

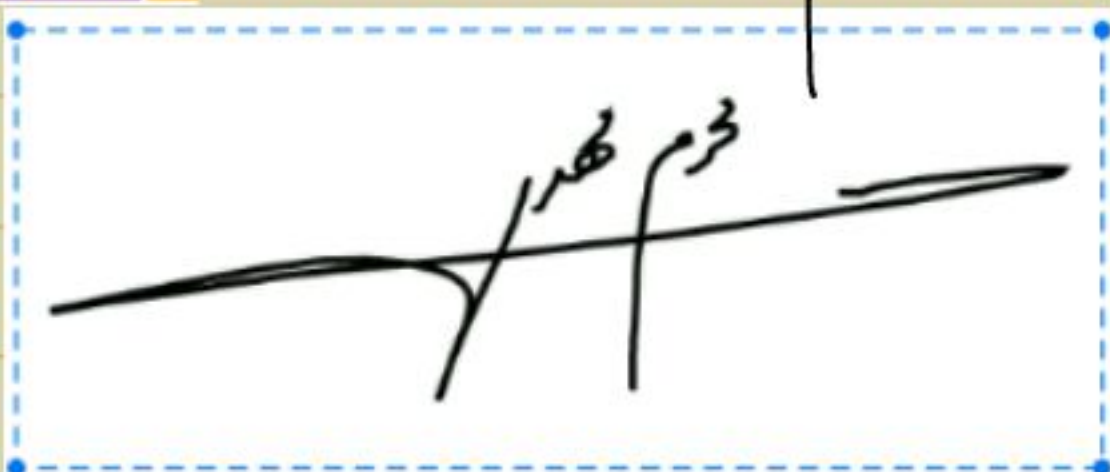


به نام خدا

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

۳ درس

حل فعالیت‌ها، تمرین‌ها
و تدریس‌ها



09213102271-09125102271-@moharrammahdi

صفحه ۸۷

کارد کلاس

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c > 0$ و $c \neq 1$ ، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a = \log_2 2$ و $b = \log_3 3$ ، حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

ب) $\log_{0.005} 0.005$

ب) $3 \log \sqrt[3]{4} - \log 250$

الف) $\log_{0.75} 0.75$

$$\log_c a = x \Rightarrow c^x = a$$

$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

1

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c \frac{c^x}{c^y} = \log_c c^{x-y} = (x-y) \log_c c = x-y$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a = \log 2$ و $b = \log 3$ ، حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

پ) $\log 0.005$

ب) $3 \log \sqrt[3]{4} - \log 250$

الف) $\log 0.75$

$$\text{الف) } \log 0.75 = \log \frac{75}{100} = \log \frac{3}{4}$$

$$= \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2$$

$$= \log 3 - 2 \log 2 = \boxed{b - 2a}$$

$$\text{ب) } 3 \log \sqrt[3]{4} - \log 250 = \log (\sqrt[3]{4})^3 - \log 250$$

$$= \log 4 - \log 250 = \log 4 - (\log \frac{1000}{4})$$

$$= \log 4 - (\log 1000 - \log 4) = 2 \log 4 - \log 1000$$

$$= 2 \log 2^2 - 3 = 4 \log 2 - 3 = \boxed{4a - 3}$$

$$\text{پ) } \log 0.005 = \log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 1000$$

$$= \log \left(\frac{10}{2}\right) - \log 1000 = \log 10 - \log 2 - \log 1000$$

$$= 1 - a - 3 = \boxed{-a - 2}$$

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log x + \log(x+3) = 1 \quad \text{ب)}$$

$$\log_7(x-1) + \log_7\left(\frac{x}{7} + 1\right) = 2 \quad \text{ب)}$$

$$\log_3(2x-1) = \log_3 x \quad \text{الف)}$$

$$\text{الف)} \quad \log_3(2x-1) = \log_3 x$$

$$2x-1 = x \rightarrow x = 1$$



$$\text{ب)} \quad \log_7(x-1) + \log_7\left(\frac{x}{7} + 1\right) = 2$$

$$\log_7(x-1)\left(\frac{x}{7} + 1\right) = 2$$

$$(x-1)\left(\frac{x}{7} + 1\right) = 7^2 = 49$$

 $x \cdot 7 \rightarrow$

$$(x-1)(x+7) = 49$$

$$x^2 + x - 7 - 49 = 0$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$(x+8)(x-7) = 0$$

$$x+8=0 \rightarrow x = -8$$

$$x-7=0 \rightarrow x = 7$$

قبول
غیر قابل قبول



$$\text{پ) } \log_{10} x + \log_{10} (x+3) = 1 \quad x(x+3) = 10^1$$

$$x(x+3) = 10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

تجزیه

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x+5=0 \rightarrow x = -5$$

$$x-2=0 \rightarrow x = 2$$

غ قابل قبول



صفحه ۹۰

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$

ب) $\log_7 (12b - 21) - \log_7 (b^2 - 3) = 2$

پ) $\log_{10} (x^2 - 1) = -1$

الف) $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$

$$2 \log_4 m - \log_4 m = 3$$

$$\log_4 m = 3 \Rightarrow m = 4^3 = 64$$

$$\text{ب) } \log_{\sqrt{2}}(12b-21) - \log_{\sqrt{2}}(b^2-3) = 2$$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{12b-21}{b^2-3}\right) = 2 \rightarrow \frac{12b-21}{b^2-3} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$$2b^2 - 12 = 12b - 21 \Rightarrow 2b^2 - 12b + 9 = 0$$

