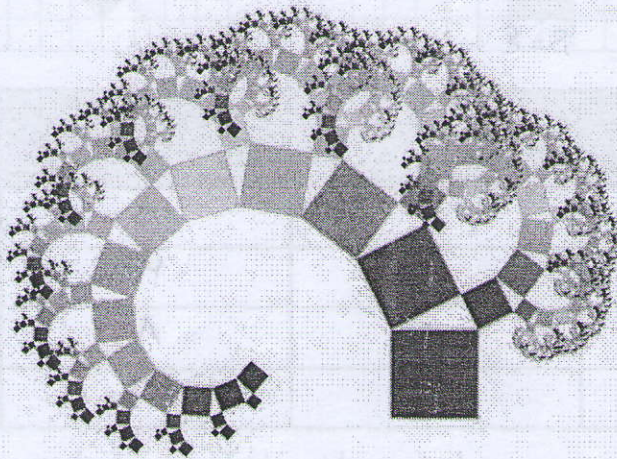
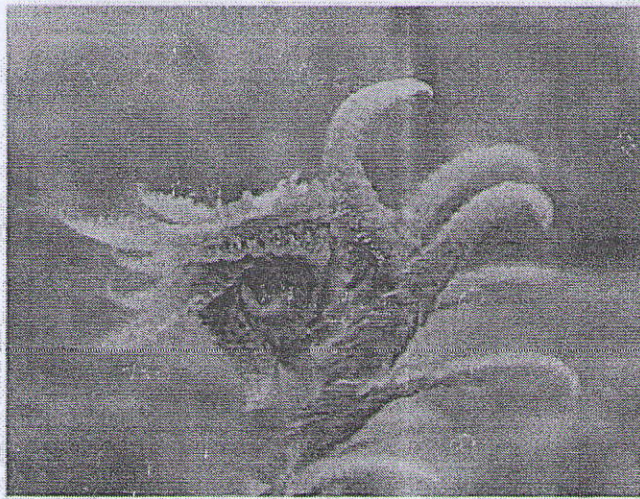


۶

فصل

مثلث

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنكبوت آیه ۲۰)

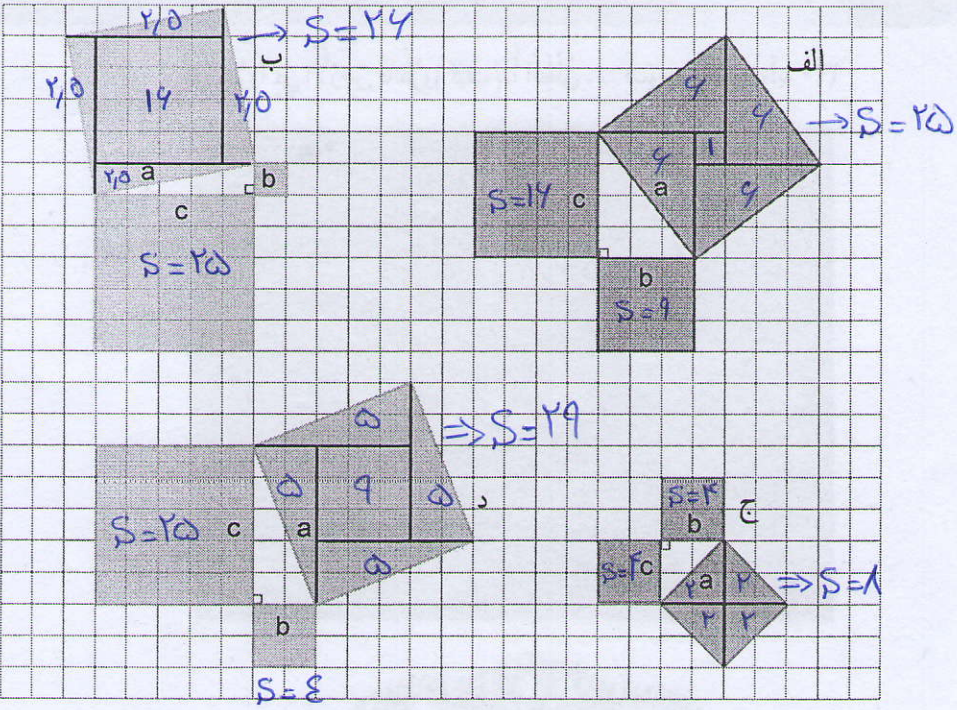


خداوند در جهان هستی نشانه‌هایی خلق کرده است و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.

رابطه فیثاغورس



۱- روی هر ضلع مثلث‌های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده‌ایم. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع‌های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



مساحت مربع ساخته شده روی ضلع a (وتر): a^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع b : b^2	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع c : c^2	
۲۵	۹	۱۶	الف
۲۵	۱	۱۶	ب
۴	۴	۲۵	ج
۲۵	۴	۱۶	د

بین عددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

$25 = 9 + 16$, $24 = 1 + 25$

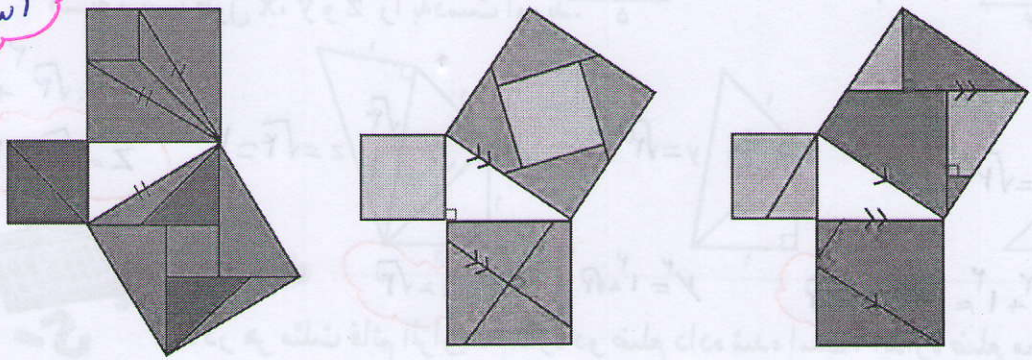
$8 = 4 + 4$, $29 = 4 + 25$

عددهای هر سطر برابر مجموع دو عدد دیگر همان سطر است

دست ورزی

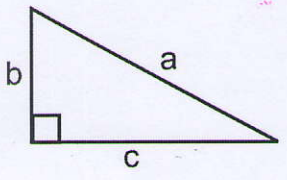
۲- به هر یک از شکل های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع های تشکیل شده روی ضلع های مثلث قائم الزاویه آمده است. شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید. سپس، با استفاده از یکی از این روش ها مربع های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.

