قدر مطلق

تعریف : فاصله‌ی هر عدد مانند a روی محور اعداد، تا مبدأ محور (صفر محور) را قدر مطلق آن عدد نامیده و با نماد $|a|$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت :

$$|a| = \begin{cases} a \ , & a \geqslant ۰ \\ -a \ , & a < ۰ \end{cases}$$

مثال : حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-۴| = ۴$

ب) $|-۵-(-۳)| = |-۲| = ۲$

پ) $|\sqrt{۲}-۱| = \sqrt{۲}-۱$

ت) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| = -\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$

ث) $|۳-\pi| = -۳+\pi$

ج) $|a^۲+۱| = a^۲+۱$

مثال : با فرض $x < ۲$ ، حاصل عبارت $A = |۲x-۵| + |x-۳| - |۹-۳x|$ را بنویسید.

اگر $x < ۲ \longrightarrow$ $۲x-۵$ منفی است و $x-۳$ منفی است و $۹-۳x$ مثبت است

بنابراین : $A = -۲x+۵-x+۳-(۹-۳x)$

$$\Rightarrow A = -۲x+۵-x+۳-۹+۳x = -۱$$

نکته (۱) : $\sqrt{x^۲} = |x|$

مثال : عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱} = \sqrt{(a^۲+۱)^۲} = |a^۲+۱| = a^۲+۱$

ب) $\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲} = |\sqrt{۳}-\sqrt{۲}| = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

پ) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲} = |۲-\sqrt{۳}| = ۲-\sqrt{۳}$

مثال : اگر $a^۲-۶ab+b^۲=۰$ ، حاصل $\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$ را بدست آورید.

$$a^۲-۶ab+b^۲=۰ \longrightarrow a^۲+b^۲=۶ab \ ①$$

$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^۲} = \sqrt{\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲-۲ab}} \overset{①}{=} \sqrt{\frac{۶ab+۲ab}{۶ab-۲ab}} = \sqrt{\frac{۸ab}{۴ab}} = \sqrt{۲}$$

مثال: الف) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|a.b| = |a|.|b|$

جواب: $|a.b| = \sqrt{(a.b)^۲} = \sqrt{a^۲.b^۲} = \sqrt{a^۲}.\sqrt{b^۲} = |a|.|b|$

ب) با فرض $b \neq ۰$ و با استفاده از قسمت "الف" نشان دهید: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

طبق الف: $\left|\frac{a}{b}\right| \times |b| = \left|\frac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{b}\right| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| \times |b| = |a|$

$$\xrightarrow{\div |b|} \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

پ) با استفاده از قسمت "الف" نشان دهید: $|x| = |-x|$

$|-x| = |(-1)x| = |-1| \times |x| = 1 \times |x| = |x|$

ت) با استفاده از قسمت "الف" نشان دهید: $|x|^۲ = x^۲$

$|x|^۲ = |x| \times |x| = |x.x| = |x^۲| = x^۲$

مثال: کسر $\frac{x^۲-1}{|x|-1}$ را ساده کنید.

$$\text{کسر} = \frac{|x|^۲-1}{|x|-1} = \frac{(\cancel{|x|-1})(|x|+1)}{\cancel{|x|-1}} = |x|+1$$

نکته (۲) فاصله‌ی دو عدد a و b از یکدیگر را به صورت $|a-b|$ می‌نویسیم.

مثال: عبارات زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

الف) فاصله‌ی عدد حقیقی x از عدد ۴ کمتر از ۰/۱ است. $|x-۴| < ۰/۱$

ب) فاصله‌ی بین دو عدد a و x، بیشتر از ۳ است. $|x-a| > ۳$

نکته (۳) $|x| \geq ۰$ و $|-x| = |x|$

مثال: کمترین مقدار عبارت $y = ۲|x|+۳$ را تعیین کنید.

می‌دانیم: $|x| \geq ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲|x| \geq ۰ \xrightarrow{+۳} ۲|x|+۳ \geq ۳ \Rightarrow y \geq ۳$

کمترین مقدار عبارت ۳ است.

