

تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد در آن موقع، حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت،



به یک ساعت معین فقط یک دما را می توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

یک کالای معین نمی تواند دو قیمت متفاوت داشته باشد

یک درس معین نمی تواند دو نمره متفاوت داشته باشد

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

یک کلاس معین نمی تواند دو جمعیت متفاوت داشته باشد

| | | | | | |
|------|----|----|----|----|----|
| ساعت | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
| دما | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۷ | ۱۸ |

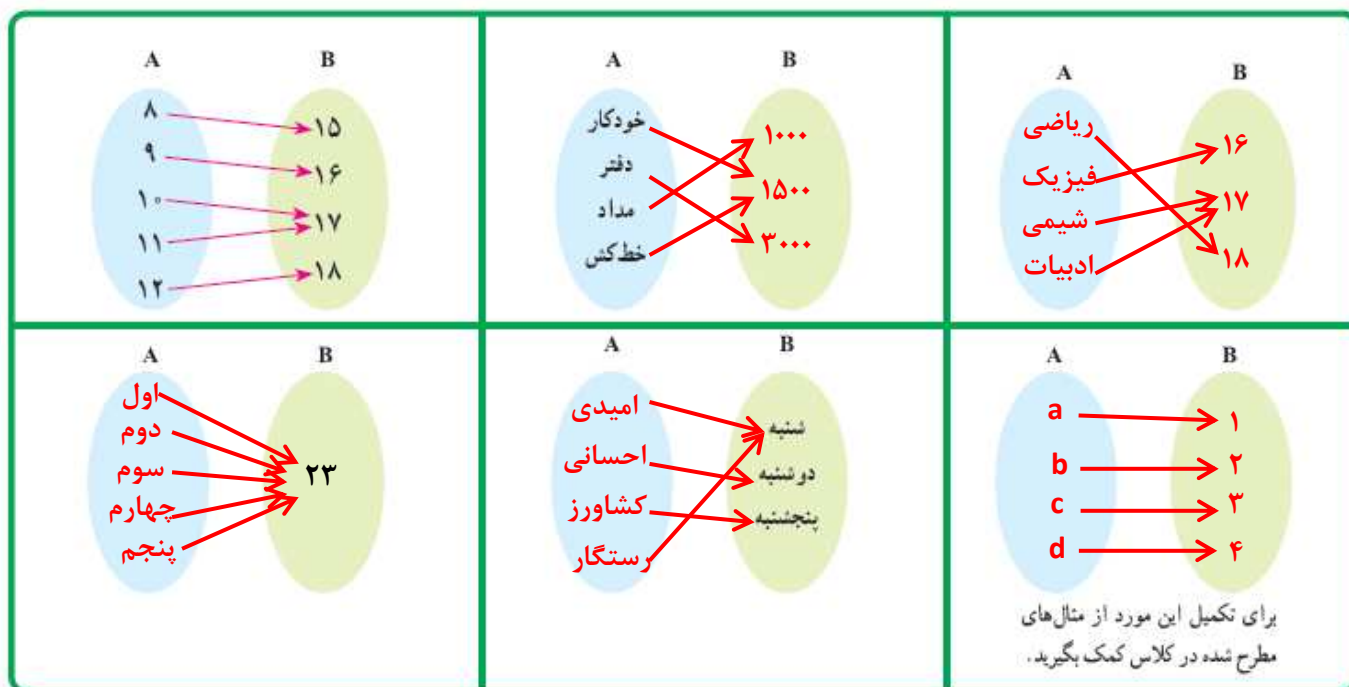
| | | | | |
|--------------|--------|------|------|-------|
| کالا | خودکار | دفتر | مداد | خط کش |
| قیمت (تومان) | ۱۵۰۰ | ۳۰۰۰ | ۱۰۰۰ | ۱۵۰۰ |

| | | | | |
|------|-------|-------|------|--------|
| درس | ریاضی | فیزیک | شیمی | ادبیات |
| نمره | ۱۸ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ |

| | | | | |
|----------|-------|--------|--------|---------|
| فرد | امیدی | احسانی | کشاورز | رستگار |
| روز تولد | شنبه | دوشنبه | شنبه | پنجشنبه |

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-------|------|
| کلاس | اول | دوم | سوم | چهارم | پنجم |
| جمعیت | ۲۳ | ۲۳ | ۲۳ | ۲۳ | ۲۳ |

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گوئیم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



برای تکمیل این مورد از مثال های مطرح شده در کلاس کمک بگیرید.

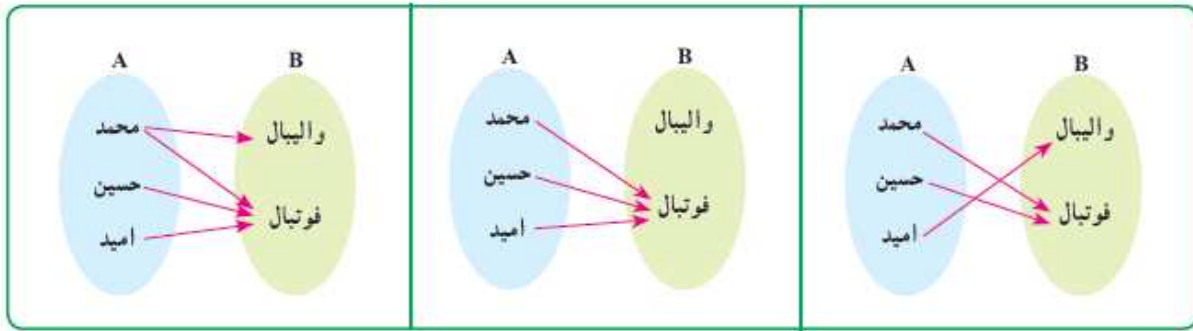
توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

در فعالیت ۱، همه مثال‌های ارائه شده تابع‌هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده‌اند.

کار در کلاس

۱ مجموعه A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



تابع نیست

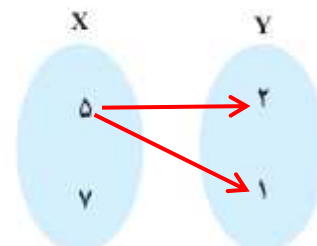
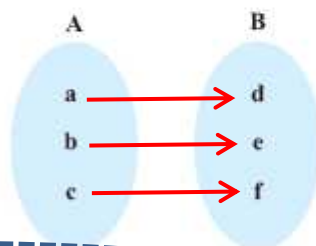
تابع است

تابع است

۹۶

درس اول: مفهوم تابع و بازتابی‌های آن

۲ از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

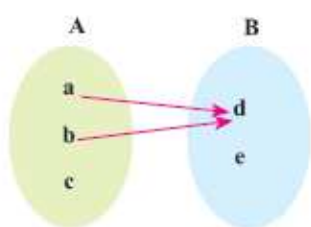


بله؛ یک فرد معین نمی‌تواند دو وزن متفاوت داشته باشد.

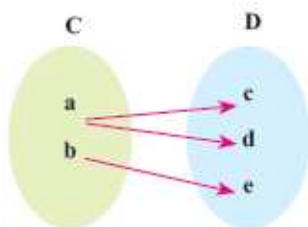
بله، یک فرد معین نمی‌تواند دو سن متفاوت داشته باشد.

۳ الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چگونه؟
ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.

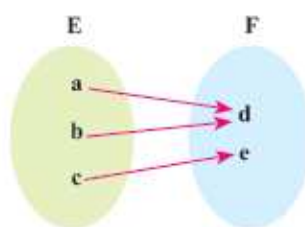
خیر، یک فرد معین می‌تواند همزمان به دو غذای متفاوت علاقه داشته باشد.