اثبات سهوی



رابطه فیثاغورس

رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع های مثلث قائم الزاویه، به رابطه فیثاغورس معروف است. این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$


عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

●●●● خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی دان ایرانی، در حدود هزار سال پیش درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.

الف

ب

در شکل، چهار مثلث قائم الزاویه هم نهشت دیده می شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع های زاویه قائمه مثلث ساخته شده اند، و در سمت چپ مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

مساحت مربعی که در شکل الف داریم = مساحت مربعی که در شکل ب داریم

$$S = S_1 + S_3 + S_6 + S_7$$

$$S = S_2 + S_4 + S_5 + S_8$$

پس مجموع مساحت مربع های که روی دو ضلع زاویه قائمه حتم می شود با مساحت مربعی که روی وتر ساخته می شود برابر است

① → $S_1 = S_2$

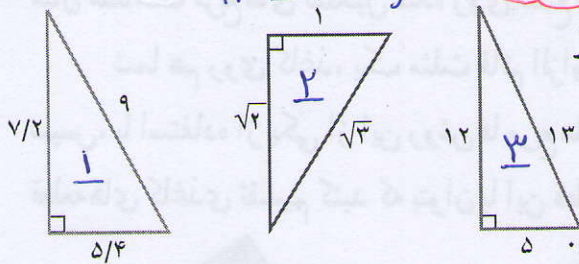
① → $S_3 = S_4$

$$\textcircled{1} \left. \begin{aligned} \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 &= \sqrt{1}^2 + \sqrt{4}^2 = 1 + 4 = 5 \\ 9^2 &= 81 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{1}^2 + \sqrt{4}^2 = 9^2$$

$$\textcircled{2} \left. \begin{aligned} 1^2 + \sqrt{2}^2 &= 1 + 2 = 3 \\ \sqrt{3}^2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$$

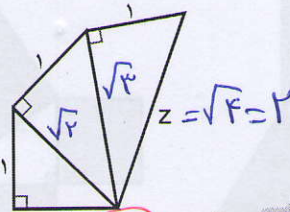
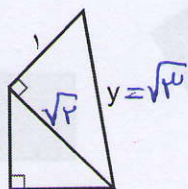
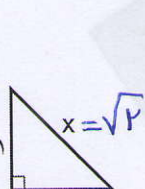
$$\textcircled{3} \left. \begin{aligned} 12^2 + 5^2 &= 144 + 25 = 169 \\ 13^2 &= 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 13^2$$

کاردر کلاس



۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر بررسی کنید.

۲- به ترتیب طول x , y و z را به دست آورید.



$$z^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 = 4$$

$$z = \sqrt{4} = 2$$

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

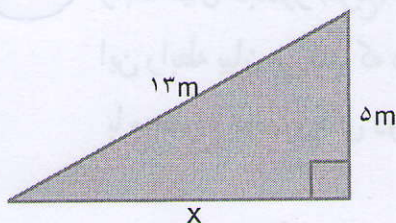
$$y^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

فعالیت



۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

مانند نمونه پیدا کنید.

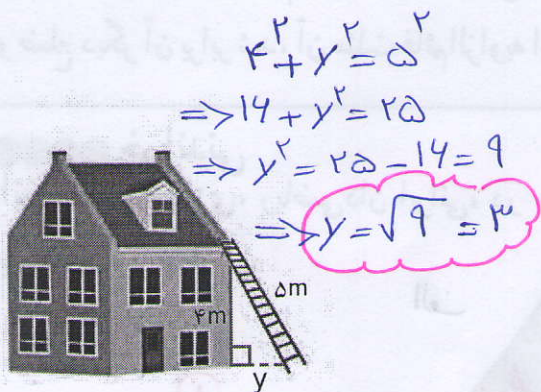


$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = 12$$

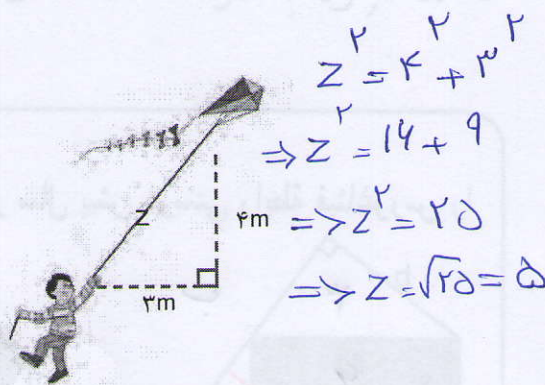


$$4^2 + y^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow 14 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - 14 = 9$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{9} = 3$$



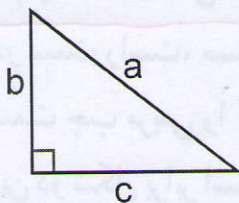
$$z^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 14 + 9$$

$$\Rightarrow z^2 = 25$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{25} = 5$$

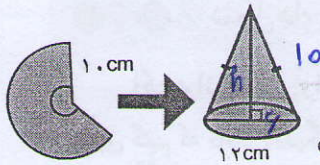
۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$



۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی

به قطر قاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

$$R = 12 \div 2 = 6$$

$$\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$$

۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره‌خطی به طول $\sqrt{10}$ سانتی متر رسم کنند.