نکته (۴) برای اینکه ضابطه ی توابع قدر مطلق دار را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسیم، باید عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت کنیم.

به عنوان نمونه تابع زیر را در نظر بگیرید:

$y = |x-1| + 2$

ریشه $\rightarrow 1$

$-\infty$	1	$+\infty$
$-$	0	$+$

اگر $x \geq 1$ باشه، طبق جدول، عبارت درون قدر مطلق مثبت است، پس می توان آن را بدون قدر مطلق به صورت $x-1+2=x+1$ نوشت.

اگر $x < 1$ باشه، طبق جدول، عبارت درون قدر مطلق منفی است. پس برای اینکه آن را بدون قدر مطلق بنویسیم باید عبارت را قرینه کنیم پس: $-x+1+2=-x+3$

در نتیجه تابع را به صورت روبرو می نویسیم:

$$y=\begin{cases} x+1 , & x\geq 1 \\ -x+3 , & x<1 \end{cases}$$

مثال: توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $y = x|x|$

$\swarrow 0$

$-\infty$	0	$+\infty$
$-$	0	$+$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} x^2 , & x\geq 0 \\ -x^2 , & x<0 \end{cases}$$

ب) $y = |2x - x^2| - x^2$

$\swarrow$ ۰ و ۲

$-\infty$	0		2	$+\infty$
$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow y=\begin{cases} 2x-2x^2 , & 0\leq x\leq 2 \\ 2x , & x<0 \text{ یا } x>2 \end{cases}$$

پ) $y = |x-۱| + |x+۲|$

$\swarrow ۱ \qquad \swarrow -۲$

		-۲		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	○	$+$
$x+۲$	$-$	○	$+$		$+$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -x+۱-x-۲ & , x<-۲ \\ -x+۱+x+۲ & , -۲\leqslant x\leqslant ۱ \\ x-۱+x+۲ & , x>۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -۲x-۱ & , x<-۲ \\ ۳ & , -۲\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۲x+۱ & , x>۱ \end{cases}$$

ت) $y = x - \dfrac{x}{|x|}$

$۰ \leftarrow$

$-\infty \quad ۰ \quad +\infty$

$- \quad + $

تان

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x-\dfrac{x}{x} & , x>۰ \\ x-\dfrac{x}{-x} & , x<۰ \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-۱ & , x>۰ \\ x+۱ & , x<۰ \end{cases}$$

نکته (۵) در حالت کلی برای رسم نمودار توابع قدر مطلق، باید آنها را بدون استفاده از نماد قدر مطلق (به صورت تابع چند ضابطه‌ای) نوشته سپس رسم کنیم.