↓ ↓ ↓
a b c

$$\Delta = (-12)^2 - 4(2 \times 9) = 144 - 144 = 0$$

$$b = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{4} = \frac{3}{2}$$

جواب قابل قبول نیست زیرا حال * متغیری ندارد

$$\text{پ) } \log_{\frac{1}{10}}(x^2-1) = -1$$

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

$$x^2 - 1 = 10$$

$$x^2 = 11$$

$$x = \pm \sqrt{11}$$

هر دو جواب قابل قبول است

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ ، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$$\log 2 \approx 0.301$$

$$m(t) = 2^t \rightarrow m^{-1}(t) = \log_2 t \quad \text{الف)}$$

t جرم باکتری و $m^{-1}(t)$ زمان سپری شده بر حسب ساعت

$$\text{ب) } \log_2 5000 = \frac{\log_{10} 5000}{\log_{10} 2}$$

$$= \frac{\log_{10} (5 \times 1000)}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 5 + \log_{10} 1000}{\log_{10} 2} =$$

$$= \frac{(\log_{10} 5 - \log_{10} 2) + \log_{10} 1000}{\log_{10} 2} = \frac{(1 - 0.301) + 3}{0.301}$$

$$= \frac{3.699}{0.301} \approx 12.28$$

یعنی از ۱۲٫۲۸ ساعت

۳ درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را بررسی کنید :

$$(d \neq 1, a, b, c, d > 0) \log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \text{ (ب)}$$

$$(b \neq 1, a, b > 0) a^{\log_b a} = a \text{ (الف)}$$

(ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

$$\log x \log y = \log x + \log y \text{ (پ)}$$

$$\text{الف) } a^{\log_b a} = a \text{ نادرست}$$

$$\text{مثال نقض } a=100, b=10 \rightarrow 100^{\log_{10} 100} = 100^2 = 10000 \neq 100$$

$$\begin{array}{l} \text{ب) } \log_d a = x \rightarrow d^x = a \\ \log_d b = y \rightarrow d^y = b \\ \log_d c = z \rightarrow d^z = c \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{جانبی در} \\ \log_d abc \end{array}$$

$$\log_d d^x \times d^y \times d^z = \log_d d^{(x+y+z)} = (x+y+z) \log_d d$$

$$\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$$

$$\text{پ) } \text{مثال نقض نادرست } x=10, y=100$$

$$\begin{array}{l} \log x \log y = 1 \times 2 = 2 \\ \log x + \log y = 1 + 2 = 3 \end{array} \rightarrow 2 \neq 3$$

$$\text{ت) } \log_{10} \left(\frac{1}{10}\right) = \log_{10} 10^{-1} = -1$$

نادرست مثال نقض

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به 0.01 گرم کاهش می یابد؟

$$m(t) = 1 \times 2^{\frac{-t}{4}} \quad \text{الف)}$$

$$0.01 = 2^{\frac{-t}{4}} \quad \text{ب)}$$

$$\log 0.01 = \log 2^{\frac{-t}{4}}$$

$$-2 = \frac{-t}{4} \log 2$$

$$8 = t \log 2 \Rightarrow t = \frac{8}{\log 2}$$

$$t = \frac{8}{0.3} \approx 26.7$$

بنابراین طی ۲۷ روز جرم این عنصر به 0.01

کاهش می یابد

عبارات زیر را ساده کنید. $(\log 3 = 0.4771, \log 2 = 0.301)$

ب) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$

ب) $\log \sqrt{0.75}$

الف) $\log (18 \times 375)$

الف) $\log (18 \times 375) = \log (2 \times 3^2 \times 5^3 \times 3) =$

$= \log 2 \times 3^2 \times 5^3 = \log 2 + \log 3^2 + \log 5^3$

$= \log 2 + 2 \log 3 + 3(\log 10 - \log 2)$

$= 0.301 + 2(0.4771) + 3(1 - 0.301)$

$\longleftrightarrow 0.499$

ب) $\log \sqrt{0.75} = \log \left(\frac{0.75}{1.00} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2} (\log 3 - \log 4) = \frac{1}{2} (\log 3 - 2 \log 2)$

$= \frac{1}{2} (0.4771 - 2(0.301)) =$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \log_2 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}} &= \log_2 \frac{(2^3)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \log_2 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} \\ &= \log_2 2^{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)} = \log_2 2^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

۶ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

$$\log_a \frac{1}{2} = -4 \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{2} \rightarrow a^{-8} = 2^{-1}$$

$$(a^4)^{-1} = 2^{-1} \rightarrow a^4 = 2$$

$$a = \sqrt[4]{2}$$

۷ گزینه‌های درست را با \checkmark و گزینه‌های نادرست را با \times علامت بزنید.

$$\log 5 = \log 2 + \log 2 \quad \times$$

$$\log_a a \times \log_a b = \checkmark$$

اثبات: فرض کنید

$$\log_b a = x \rightarrow b^x = a$$

$$\log_b a \times \log_a b = x \times \log_{b^x} b = x \times \frac{1}{x} \log_b b$$

$$= x \times \frac{1}{x} = 1$$

۸ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$$m(t) = 128 \times 2^{\frac{-t}{30}}$$

$$m(300) = 128 \times 2^{\frac{-300}{30}} = 128 \times 2^{-10}$$

$$m(300) = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ میلی‌گرم}$$

پس روز و سه‌شنبه باشد

حرم مهر

09213102271-09125102271-@moharrammahdi

تهران

سی ام آذرماه سال 1399