در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های

آنها گفت‌وگو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟

کلای

روش هندسی (حلزون)

مهسا: روش حسابی	سایما: روش هندسی	زهرا:
<p>به کمک ماشین حساب $\sqrt{10}$ را حساب می‌کنم.</p> <p>$\sqrt{10} = 3.16$</p> <p>حالا به کمک خط‌کش یک پاره‌خط به طول تقریباً 3.1 سانتی متر رسم می‌کنم.</p>	<p>مثلی قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می‌کنم.</p> <p>$1^2 + 3^2 = 10$</p> <p>پس وتر آن $\sqrt{10}$ سانتی متر خواهد شد.</p>	<p>به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم‌الزاویه را ادامه می‌دهم تا $\sqrt{10}$ ساخته شود.</p>

روش مهسا ساده \Rightarrow

ولی به صورت تقریبی

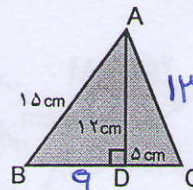
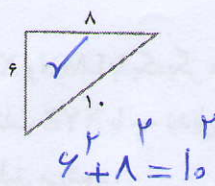
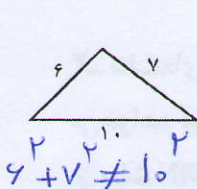
است و از رقم‌های بعد

از صدم صرف نظر شده است

روش ساده ولی طولانی و وقت‌گیر

تمرین: روش خلاقیت (سخت)

۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید. ۲- کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟

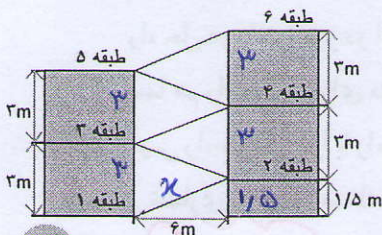


$$AC^2 = 12^2 + DC^2 = 149$$

$$\Rightarrow AC = 13$$

$$BD^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$$

$$BC = 42$$



۳- شکل رو به رو نمایی از یک پارکینگ طبقاتی را

نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه

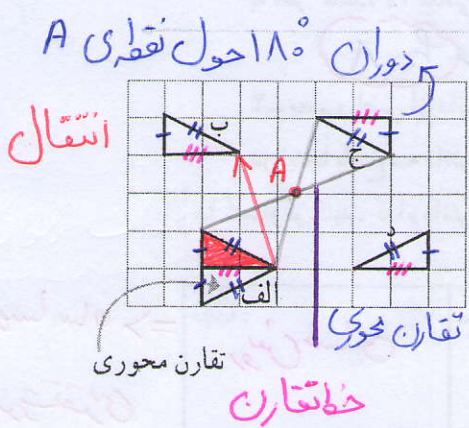
بعدی می‌رساند، چقدر است؟

$$x^2 = 15^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 225 + 16 \Rightarrow x = \sqrt{241} \approx 15.5$$

تعریف هم نهشتی

شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نهشت اند.



فعالیت (دست ورزی)

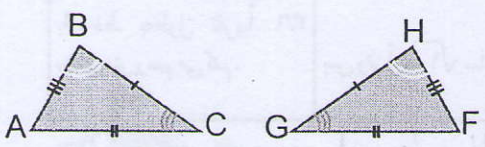
۱- در شکل روبه رو، مثلث های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده اند و با آن هم نهشت اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است. ضلع ها و زاویه های مساوی در این پنج مثلث را با علامت گذاری روی شکل نشان دهید.

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند:

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

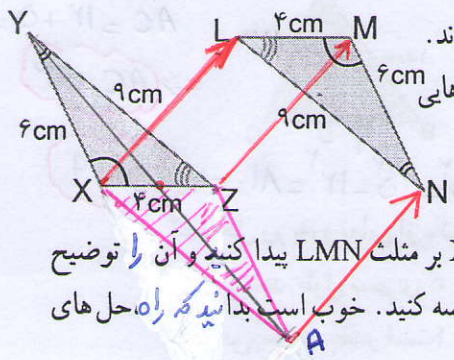
پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت های روی شکل ها، تساوی ضلع ها و زاویه های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{F} \quad \hat{B} = \hat{H} \quad \hat{C} = \hat{G}$$

$$\overline{BC} = \overline{GH} \quad \overline{AB} = \overline{HF} \quad \overline{AC} = \overline{FG}$$



۳- مثلث های XYZ و LMN با یکدیگر هم نهشت اند.

می خواهیم بینیم مثلث XYZ با چه تبدیل یا تبدیلی های بر مثلث LMN منطبق می شود.

راه حل دو دانش آموز در اینجا آمده است.

شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح دهید. سپس راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل های درست بی شماری برای این مسئله وجود دارد.

در دو مرحله

مرحله ۱ دوران حول وسط XZ \rightarrow انتقال با بردار \vec{AN}
 نکته: می توانیم دوران را حول هر ضلع دیگر انجام دهیم و سپس باید انتقال
 مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کنیم

راه حل محمد: ۱) مثلث XYZ را توسط بردار \vec{XM} انتقال در دهیم
 مثلث انتقال یافته را با یک دوران 18° حول M بر مثلث LMN منطبق کنیم

ترکیب دو تبدیل

دست ورزی

راه حل حامد:
 با یک دوران 18° حول نقطه X می توانیم مثلث XYZ را بر مثلث قرمز رنگ منطبق کنیم و سپس با یک انتقال، مثلث قرمز را بر مثلث LMN منطبق کنیم.

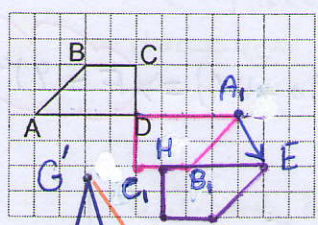
راه حل محمد:
 با یک دوران 18° حول نقطه O می توان مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کرد.

دوران حول نقطه O به اندازه 18°

دوران حول نقطه X

دوران حول نقطه O به اندازه 18°

کار در کلاس



۱- تصویر دوزنقه ABCD را پس از دوران 18° حول نقطه D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید.