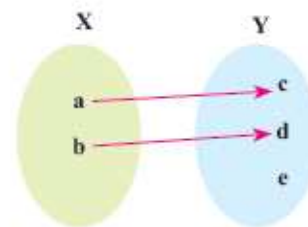
تابع نیست



تابع نیست



تابع است



تابع است

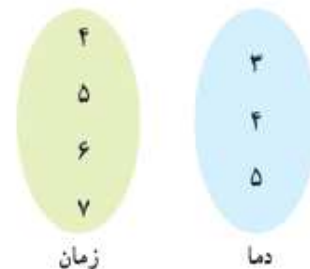
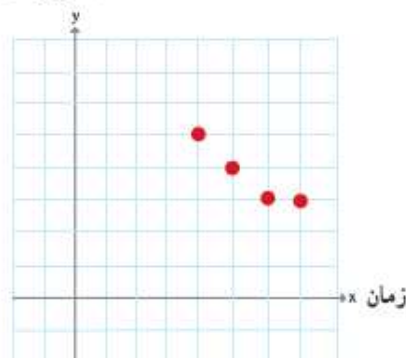
فعالیت

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد. رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار ییکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



دما (سانتی‌گراد)



| | | | | |
|------|---|---|---|---|
| ساعت | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ |
| دما | ۵ | ۴ | ۳ | ۳ |

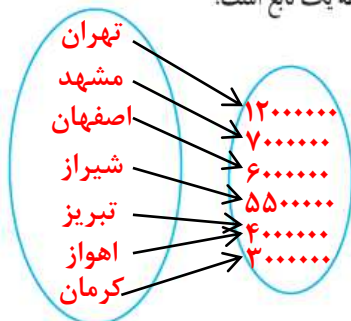
اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

$(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)$

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

| | | | | | | | |
|-------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| شهر | تهران | مشهد | اصفهان | شیراز | تبریز | اهواز | کرمان |
| جمعیت | ۱۲۰۰۰۰۰ | ۷۰۰۰۰۰ | ۶۰۰۰۰۰ | ۵۵۰۰۰۰ | ۴۰۰۰۰۰ | ۴۰۰۰۰۰ | ۳۰۰۰۰۰ |

رابطه بالا را به صورت ییکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟



| توصیف رابطه | مجموعه زوج‌های مرتب | نمودار بیکانی | جدول یا نمودار |
|---|--|---------------|----------------|
| به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم علیه‌های آن را نسبت می‌دهد. | $\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$ | تابع نیست | |
| به اعداد ۲ و ۳ و ۴، مجذورشان را نسبت می‌دهد | $\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$ | تابع است | |
| به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد. | $\{(4,2), (4,-2), (7,\sqrt{7}), (7,-\sqrt{7})\}$ | تابع نیست | |
| به اعداد -۱ و ۱ و ۱۰، دو برابر شان را نسبت می‌دهد | $\{(-1,-2), (0,0), (1,2)\}$ | تابع است | |
| به اعداد -۱ و ۱ و ۱۰، مکعبشان را نسبت می‌دهد | $\{(-1,-1), (0,0), (1,1)\}$ | تابع است | |

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$$

$$f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$$

رابطه ی f یک تابع است زیرا هیچ یک از مولفه های اول آن تکرار نشده است.

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مولفه اول یکسان نباشند

۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

(الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد. تابع است، زیرا به ازای هر طول ضلع فقط یک محیط وجود دارد.

(ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد. تابع است، زیرا به ازای هر فرد در یک زمان فقط یک دما وجود دارد.

(ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد. تابع است، زیرا به هر فرد فقط یک گروه خونی را می‌توان نسبت داد.

(د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد. تابع نیست، زیرا یک دانش‌آموز می‌تواند بیش از یک دوست داشته باشد.

(ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد. تابع نیست، زیرا عدد مثبت بیشتر از یک ریشه دوم دارد.

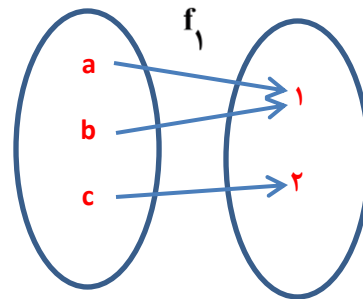
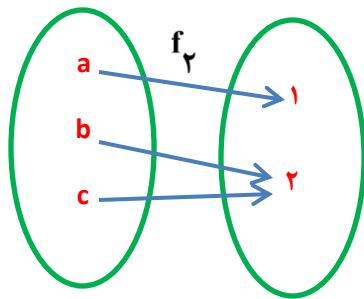
(و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد. تابع است، زیرا هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

۲ مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده‌اند.

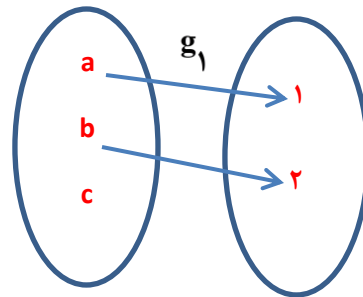
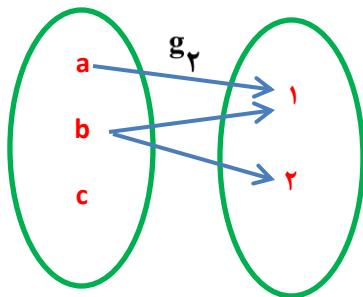
(الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

(ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

(ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

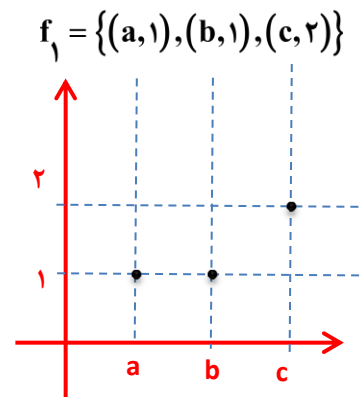
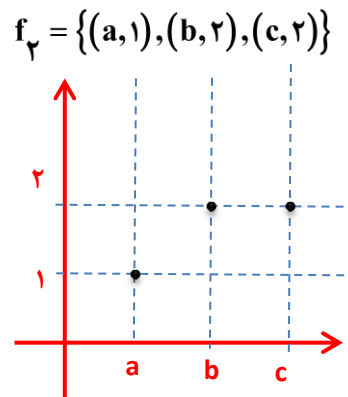
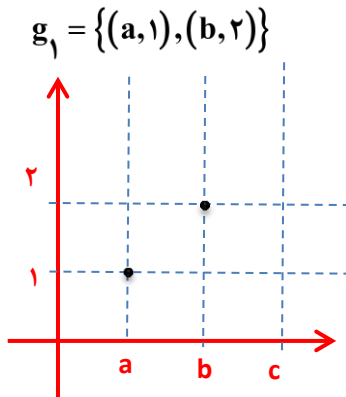
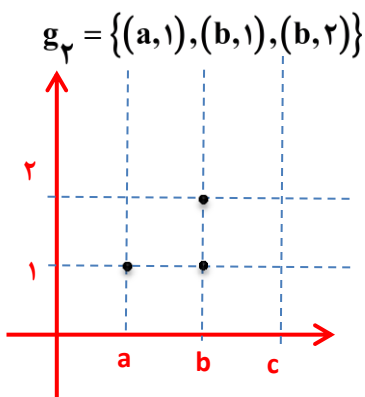


پاسخ الف:



پاسخ ب:

پاسخ ج:



۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\} \quad \text{تابع نیست}$$

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\} \quad \text{تابع است}$$

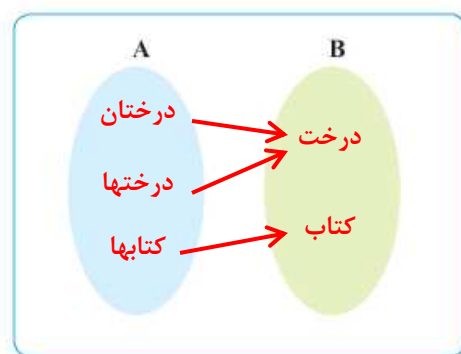
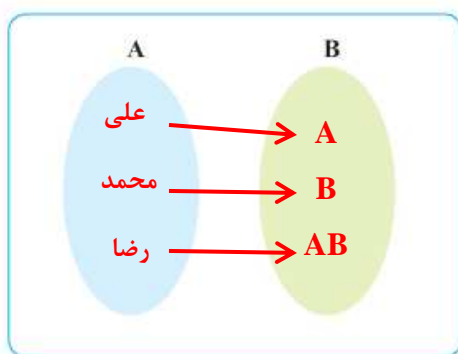
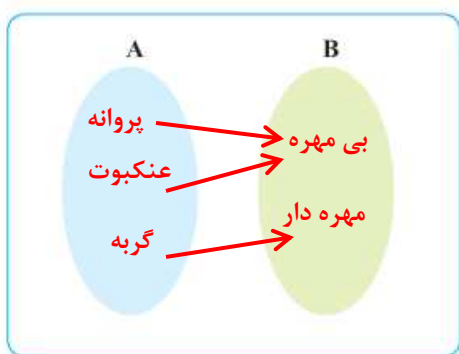
$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\} \quad \text{تابع است}$$

$$k = \{(2, 5)\} \quad \text{تابع است}$$

$$r = \{(2, 0), (-7, 0)\} \quad \text{تابع است}$$

$$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\} \quad \text{تابع است}$$

۴ A و B مجموعه‌هایی غیر عددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



درس دوم: دامنه و برد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

| چندضلعی | مثث | مربع | لوزی | پنج ضلعی |
|---------------------------|------|------|------|----------|
| مجموع زوایای داخلی (درجه) | ۱۸۰° | ۳۶۰° | ۳۶۰° | ۵۴۰° |

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{(مثث, 180), (مربع, 360), (لوزی, 360), (پنج ضلعی, 540)\}$$

چرا f یک تابع است؟

زیرا هیچ دو زوج مرتب متمایز در آن مولفه‌های اول یکسان ندارند

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

| | | | | | | |
|---------|---------------|---|---------------|---|----|----|
| طول ضلع | $\frac{1}{2}$ | ۱ | $\frac{3}{2}$ | ۲ | ۴ | ۵ |
| محیط | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۱۲ | ۲۰ |