مثال: $y = x + \dfrac{\overset{\to ۰}{|x|}}{x} - ۱$

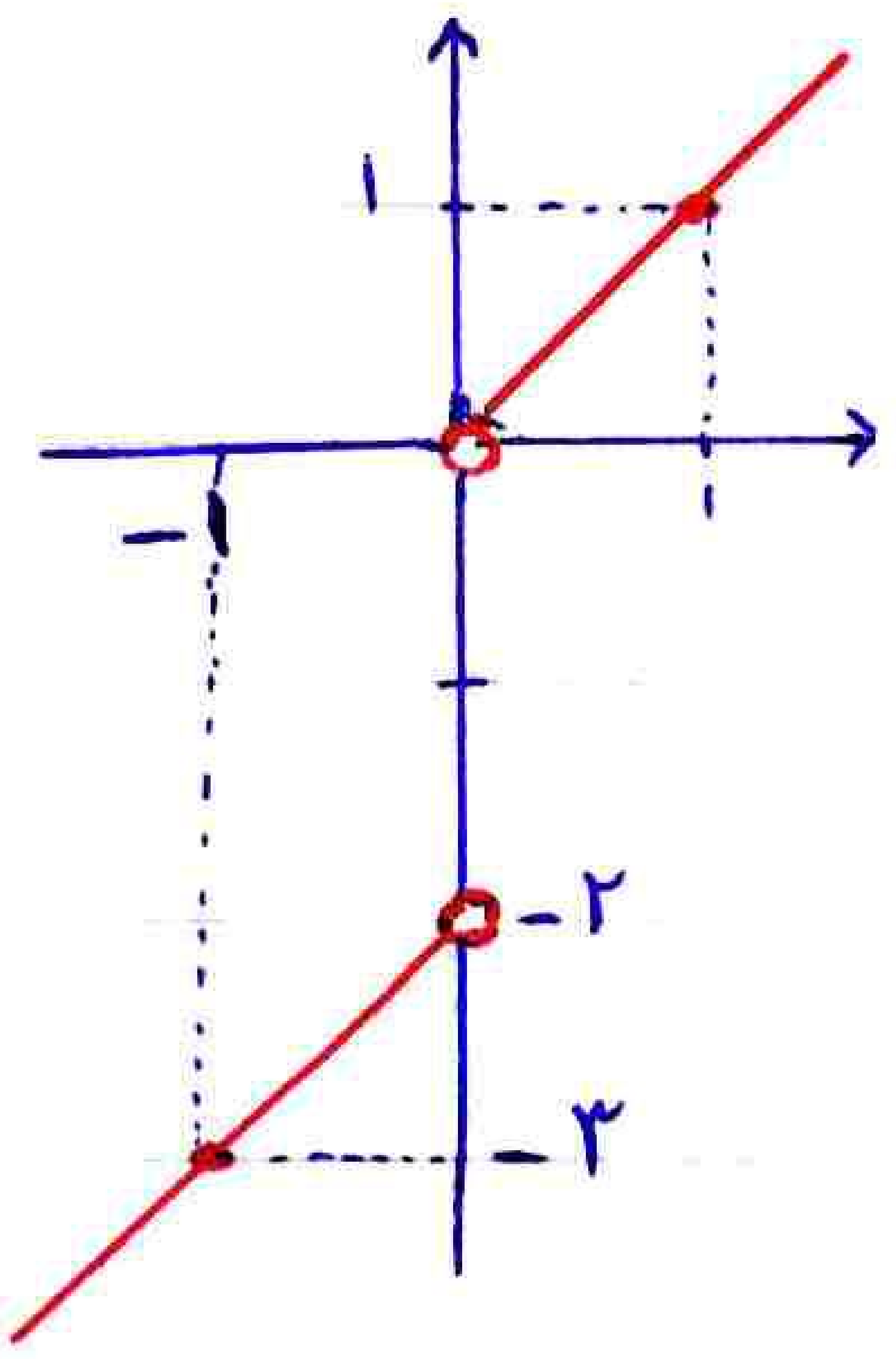
$-\infty \quad ۰ \quad +\infty$

$- \quad ○ \quad +$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x & , x>۰ \\ x-۲ & , x<۰ \end{cases}$$