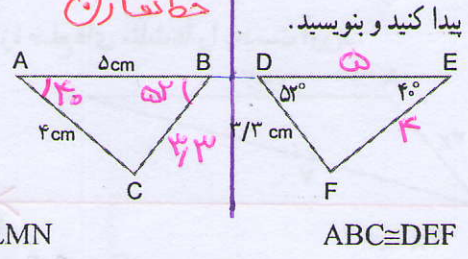
سپس آن را با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ انتقال دهید.

شکل جدید را نام گذاری کنید و عبارت هم نهشتی شکل ها را کامل کنید.

خط تقارن

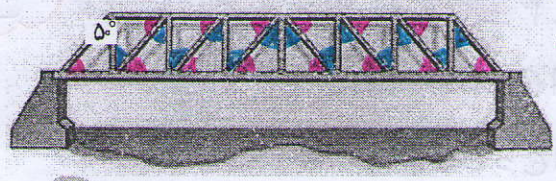
$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong EFGH$

۲- با توجه به هم نهشتی شکل های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع ها و زاویه های متناظر را پیدا کنید و بنویسید.



۱) تقارن نسبت به خط d
 ۲) انتقال با بردار $G'K'$

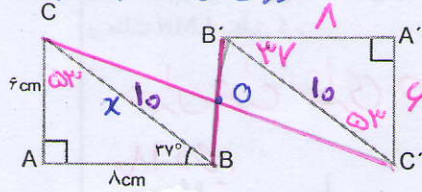
۳- دیواره های کنار پل از مثلث های قائم الزاویه هم نهشت ساخته شده اند.



زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص و اندازه هر یک از زاویه های یکی از مثلث ها را بنویسید.

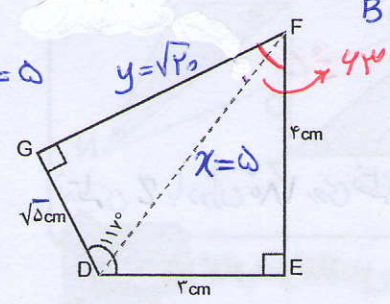
$\triangle = 40^\circ$
 $\triangle = 50^\circ$

دوران حول O به اندازه 180 درجه



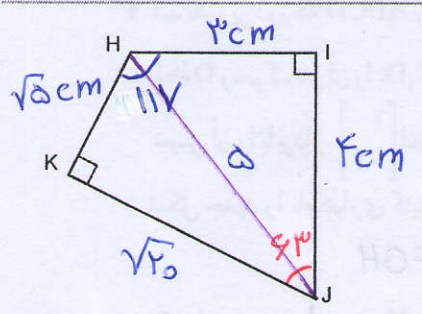
۱- در شکل مقابل $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

$x^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow x = 5$
 $y^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow y = 3$
 $\Rightarrow y = \sqrt{5}$



۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها و زاویه‌ها معلوم است. اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی را به دست آورید.

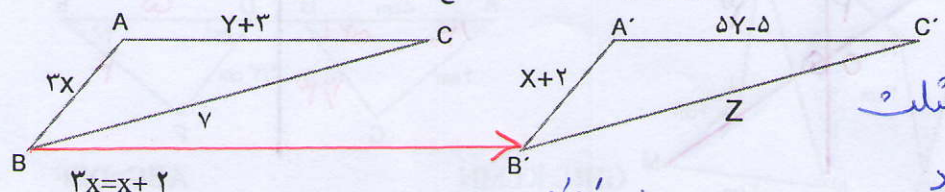
$\hat{F} = 340 - (90 + 90 + 117) \Rightarrow \hat{F} = 43$



در باره رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.

کلای

۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد. مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



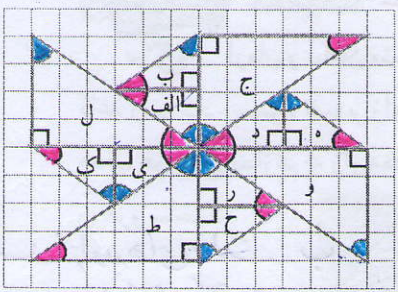
مثلث ABC یا انتقال BB' بر روی مثلث A'B'C' منطبق می‌شود

$2x = x + 2$
 $2x - x = 2$
 $x = 2$
 $x = 1$
 $AB = 2x = 2$
 $A'B' = x + 2 = 3$

$AC = A'C' \Rightarrow y + 3 = 5y - 5 \Rightarrow 1 = 4y \Rightarrow y = 1/4$
 $AC = 5, A'C' = 5$
 $BC = B'C' \Rightarrow z = y$

د تقارن محوری دوران 180° الف ه \rightarrow انتقال 180° الف ه \rightarrow تقارن محوری انتقال ح \rightarrow تقارن محوری انتقال ی \rightarrow ک

الف انتقال تقارن محوری ی \rightarrow دوران ج \rightarrow تقارن نسبت به ضلع کوچک زاویه قائمه و \rightarrow دوران ل \rightarrow و سپس انتقال

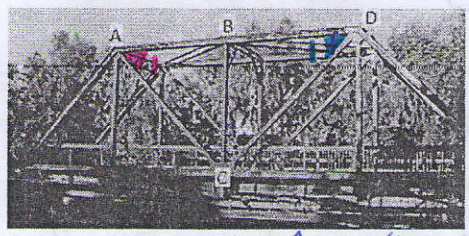


تمرین
۱- در شکل رو به رو زاویه های مساوی را با رنگ های یکسان مشخص کرده ایم. کدام مثلث ها با مثلث الف هم نهشت اند؟ مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می توان مثلث الف را بر مثلث های هم نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ هایتان را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

جواب: مثلث های ب، ی، ک، ز، ح، ه و د با الف هم نهشت هستند

دوران 180° (الف) \leftarrow (ه) تقارن محوری انتقال (ب) \leftarrow (د)

۲- سازه های مثلثی که در این پل به کار رفته اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می شوند.