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$$f = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 2 \right), (1, 4), \left(\frac{3}{2}, 6 \right), (2, 8), (4, 12), (5, 20) \right\}$$

زیرا هیچ دو زوج مرتب متمایز در آن مولفه‌های اول یکسان ندارند

$$D_f = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4, 5 \right\}, D_g = \{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد. $f = \{(1, 2), (-1, 2), (4, 1)\}$

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر

است؟ مثال بزنید. خیر، مثال

$$A = \{1, 2\}, B = \{-1, -2, -3\}; f = \{(1, -3), (2, -1)\}$$

شعاعیت

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



جدول را کامل کنید.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|----|-----|-----|-----|------|-----|
| شماره شکل | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ... | ۱۰۰ | ... | n | ... |
| تعداد دایره‌ها | ۱ | ۳ | ۵ | ۷ | ۹ | ۱۱ | ... | ۱۹۹ | ... | ۲n-1 | ... |

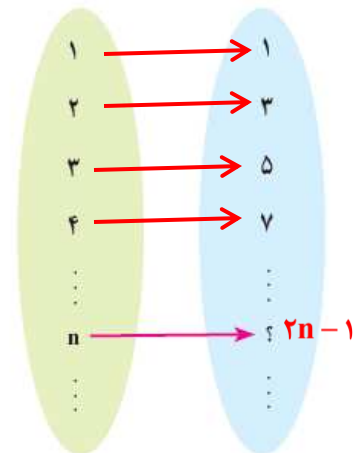
چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع:

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \dots, (100, \quad), \dots, (n, \quad), \dots\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

$$D_f = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}, R_f = \{1, 3, 5, \dots\} = \mathbb{O}$$



اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1+1=2 \\ f(2) &= 4+1=5 \\ f(3) &= 9+1=10 \\ f(4) &= 16+1=17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \{2, 5, 10, 17\}$$

صفحه ۱۰۳

@Faragiri10
ghadam.com

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| x | ۱ | ۲ | ۳ | -۱ | ۰ | -۲ | -۳ | -۴ |
| y | ۱ | ۳ | ۵ | -۳ | -۱ | -۵ | -۷ | -۹ |

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

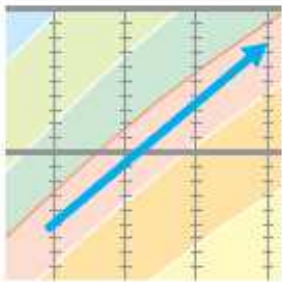
نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.

$$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{7}{5} \quad g(0) = -1 \quad g\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{3}{7} \quad g(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 1 \quad g(1^{\circ}) = 1^{\circ} - 1 = 0$$

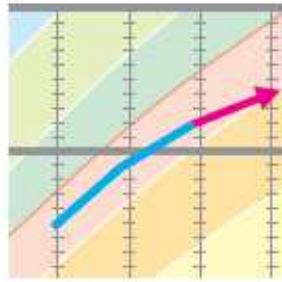
نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = 2x - 1$ در اینجا x یک عدد حقیقی است.

شباهت: مختصات نقاط هر دو جدول در یک راستا است.

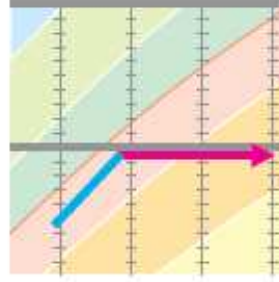
تفاوت: مولفه های اول جدول فعالیت قبل مجموعه اعداد طبیعی است ولی در این فعالیت مولفه های اول اعداد حقیقی اند



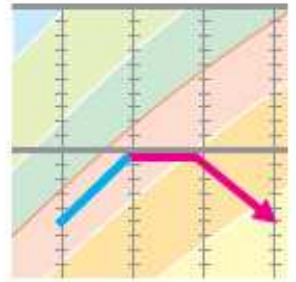
الف) رشد مطلوب



ب) کندی رشد

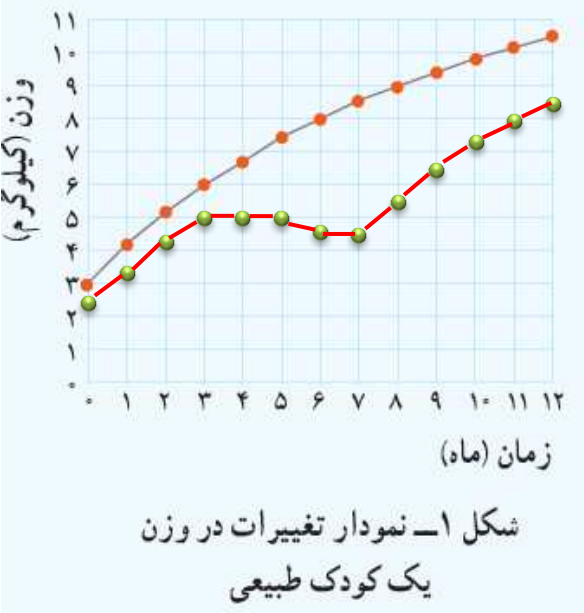


پ) توقف رشد



ت) افت رشد

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|---|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| زمان (ماه) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
| وزن (کیلوگرم) | ۲/۸ | ۳/۳ | ۴/۲ | ۵ | ۵ | ۵ | ۴/۸ | ۴/۵ | ۵/۵ | ۶/۵ | ۷/۲ | ۸ | ۸/۵ |



الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ **الف**

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ **۳ تا ۵ ماهگی**

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله بین ماهها اندازه گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده اید، می توانید وزن او را در فاصله بین ماهها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

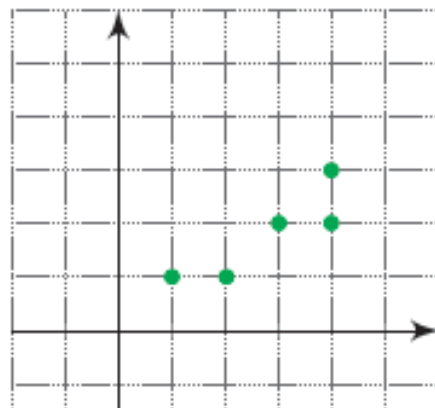
ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad R = \{2/8, 3/3, 4/2, 5, 4/8, 4/5, 5/5, 6/5, 7/2, 8, 8/5\}$$

کار در کلاس

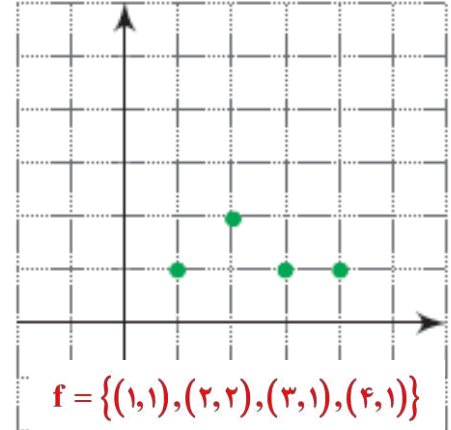
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می دهند؟ توضیح دهید.

تابع نیست. زیرا دو نقطه از نقاط آن طول های مساوی دارند



$$f = \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,2), (4,3)\}$$

تابع است. زیرا هیچکدام از نقاط آن طول های مساوی ندارند



$$f = \{(1,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, R_f = \{1, 2\}$$

تهیه کننده:

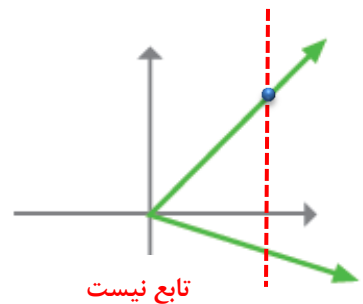
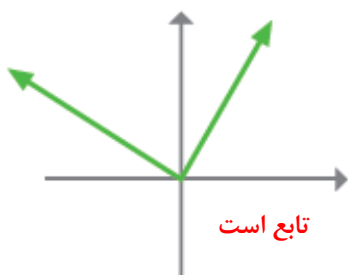
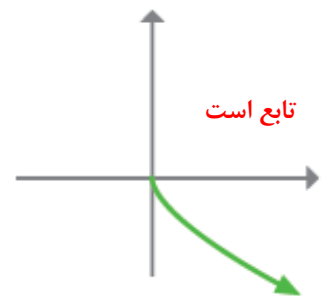
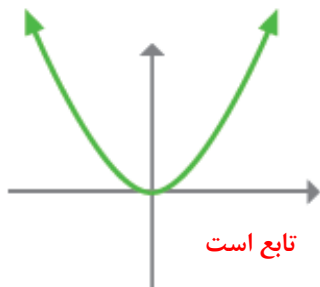
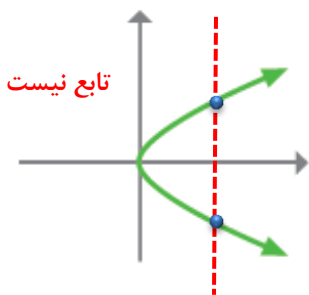
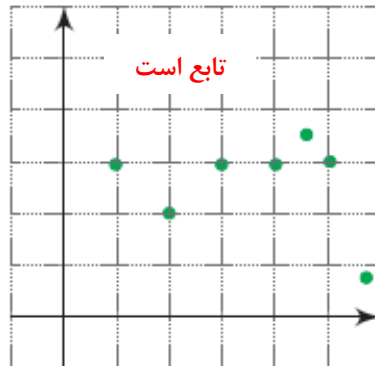
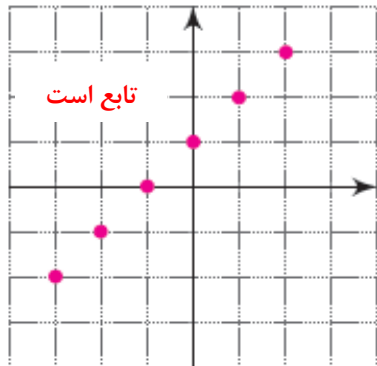
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

می توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در **یک نقطه** قطع کند.

