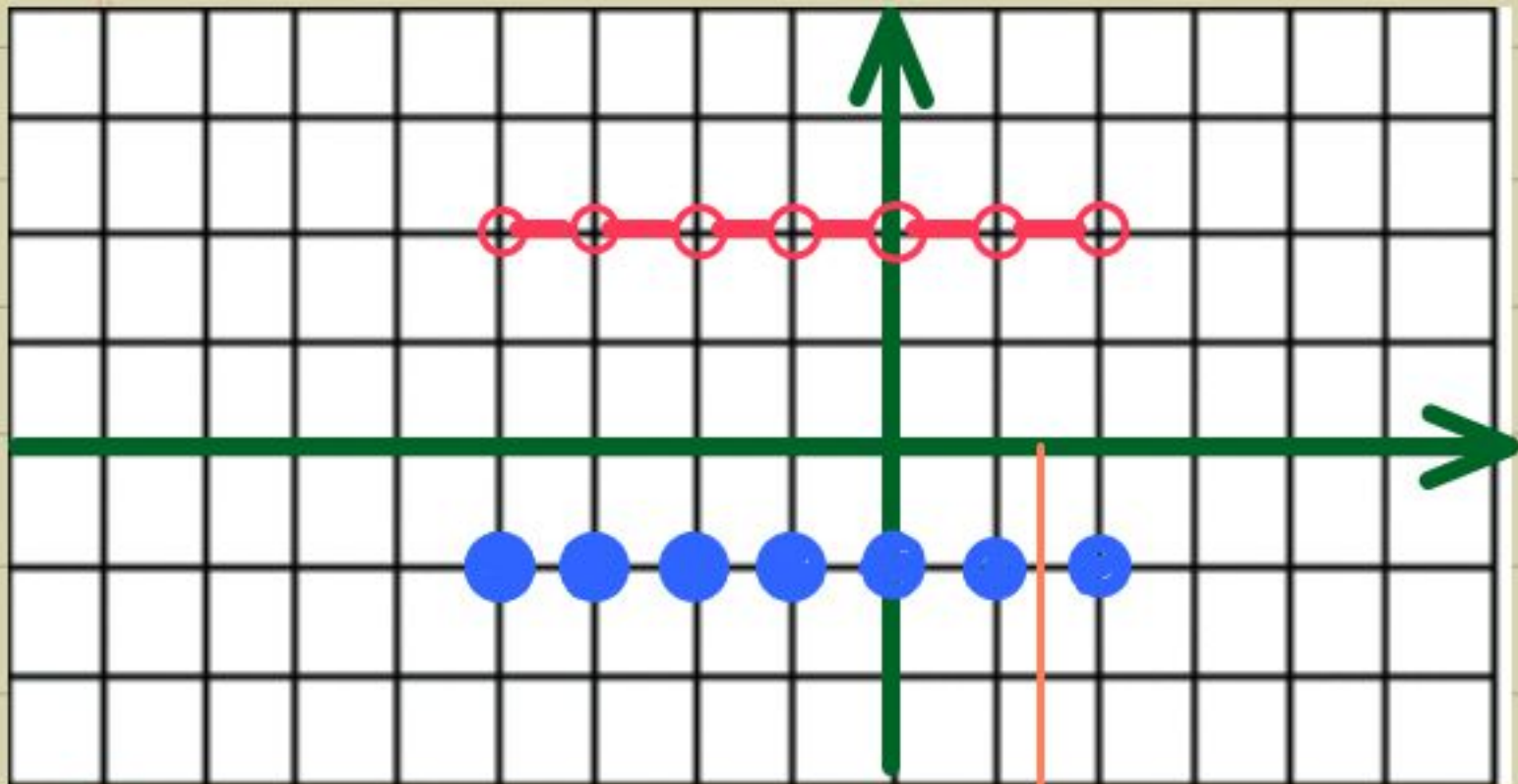
$\downarrow$   
5  
 $\uparrow$

۵ تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

الف) نمودار  $g$  را در فاصله  $[-4, 2]$  رسم کنید.  
 ب) با استفاده از نمودار  $g$ ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

$\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = 2$$

۶ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع  $f$  را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی  $0/9$  تعریف شده است؟ **پلی**

ت) آیا تابع  $f$  در همسایگی  $x=1$  تعریف شده است؟ در همسایگی راست  $x=1$  چگونه؟ **خیر**