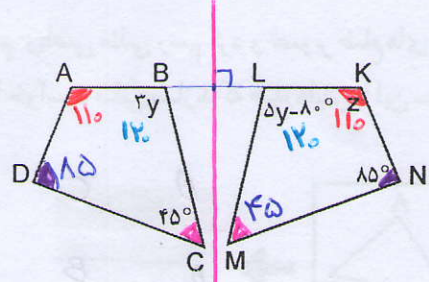
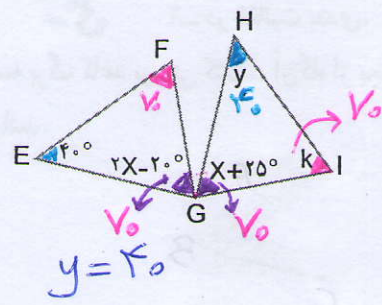
می دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$
الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع BC است؟ \hat{A}_1
ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع BC است؟ \hat{D}_1

ایهام دارد
در مثلث های هم نهشت
زاویه های روبه روی به اضلاع مساوی، با هم مساوی اند

ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه \hat{A}_1 متناظر است؟ \hat{D}_1
۳- زاویه های مجهول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° درجه EFG حول نقطه G است.

ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



$y = 40$
 $2x - 20 = x + 25$

$x = 45$

$\hat{F} = \hat{I} \Rightarrow k = 110 - (45 + 40)$

$\Rightarrow k = 70$

$3y = 5y - 10$

$\Rightarrow 10 = 2y \Rightarrow 40 = y$

$\hat{B} = \hat{L} = 120$

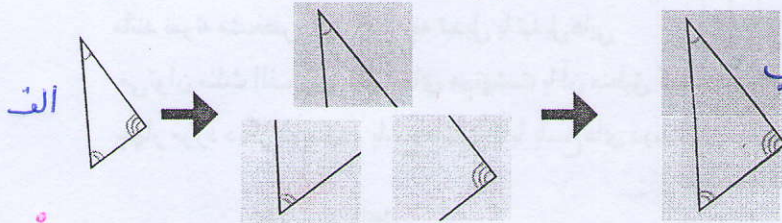
$z = 340 - (120 + 120 + 45) = 110$

مثلث های هم نهشت

نتیجه: با مساوی بودن سه زاویه یعنی توان هم نهشتی دو مثلث را نتیجه گرفت

آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب

رو به رو ساختند.



زاویه های مثلث ب با زاویه های مثلث الف برابر است و هر اضلاع آن بزرگتر از اضلاع مثلث الف است

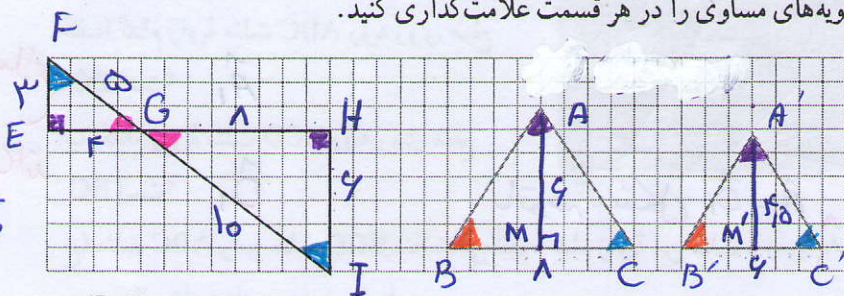
خبر (مکرر و تکرار)

فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟

آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟ با این روش، خبری نتوانند

کار در کلاس سه زاویه مساوی است اما اضلاع برابر نیست

۱- زاویه های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.



$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{EG}{GH} = \frac{FG}{IG}$$

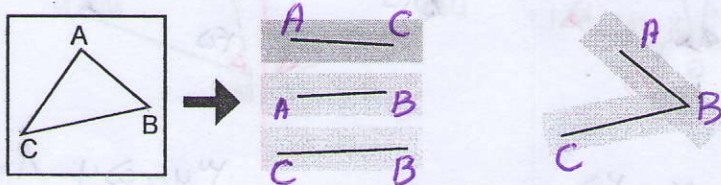
۲- شکل های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه ها را بنویسید.

$$\frac{4}{4} = \frac{4}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AM}{A'M'}$$

۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع های آن را روی

سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه ها خواست مثلثی بسازند که ضلع هایش با این سه ضلع برابر باشد.



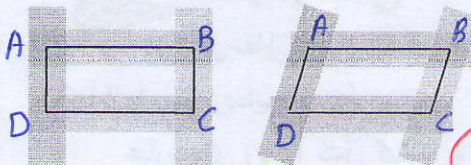
نتیجه: اگر اضلاع دو مثلث تطبیق پذیر مساوی باشند آن گاه می توان نتیجه گرفت آن دو مثلث هم نهشت می باشند

مرحله اول
 سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت :
 مرحله دوم

آرمان مطمئن بود مثلی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید: «فکر می کنی اگر ضلع های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل حتماً با یکدیگر هم نهشت اند؟»
 آرمان گفت: «نه، من می گویم اگر ضلع های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشت اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع هایشان مساوی است، با یکدیگر هم نهشت نیستند.»

سپس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.

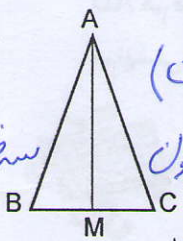


کارد در کلاس
 تعریف میان

۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. پاره خطی مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند میانه می نامیم.

عبارت های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

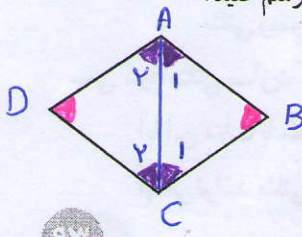
$AB = AC$ چون ساق های مثلث متساوی الساقین ABC هستند.
 $BM = CM$ چون AM میانه می باشد (M وسط BC است)



سه ضلع مثلث با هم برابرند

$\triangle ABM \cong \triangle ACM$ چون AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.