x	۰	۱
y	۰	۱

x	۰	-۱
y	-۲	-۳



مثال: $y = ۲ - |x - ۱|$

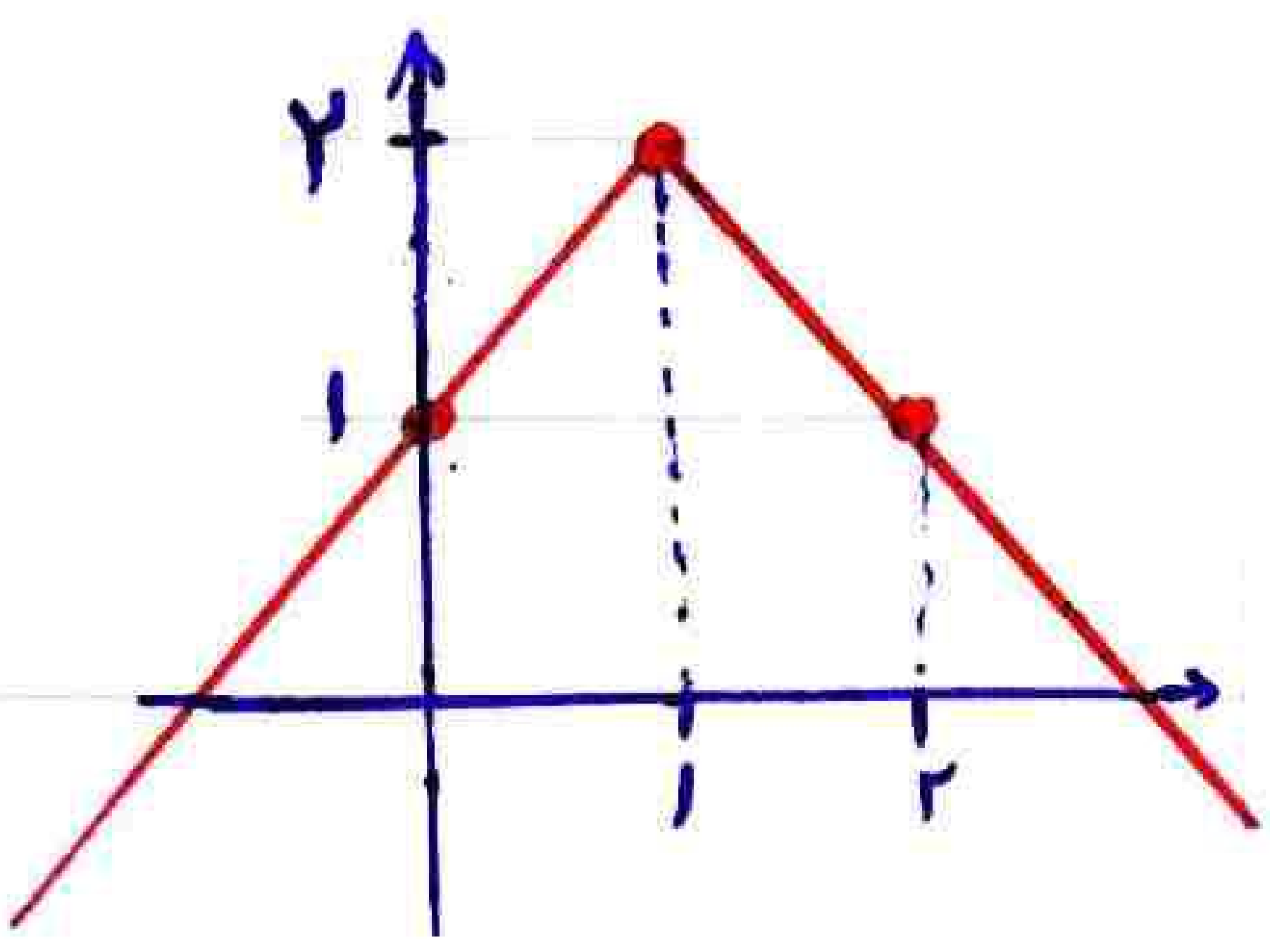
$۱ \swarrow$

$-\infty$		۱		$+\infty$
	$-$	$\circ$	$+$	

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۳ - x & , x \geqslant ۱ \\ x + ۱ & , x < ۱ \end{cases}$$