الف)  $1 - x^2 \geq 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$

$x$	$-1$	$1$
$1-x^2$	$-$	$+$

$\bullet \text{---} \bullet$   
 $[-1, 1]$

$x \neq 0$  ریشه نخرج

$$D_f = [-1, 1] - \{0\} \text{ یا } [-1, 0) \cup (0, 1]$$



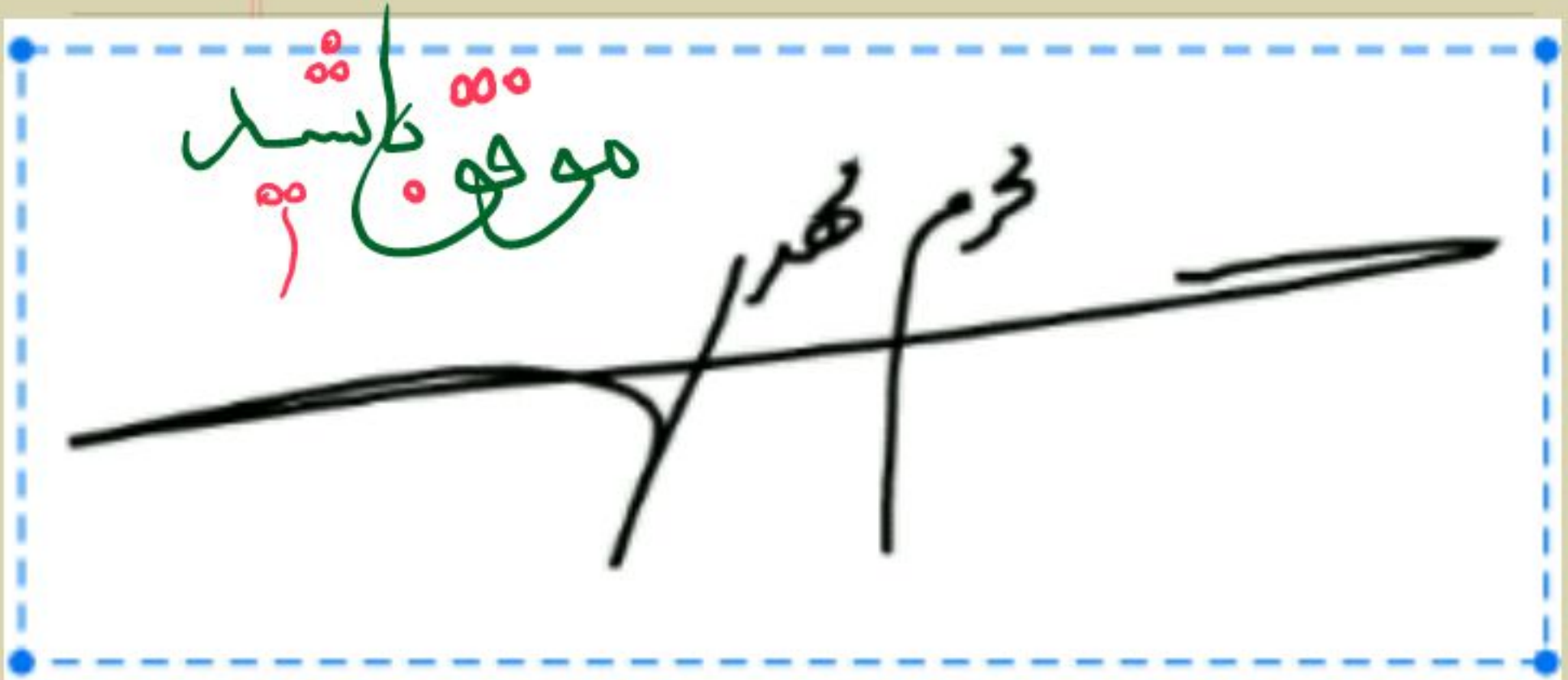
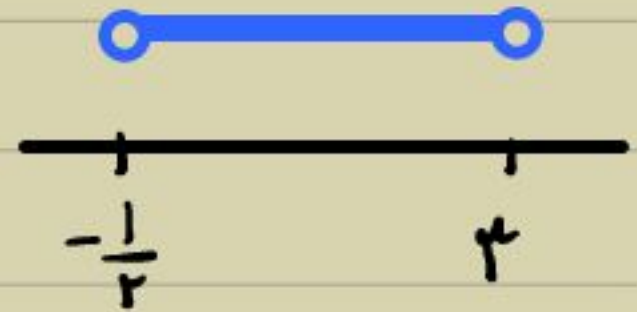
۷ اگر بازه  $(x-1, 2x+3)$  یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر  $x$  را به دست آورید.

$$x-1 < 2 \rightarrow x < 3 \quad (1)$$

$$2x+3 > 2 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$-\frac{1}{2} < x < 3$$



تهران

چهاردهم بهمن ماه 1399

پایان درس اول از فصل پنجم