صفحه ۱۰۵

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



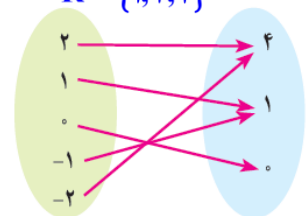
تمرین

۱ کدام یک تابع است؟

دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

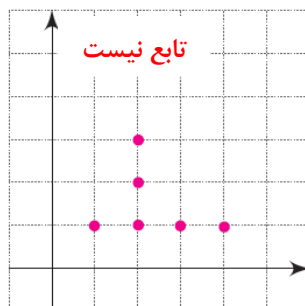
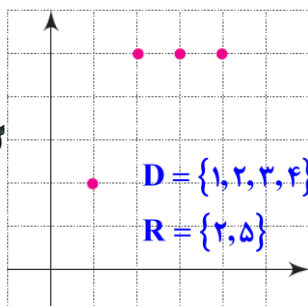
$$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$R = \{1, 2, 4\}$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد. $f = \{(1, 2), (3, 5)\}$

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد. $g = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$

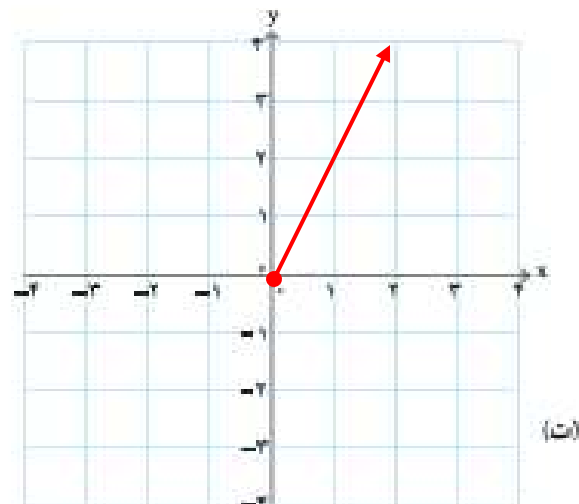
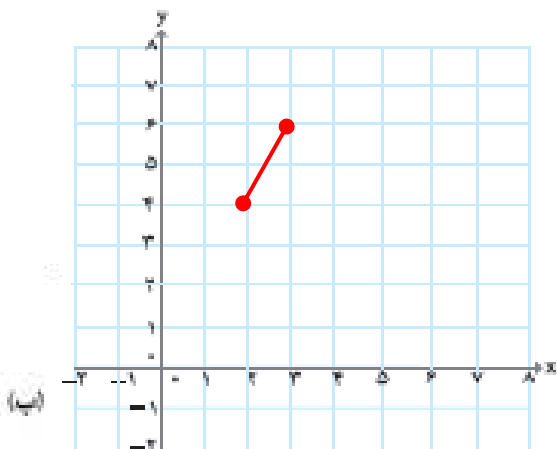
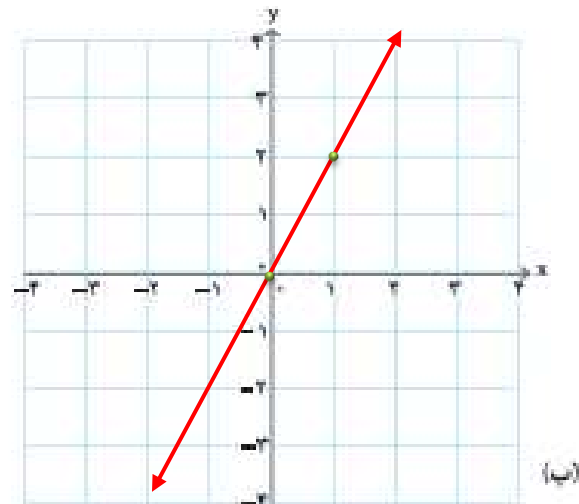
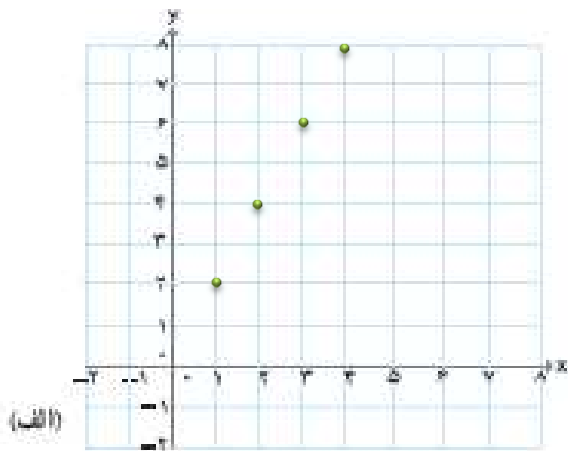
پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد. $h = \{(3, 5)\}$

ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), \dots\}$

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف نموده‌اند، رسم کنید.

| | الف) | ب) | پ) | ت) |
|-------|----------------------|--------------------|--------------|---------------------------|
| تابع | $f(x) = 2x$ | $g(x) = 2x$ | $h(x) = 2x$ | $y = 2x$ |
| دامنه | $\{1, 2, 3, 4\}$ | مجموعه اعداد حقیقی | $[2, 3]$ | مجموعه اعداد حقیقی نامنفی |
| برد | $R = \{2, 4, 6, 8\}$ | مجموعه اعداد حقیقی | $R = [4, 6]$ | مجموعه اعداد حقیقی نامنفی |

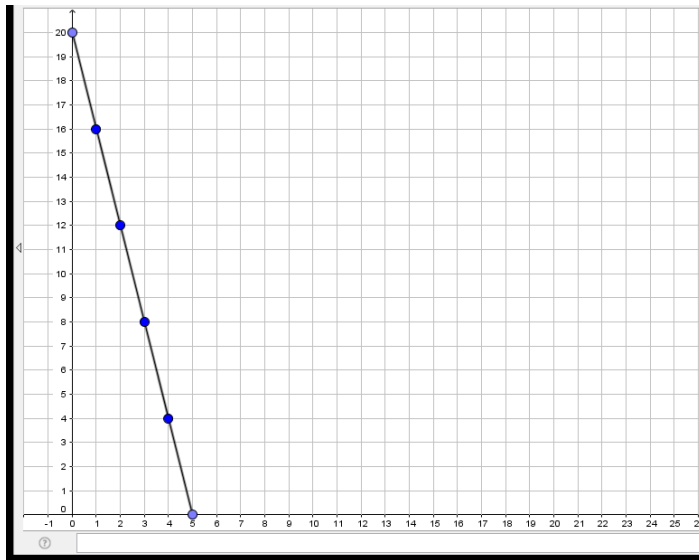


۴ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

| x (زمان) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|----------------|----|----|----|---|---|---|
| y (ارتفاع شمع) | ۲۰ | ۱۶ | ۱۲ | ۸ | ۴ | ۰ |

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن قسمتی یک خط راست می باشد. و معادله این خط $y = -4x + 20$ است.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@Faragiri10
ghadam.com

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چگونه در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

خیر - زیرا خط $x = 2$ با محور عرض ها موازی است لذا تمام نقاط آن مولفه های اول مساوی دارند ولی خط $y = 5$ تابع است زیرا نمودار آن با محور طولها موازی است و هیچ دو نقطه متمایز از آن مولفه های اول یکسان ندارند. - در حالت کلی اگر یک خط با محور عرض های موازی نباشد تابع است.