x	۱	۲
y	۲	۱

x	①	۰
y	②	۱



مثال: $y = |x - ۱| + |x + ۱|$

$۱ \swarrow \qquad -۱ \swarrow$

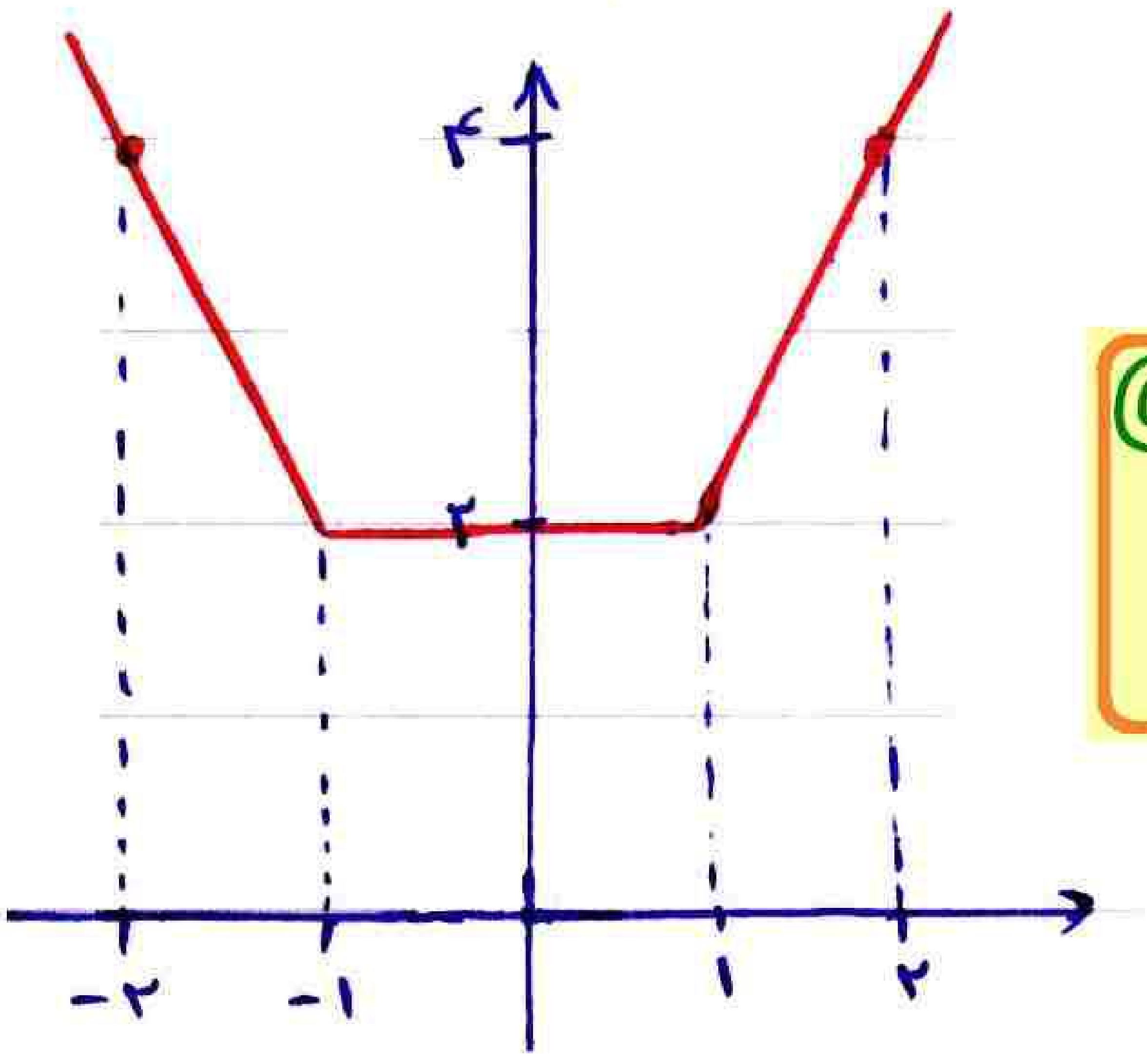
		-۱		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$x+۱$	$-$	$\circ$	$+$		$+$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -۲x & , x < -۱ \\ ۲ & , -۱ \leqslant x < ۱ \\ ۲x & , x > ۱ \end{cases}$$