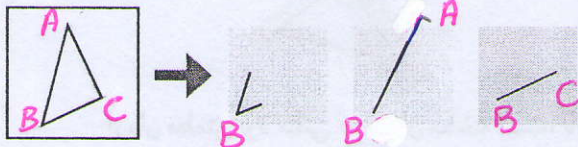
۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.
 ب) دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.
 ج) زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

ب) چون چهارضلعی ABCD لوزی است

پس ضلع های دو مثلث با هم برابر می باشند

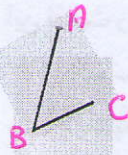
ج) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$, $\hat{B} = \hat{D}$

اصلاح شود (اندازه AB اشتباه است)



مثلی رسم کنید.
سپس دو ضلع آن و زاویه
بین آن دو ضلع را روی سه برگ
کاغذ پوستی بکشید.

مرحله اول



اکنون سعی کنید مثلی بسازید که دو ضلع آن با این
دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم
برابر زاویه رسم شده باشد.

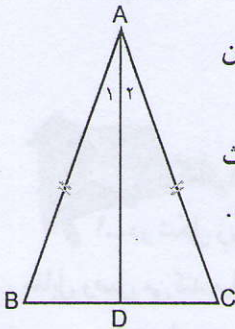
کلای توضیح داده شود
بله

مرحله دوم



آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟
آیا با این شرایط می توانید مثلی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

کار در کلاس



در شکل مقابل نیمساز زاویه روبرو به قاعده مثلث متساوی الساقین
ABC را رسم کرده ایم.

عبارت های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث
ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ مثلث ABC متساوی الساقین است

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ چون AD نیمساز است.

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. چون دو ضلع و زاویه بین آن دو از این دو مثلث

برابرند پس $ABD \cong ACD$

مثلی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.
سعی کنید مثلی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

بله
آیا می توانید مثلی بسازید با همین شرایط که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 &= 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$ طبق فرض

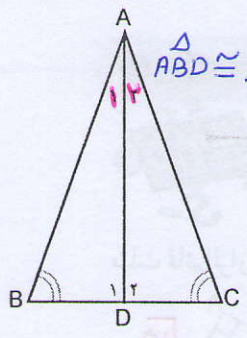
چون AD نیم‌ساز است

کار در کلاس: چون $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{C}$

و مجموع سزاوی‌بی \hat{C} ، \hat{A}_2 و \hat{D}_2 برابر 180° است و مجموع سزاوی‌بی \hat{B} ، \hat{A}_1 و \hat{D}_1 هم برابر 180° است پس $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

(۲) ضلع AD بین هر دو مثلث مشترک است

(۳) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیم‌ساز است



$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

طبق دوازوی‌بی و ضلع بین دایم

کار در کلاس

در شکل مقابل زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند.

دلایل کلایی بیان نشود

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن \hat{D}_1 و \hat{D}_2 دلیل بیاورید.)

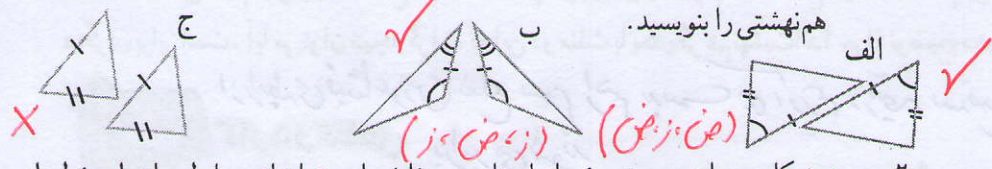
نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است.

سه حالت هم‌نهشتی دو مثلث:

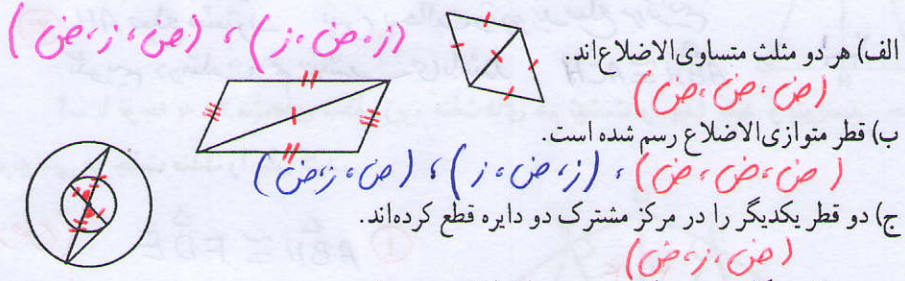
- برابری سه ضلع
 - برابری دو ضلع و زاویه بین
 - برابری دو زاویه و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ض)



۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی را بنویسید.

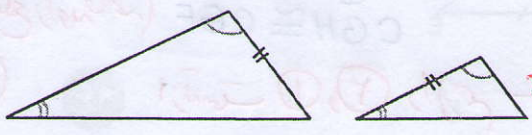


۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.



۳- شکل روبه‌رو کدام نسبت را نمایش می‌دهد؟

اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیر بین از مثلثی دیگر برابر باشند، (الف) دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.



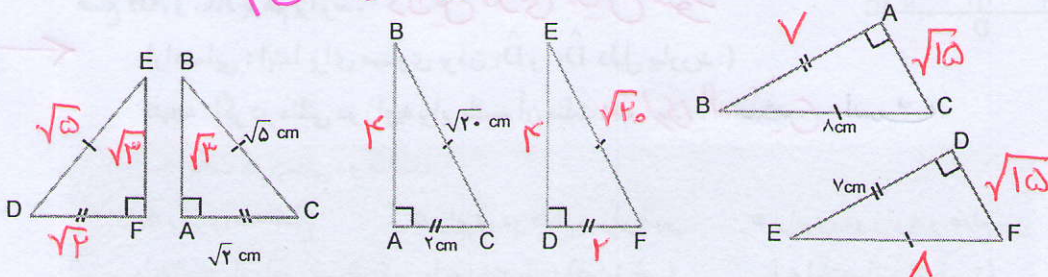
(ب) ممکن است دو مثلث هم‌نهشت نباشند.