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ بی شمار

$$f(x) = 2x + 3 ; -3 \leq x \leq 5$$

$$g(x) = 1 - x ; x \in [-3, 5]$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x ; x \in [-3, 5]$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

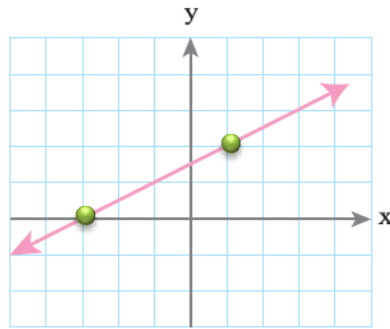
$$(-3, 0) \xrightarrow{y=ax+b} 0 = a(-3) + b$$

$$(1, 2) \xrightarrow{y=ax+b} 2 = a(1) + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟ نمایش جبری

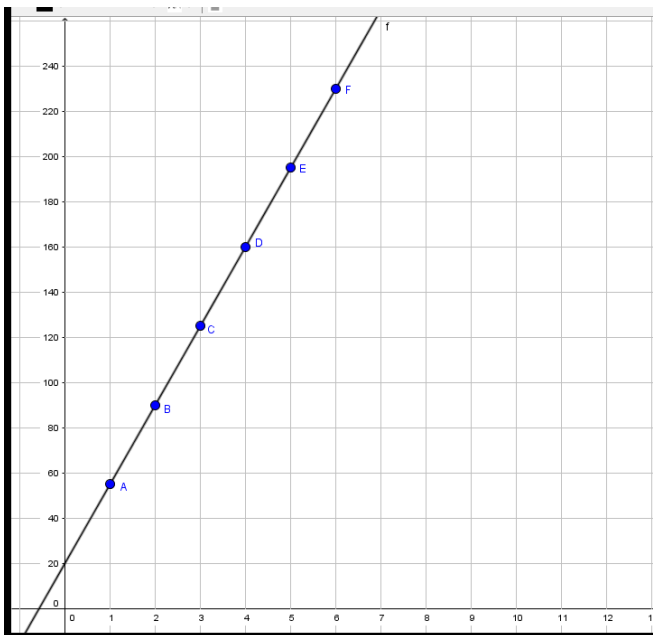
۸ جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

| | | | | | | |
|------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|
| عمق (کیلومتر) | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| دما (سانتی‌گراد) | ۵۵ | ۹۰ | ۱۲۵ | ۱۶۰ | ۱۹۵ | ۲۳۰ |

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا هیچ کدام از مولفه‌های اول آن تکرار نشده

ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.



$$(1, 55) \xrightarrow{y=ax+b} 55 = a(1) + b$$

$$(2, 90) \xrightarrow{y=ax+b} 90 = a(2) + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 55 \\ 2a + b = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -55 \\ 2a + b = 90 \end{cases}$$

پاسخ ب:

$$a = 35 \Rightarrow 35 + b = 55$$

$$\Rightarrow b = 20$$

$$\Rightarrow f(x) = 35x + 20$$

$$\Rightarrow f(10) = 35(10) + 20 = 370 \text{ : پاسخ پ}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۹ الف تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

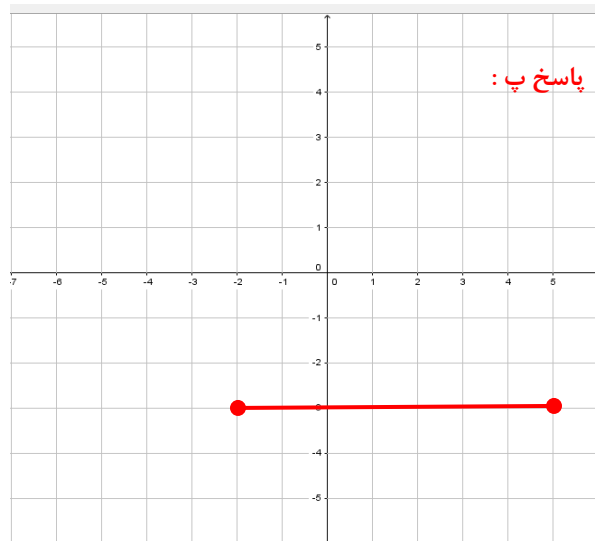
ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

پاسخ الف

$$f(2) = f(100) = f(-5) = f(\sqrt{5}) = f(-\frac{3}{4}) = -3$$

پاسخ ب



۱۰ برای یک تابع خطی می دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

پاسخ ب :

$$f(0) = 7 \xrightarrow{f(x)=ax+b} a(0) + b = 7 \Rightarrow b = 7$$

$$f(2) = 11 \xrightarrow{f(x)=ax+b} a(2) + b = 11$$

$$\Rightarrow 2a + 7 = 11 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 7$$

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می دهد؟ چرا؟ - زیرا هیچ کدام از مولفه های اول آن تکرار نشده است.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|
| x | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| y | ۱ | ۴ | ۹ | ۱۵ | ۲۵ | ۳۶ |

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

پ) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

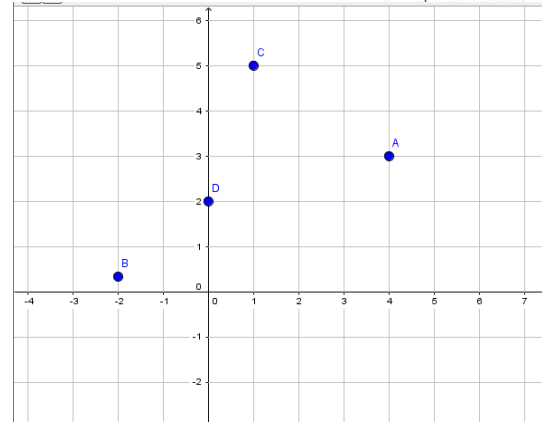
ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

ت) $f(t) = \frac{1}{2} - t$

صفحه ۱۰۸

۱۳ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(0) = 2, g(1) = 5, g(-2) = \frac{1}{3}, g(4) = 3$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

| | | | | |
|--------|---|---------------|---|---|
| x | ۴ | -۲ | ۱ | ۰ |
| $g(x)$ | ۳ | $\frac{1}{3}$ | ۵ | ۲ |



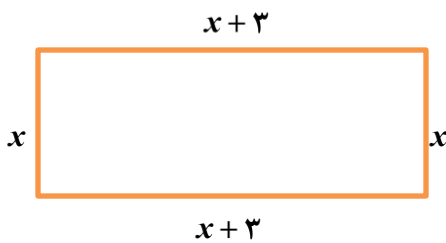
۱۴ برای اندازه گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته اند.

الف) $20 -$ درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟ $F = \frac{9}{5}(-20) + 32 = -36 + 32 = -4$

ب) 104 درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟ $104 = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\times 5} 520 = 9C + 160 \Rightarrow 9C = 360 \Rightarrow C = 40$

پ) معادله ای بنویسید که سانتی گراد را بر حسب فارنهایت به دست دهد. $F = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\times 5} 5F = 9C + 160 \Rightarrow 9C = 5F - 160 \Rightarrow C = \frac{5}{9}F - 40$.
ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می کند؟ **بله**

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.



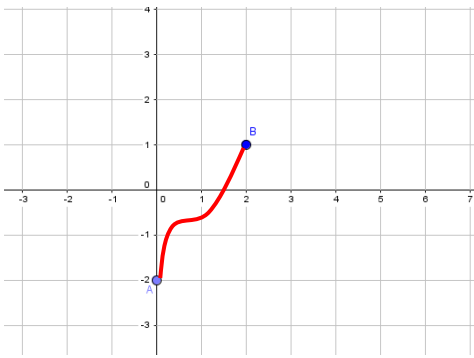
$p(x) = 2(x + 3 + x) = 2(2x + 3) \Rightarrow p(x) = 4x + 6$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

$f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$

$g = \{(1, -2), (2, -3), (3, -1)\}$

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می توان رسم کرد؟ **بیشمار**



صفحه ۱۰۹

درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می شویم.

فعالیت

۱ جدول های زیر را کامل کنید.

| | | | | | | | | | |
|--------------|------|---------------|---|---|----|----------------|----|-----|-------|
| طول ضلع مربع | ۰/۱ | $\frac{1}{2}$ | ۱ | ۳ | ۴ | $\frac{2}{5}$ | ۵ | ۱۲ | x |
| مساحت آن | ۰/۰۱ | $\frac{1}{4}$ | ۱ | ۹ | ۱۶ | $\frac{6}{25}$ | ۲۵ | ۱۴۴ | x^2 |

| | | | | | | |
|------------|-----------------|--------|--------|---------|---------|-----------|
| شعاع دایره | $\frac{1}{2}$ | ۲ | ۳ | ۵ | ۶ | r |
| مساحت آن | $\frac{\pi}{4}$ | 4π | 9π | 25π | 36π | πr^2 |

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x) = x^2$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به صورت $g(r) = \pi r^2$ قابل نمایش است.

چون f و g به صورت یک چند جمله ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده اند، آنها را توابع درجه دوم می نامیم.

حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

تهیه کننده:

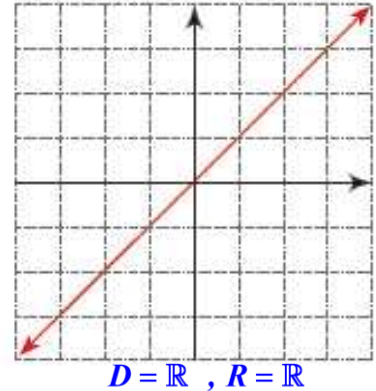
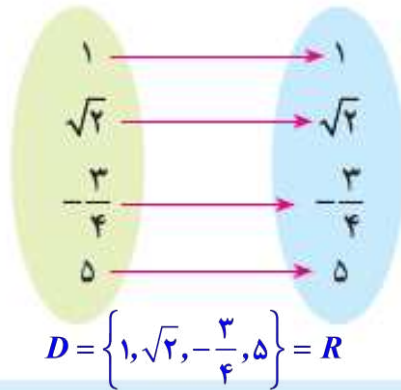
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

شباهت: در هر سه تابع، هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شده است.

تفاوت: دامنه این توابع از مجموعه های متفاوتی انتخاب شده است.

$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$

$$D = \{a, b, c\} = R$$

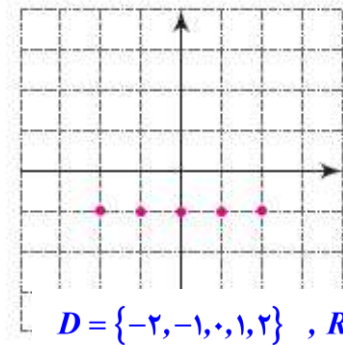
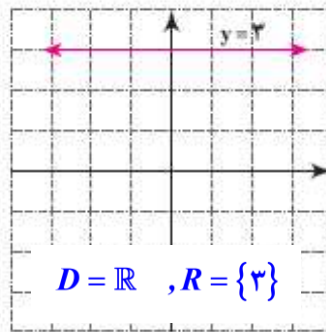


اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند. اگر دامنه تابع همانی را \mathbb{R} در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می شود.

سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی ای مشترک اند؟ برد آنها مجموعه ای یک عضوی است

| | | | |
|----------|----|----|----|
| ساعت | ۸ | ۹ | ۱۰ |
| دمای هوا | ۱۹ | ۱۹ | ۱۹ |

$$D = \{8, 9, 10\}, R = \{19\}$$



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می دهیم.

کار در کلاس

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله ای ارائه کنید. $f(x) = x^2 - x + 3$

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد. $f = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (2, 2), (5, 5)\}$

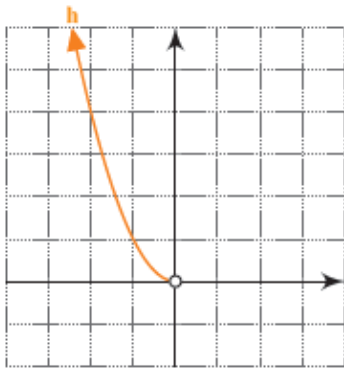
یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشند. $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد. $h = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

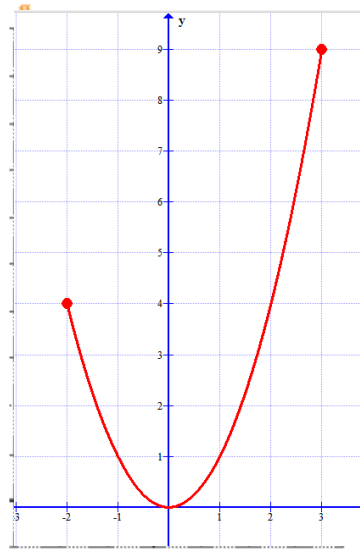
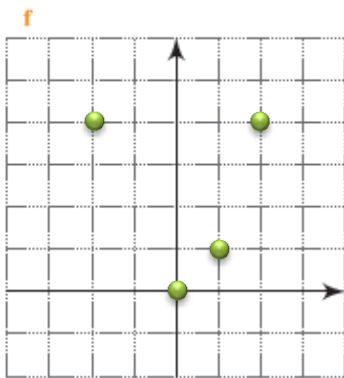
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

درس سوم: انواع توابع

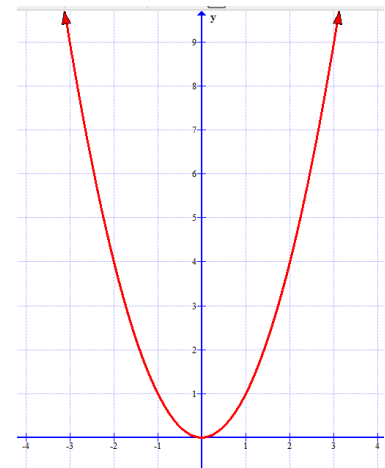
۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



| تابع | $f(x) = x^2$ | $g(x) = x^2$ | $h(x) = x^2$ | $t(x) = x^2$ |
|-------|---------------------|----------------|-------------------------|----------------------|
| دامنه | $\{-2, 0, 1, 2\}$ | $[-2, 3]$ | مجموعه اعداد حقیقی منفی | مجموعه اعداد حقیقی |
| برد | $R_f = \{0, 1, 4\}$ | $R_g = [0, 9]$ | $R_h = [0, +\infty)$ | $R_t = [0, +\infty)$ |

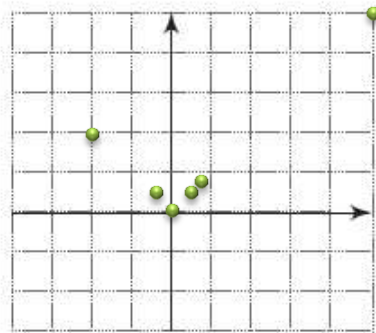


دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.



| | | | | | | |
|--------|----|----------------|---|---------------|---------------|---|
| x | -2 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 5 |
| $f(x)$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 5 |

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

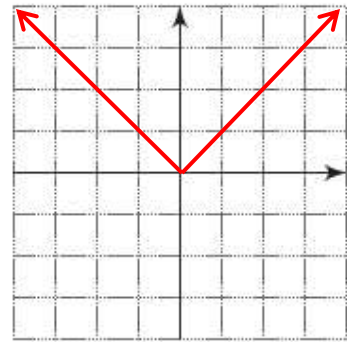
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$\text{تابع قدرمطلق را به صورت } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ نیز نمایش می‌دهند.}$$

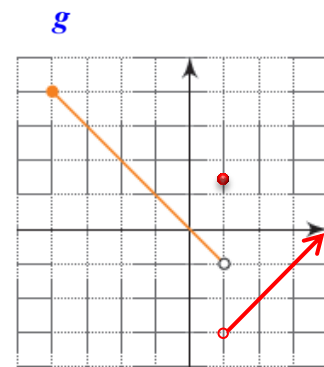
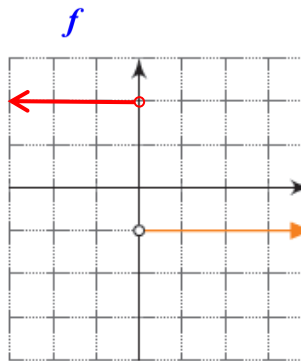
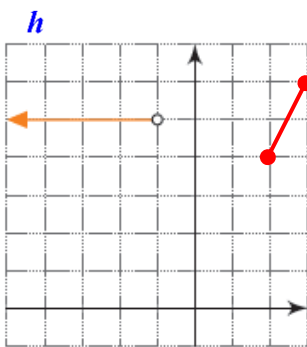
با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.



فعالیت

توابع f , g , h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$



مقادیر $f(3)$, $g(-2)$, $f(-\frac{1}{5})$, $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.
 $f(3) = -1$, $g(-2) = +2$, $h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$, $g(0) = 0$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

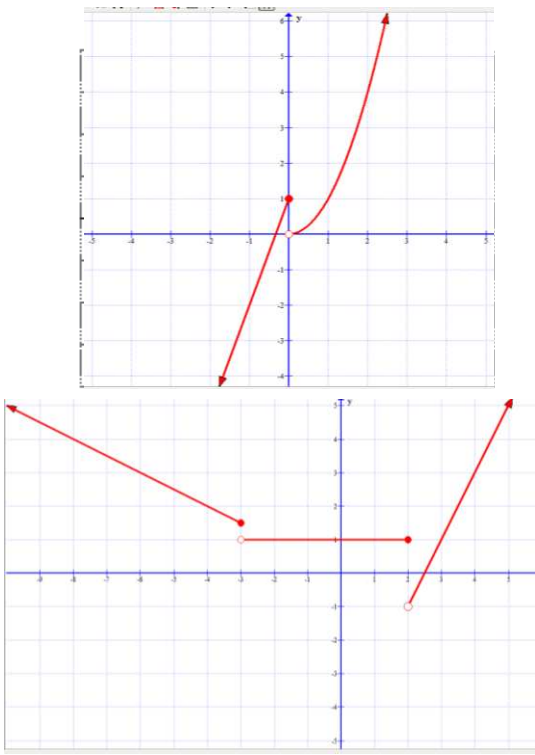
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x+1 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$ ، $f(5)$ ، $g(2)$ ، $f(-2)$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.