x	(-۱)	-۲
y	(۲)	۴

x	-۱	۱
y	۲	۲

x	①	۲
y	②	٤



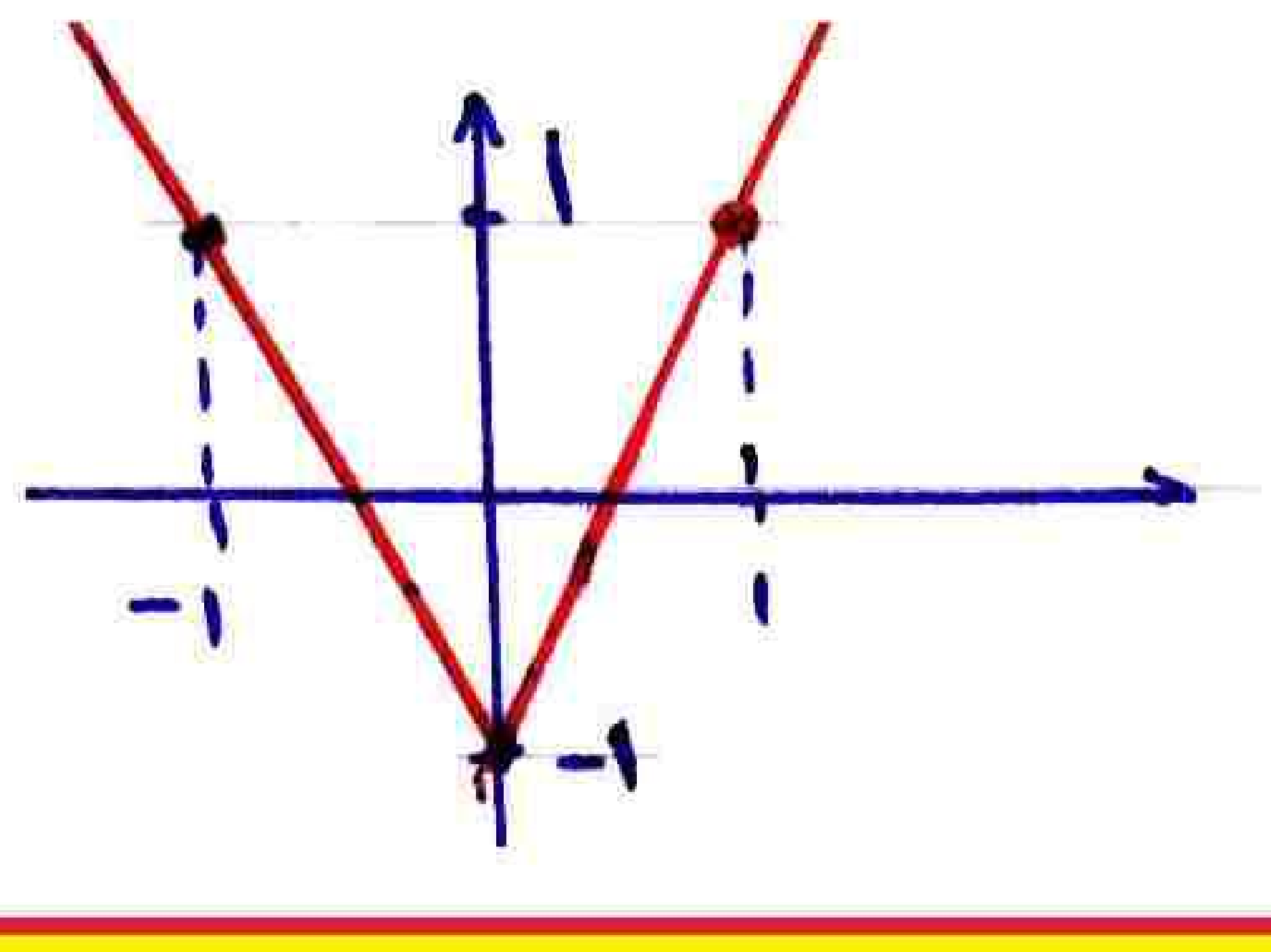
توجه: درصورتی که در تابع قدرمطلق حداکثر توان x، یک باشد، راحت تر آن است که جدول مقادیر مشابه جدول زیر نوشته و آن را رسم کرد.

x	یکی کمتر	ریشه‌های درونی	یکی بیشتر
y	?	?	?