هم نهستی مثلث های قائم الزاویه

فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است. (ض، ض، ض)



اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟ **بلیه**
 آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟ **بلیه (ض، ض، ض) یا (ض، ز، ض)**

۲- می دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه

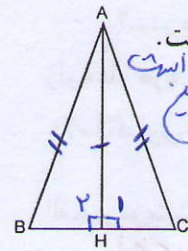
دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بلیه**

از رابطه فیثاغورس ضلع سوم را هم بدست می آوریم در نتیجه سه ضلع دو مثلث با هم

کارد در کلاس برابر می شوند



۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.



چرا مثلث های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت اند؟

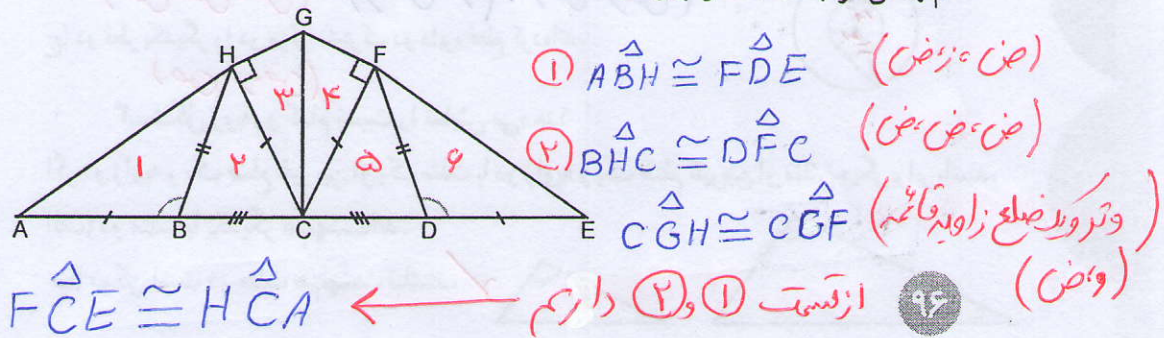
① $H_1 = H_2 = 90^\circ$ (ض، ض، ض) چون $AB = AC$ مثلث متساوی الساقین است

② $AB = AC$ (ض، ض، ض) پس به حالت وتر و یک ضلع می توانیم

بگوییم دو مثلث هم نهشت می باشند $\triangle ABH \cong \triangle ACH$

۲- با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

هم نهستی هر جفت مثلث را بیان کنید.

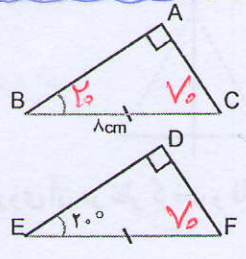
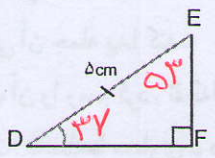
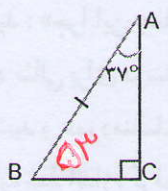
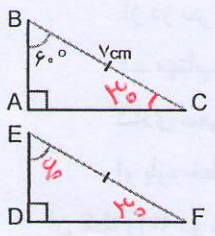


حالت (ض، ض، ض)، (ض، ز، ض)، (ز، ز، ض)، (وز) و (وض)



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.

(از من ز)



زاویه دیگر هر یک از مثلث‌ها را پیدا کنید.

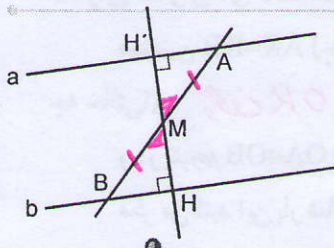
آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟ *بله*، به حالت دو زاویه و ضلع بین آن دو

۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری

برابر است. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید. *بله*، در این حالت می‌توانیم ثابت کنیم زاویه سوم نیز مساوی است پس به حالت دو حالت دیگر برای هم‌نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: *(از من ز) دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند*

- برابری وتر و یک ضلع
- برابری وتر و یک زاویه تند
- یا به اختصار (وض)
- یا به اختصار (وز)

کارد در کلاس



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی

a و b عمود رسم کرده‌ایم. *کلاهی*

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم‌نهشت‌اند؟

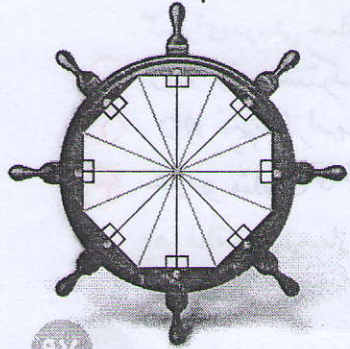
وتر و یک زاویه تند (وز)

۲- در شکل روبه‌رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم

مساوی و هشت پاره خط‌آبی نیز با هم مساوی‌اند. *کلاهی*

شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟

وتر و یک زاویه تند (وز)

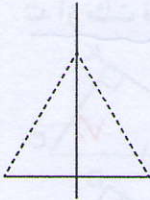


نیاز به دلیل آوردن

فعالیت



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند :



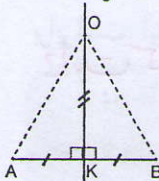
«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید : «چرا این جمله درست است؟»
شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری : فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟
۲- مهتاب گفت : «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



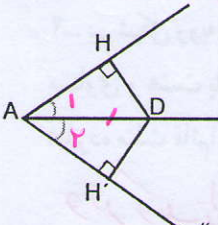
شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.
او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت : «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟)»

همچنین $AK=KB$ (چرا؟) OK هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (در چه حالتی؟)

و در نتیجه $OA=OB$ (چرا؟) «چون دو مثلث هم نهشت هستند»

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟



- ۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید :
- ① وتر مشترک هر دو مثلث است
 - ② $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ پس داریم
 - ③ هر دو مثلث قائم الزامی باشند