$$f(0) = 3(0) + 1 = 1, \quad g(0) = 1, \quad f(5) = 5^2 = 25, \quad g(2) = 1$$

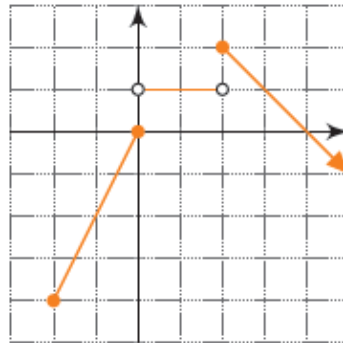
$$f(-2) = 3(-2) + 1 = -5, \quad g\left(-\frac{1}{5}\right) = 1$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & ; 0 < x < 2 \\ -x+4 & ; 2 \leq x \end{cases}$$

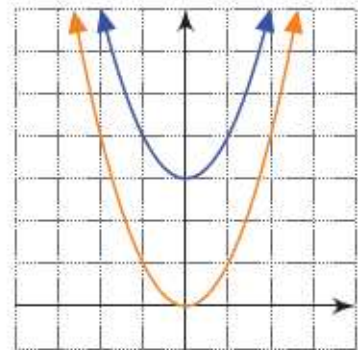
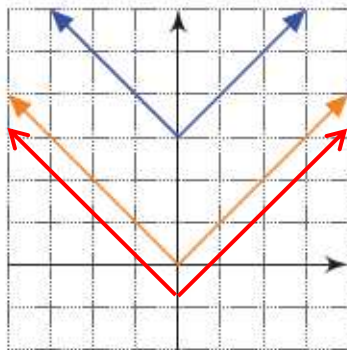
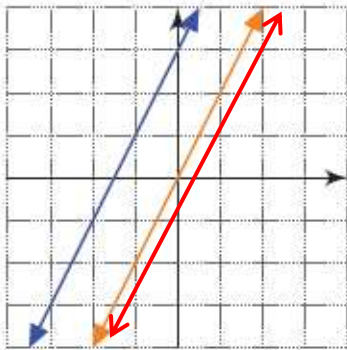
$$D_f = [-2, +\infty) \quad R_f = [-4, 2]$$



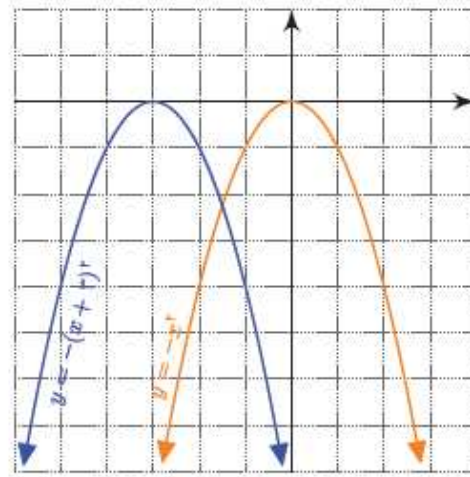
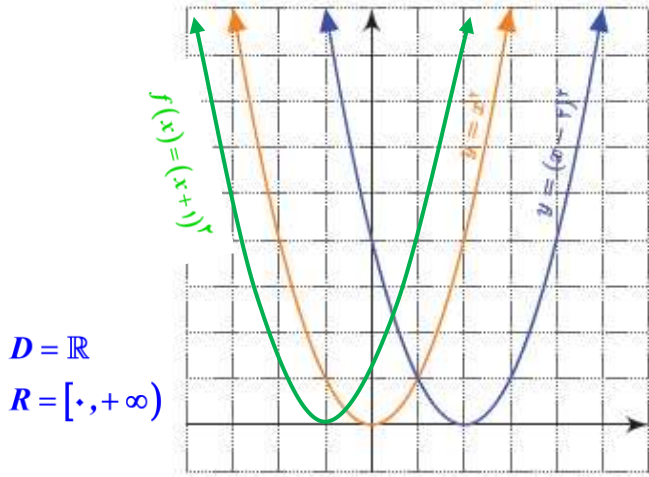
رسم برخی توابع به کمک انتقال

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = |x|+3$ و $h(x) = x^2+3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید. هر سه تابع به اندازه سه واحد در جهت مثبت محور انتقال داده شده‌اند.



۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



درس سوم: انواع توابع

کار در کلاس

در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f, g, h و t رسم شده‌اند.

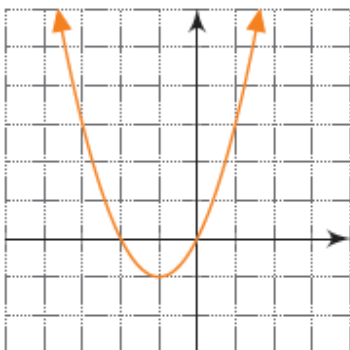
$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

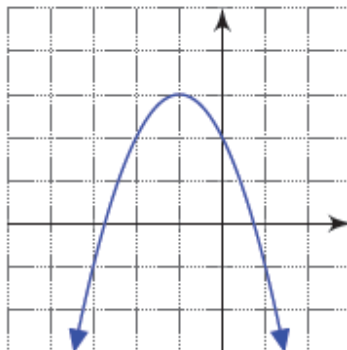
الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:



$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$D = \mathbb{R}$$

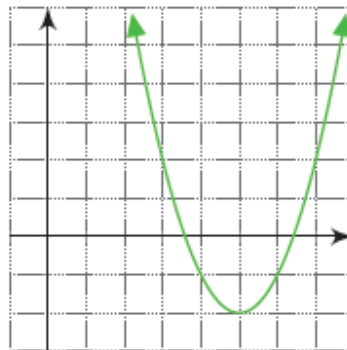
$$R = [-1, +\infty)$$



$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

$$D = \mathbb{R}$$

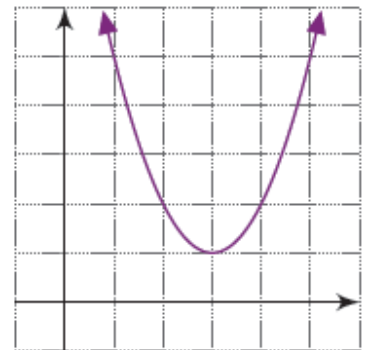
$$R = (-\infty, 3]$$



$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-2, +\infty)$$



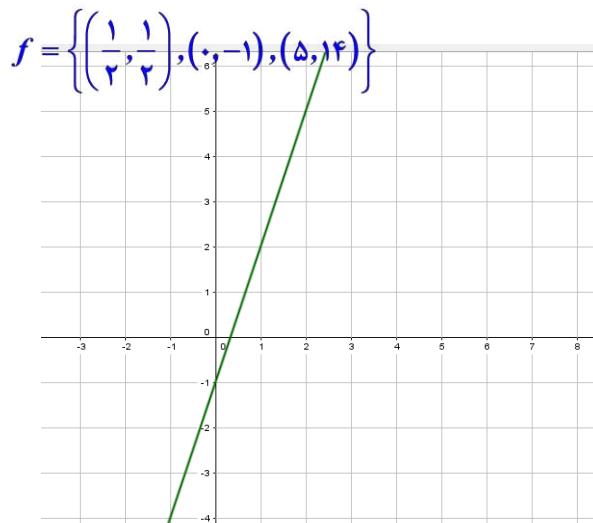
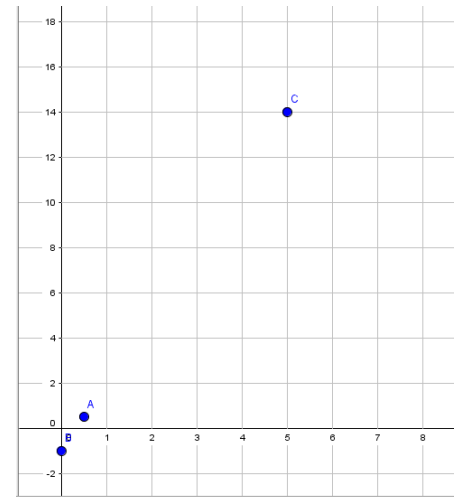
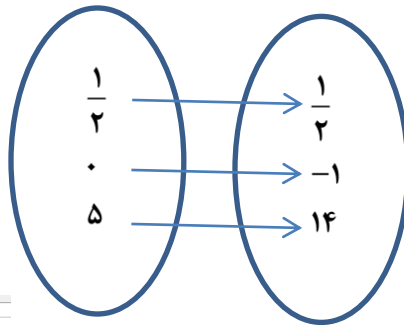
$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [1, +\infty)$$

۱ تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخها چگونه خواهد بود؟

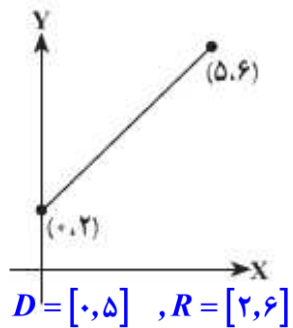
$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2} \\ f(0) &= 3(0) - 1 = -1 \\ f(5) &= 3(5) - 1 = 14 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left\{\frac{1}{2}, -1, 14\right\}$$