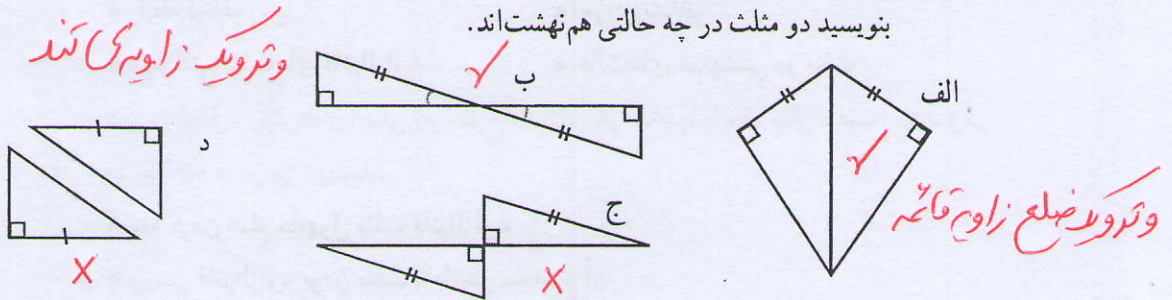
«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

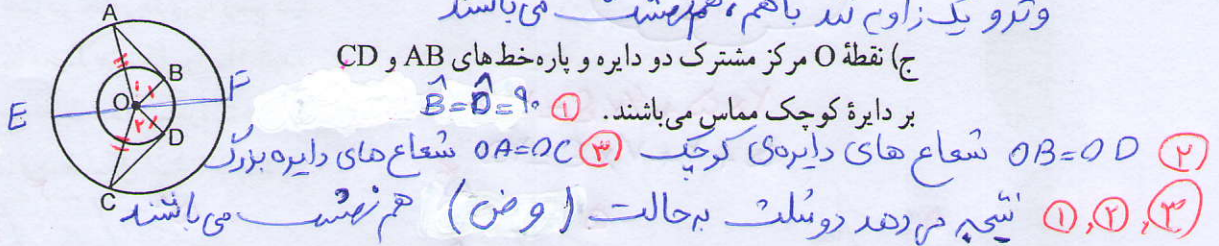
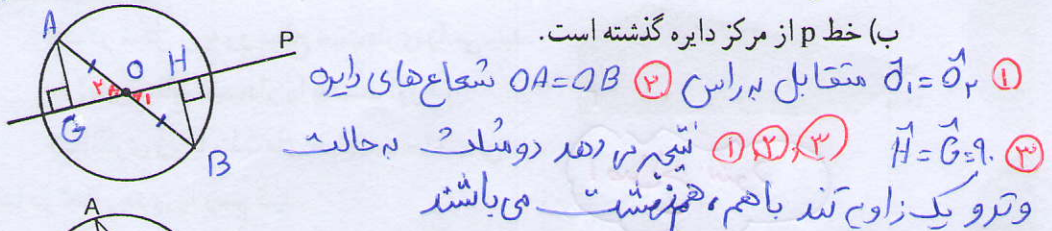
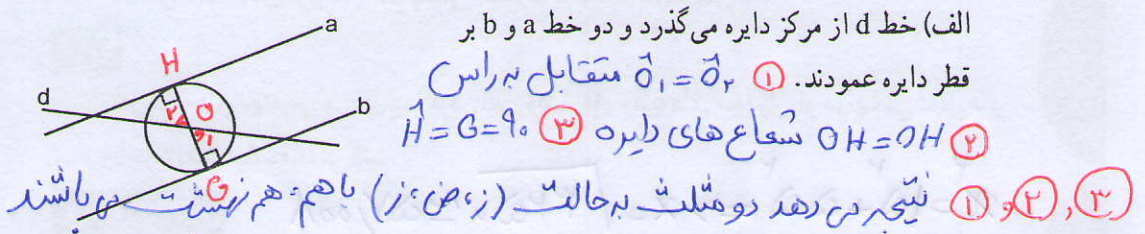
نتیجه می گیریم به حالت وتر و دو زاویه تند دو مثلث هم نهشت می باشند ①, ②, ③



۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم‌نهشت‌اند.



۲- در هر شکل، از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.



۳- در هر یک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث

دیگر منطبق کرد.

الف ← دوران 180° نسبت به نقطه O

ب ← دوران 180° نسبت به نقطه O

ج ← تقارن نسبت به قطر EF

n زوج باشد \Rightarrow محیط $= 2 \times 5 + 4n = 4n + 10$

n فرد باشد \Rightarrow محیط $= 5 + 2 + 4n = 4n + 7$

مرور فصل ۶

مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

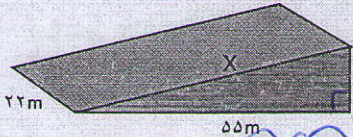
- رابطه فیثاغورس
- اجزای متناظر
- هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه
- حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث
- در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه
- بررسی قائم‌الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن
- نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم‌نهشت
- هم‌نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین
- هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع
- حل مسئله‌های مربوط به هم‌نهشتی مثلث‌ها به کمک حالت‌های بالا

کاربرد

در نقشه‌های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های مجهول، از هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می‌کنیم.

$x^2 = 15^2 + 22^2 \Rightarrow x = \sqrt{325} \approx 57,001$



- در شکل روبه‌رو سطح شیب‌داری را می‌بینید. طول این سطح شیب‌دار را به دست آورید.
- الگوی زیر با مثلث‌های هم‌نهشت ساخته می‌شود.

اصلاح شود

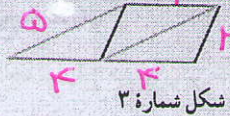
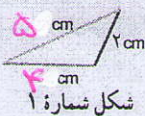
م

الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

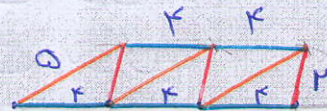
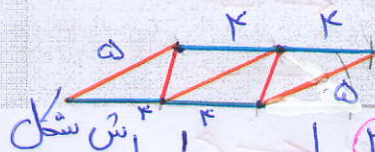
ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می‌شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر؟



باک ↑



شکل	۱	۲	۳	۴	۵
زوج		زوج		زوج	
محیط	$5 + 4 + 2 = 11$	$2 \times 5 + 2 \times 4 = 18$	$5 + 3 \times 4 + 2 = 19$	$2 \times 5 + 4 \times 4 = 24$	$5 + 2 + 5 \times 4 = 27$