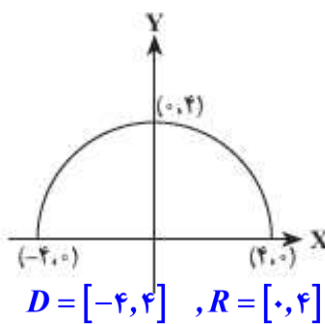
اگر دامنه تابع \mathbb{R} باشد آنگاه: $R_f = \mathbb{R}$ و نمودار به صورت مقابل است:

@Faragiri10
ghadam.com

۲ در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



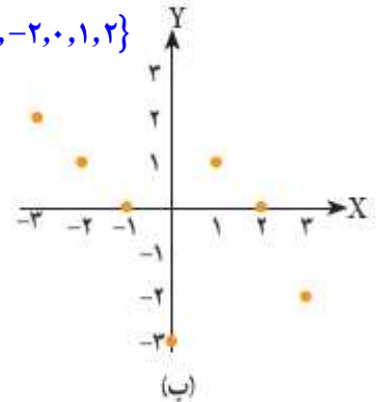
(الف)



(ب)

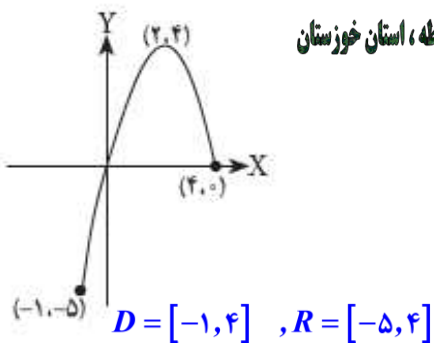
$$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$R = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$$

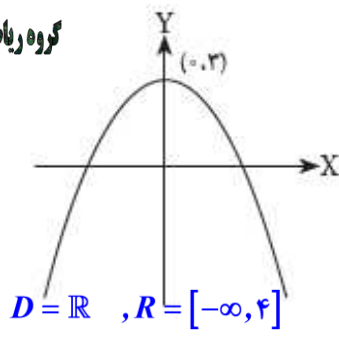


تهیه کننده:

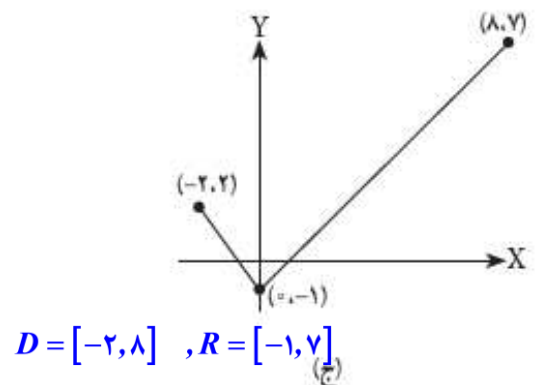
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



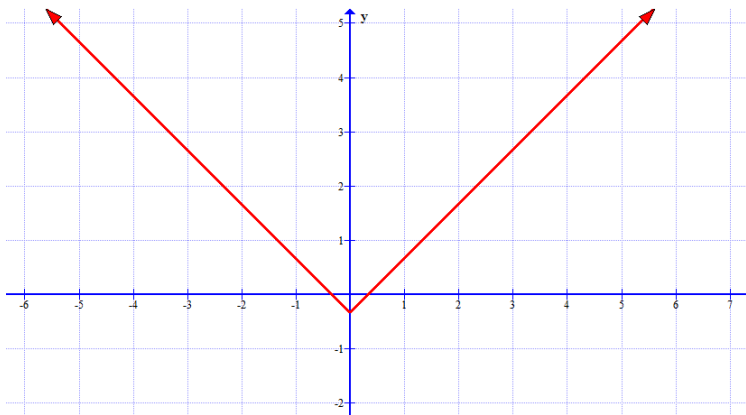
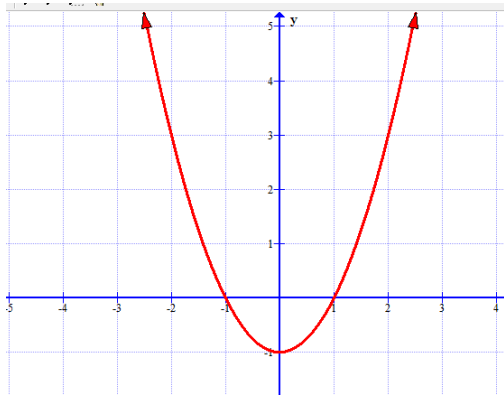
(ت)



(ت)



(ج)



۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است. **نادرست**

ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است. **نادرست**

پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است. **درست**

ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$. **نادرست**

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

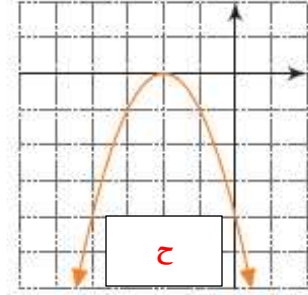
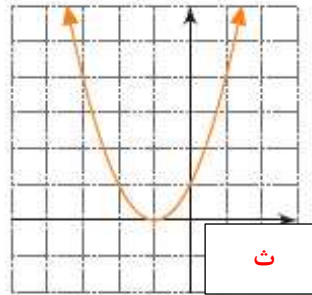
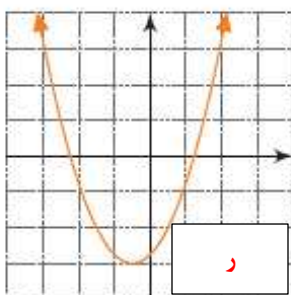
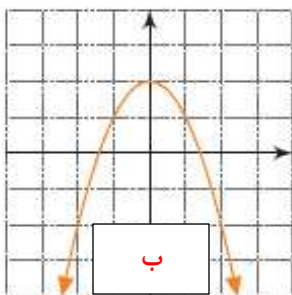
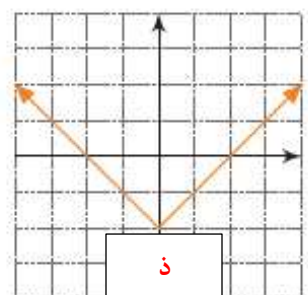
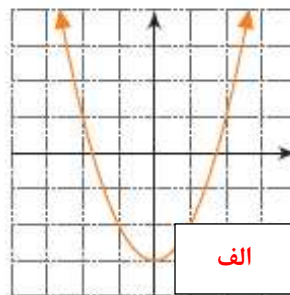
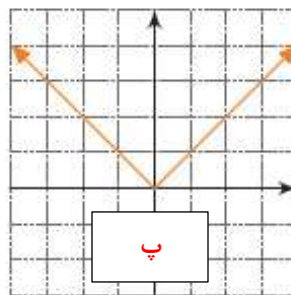
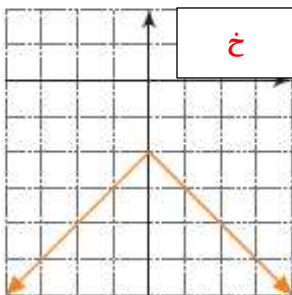
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V_2 = \pi r^2 \times 30$$

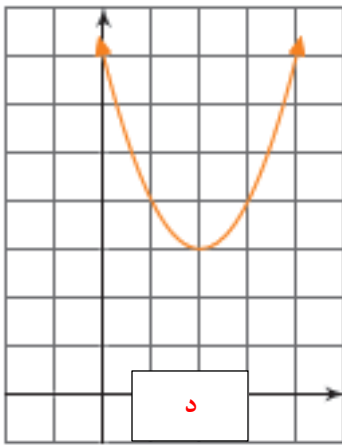
$$v(r) = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟

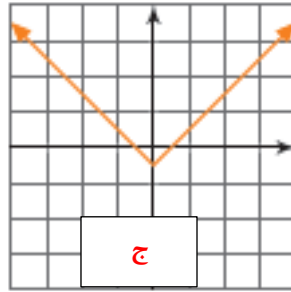




الف) $y = x^2 - 3$

ث) $y = (x + 1)^2$

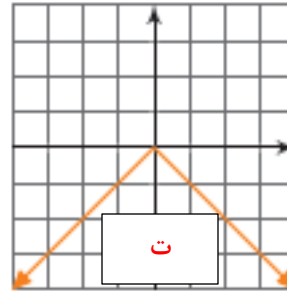
خ) $y = -|x| - 2$



ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$

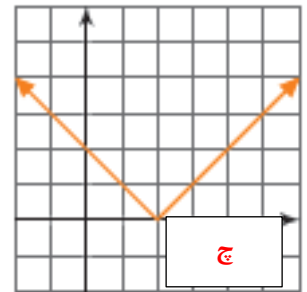
د) $y = (x - 2)^2 + 3$



پ) $y = |x|$

ج) $y = |x - 2|$

ذ) $y = |x| - 2$



ت) $y = -|x|$

ح) $y = -(x + 2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

 @Faragiri10

 ghadam.com