مثال: $y = ۲|x| - ۱$

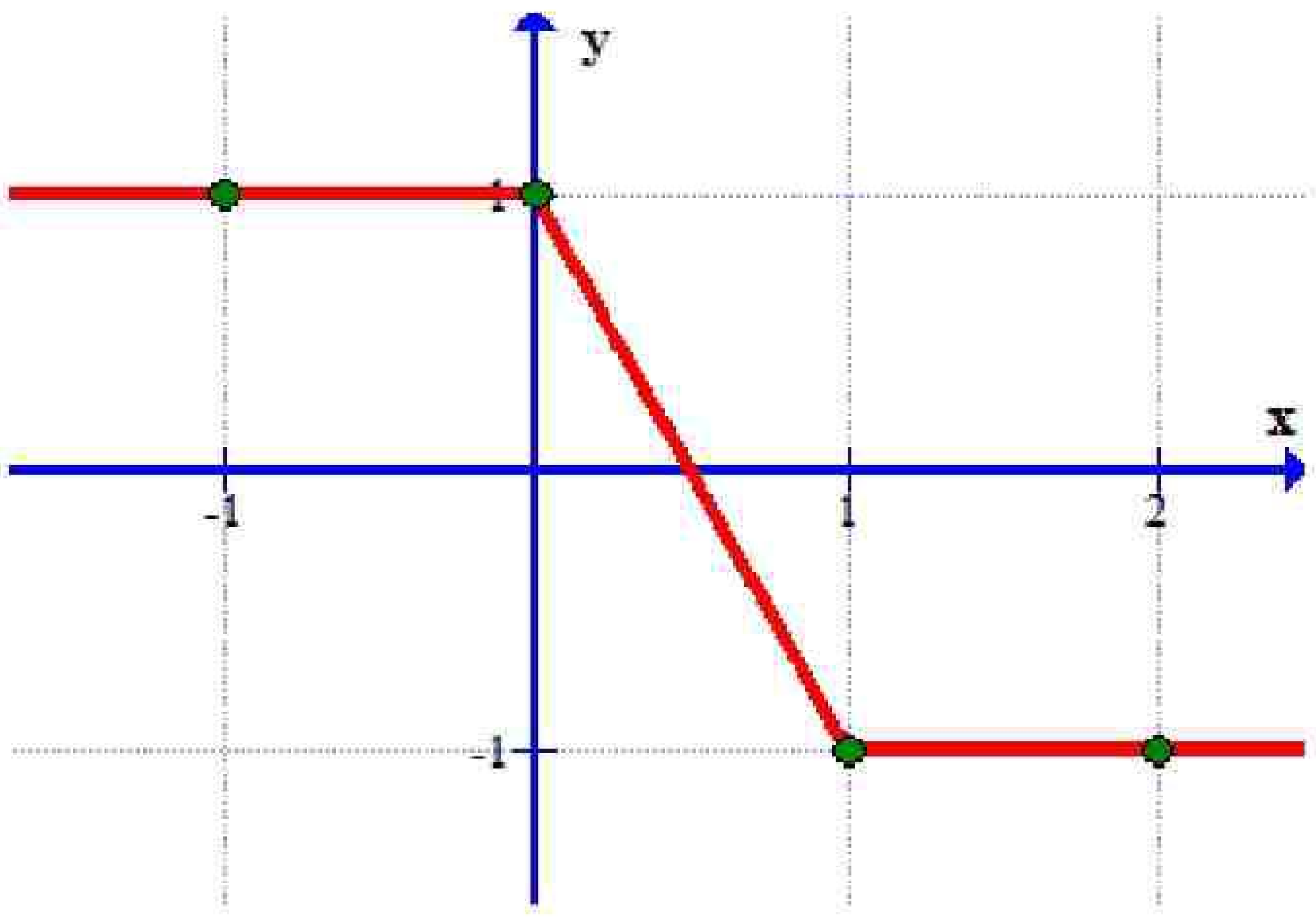
$۰ \swarrow$

x	-۱	۰	۱
y	۱	-۱	۱



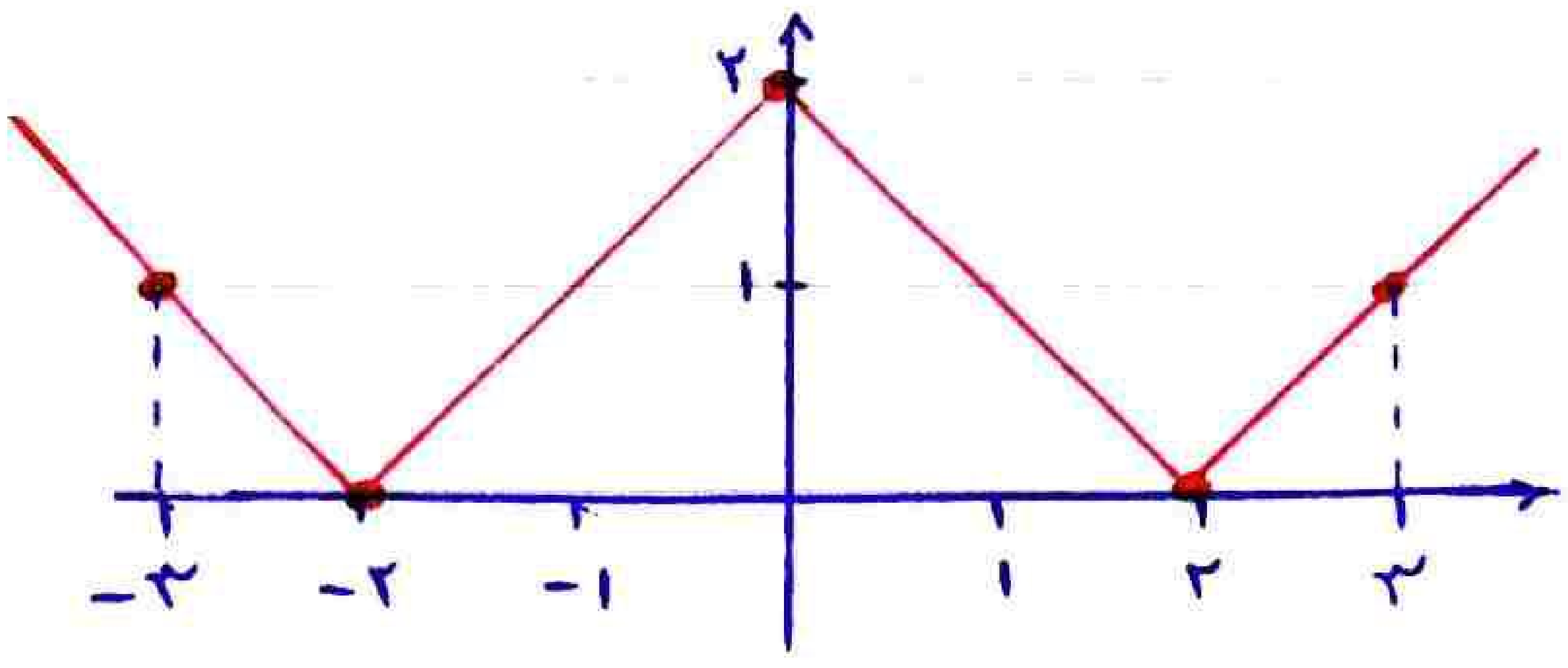
مثال : $y = \underset{1}{|x-1|} - \underset{0}{|x|}$

x	-۱	۰	۱	۲
y	۱	۱	-۱	-۱



مثال : $y = \overset{0}{\left|\underbrace{|x|-2}_{\pm 2}\right|}$

x	-۳	-۲	۰	۲	۳
y	۱	۰	۲	۰	۱

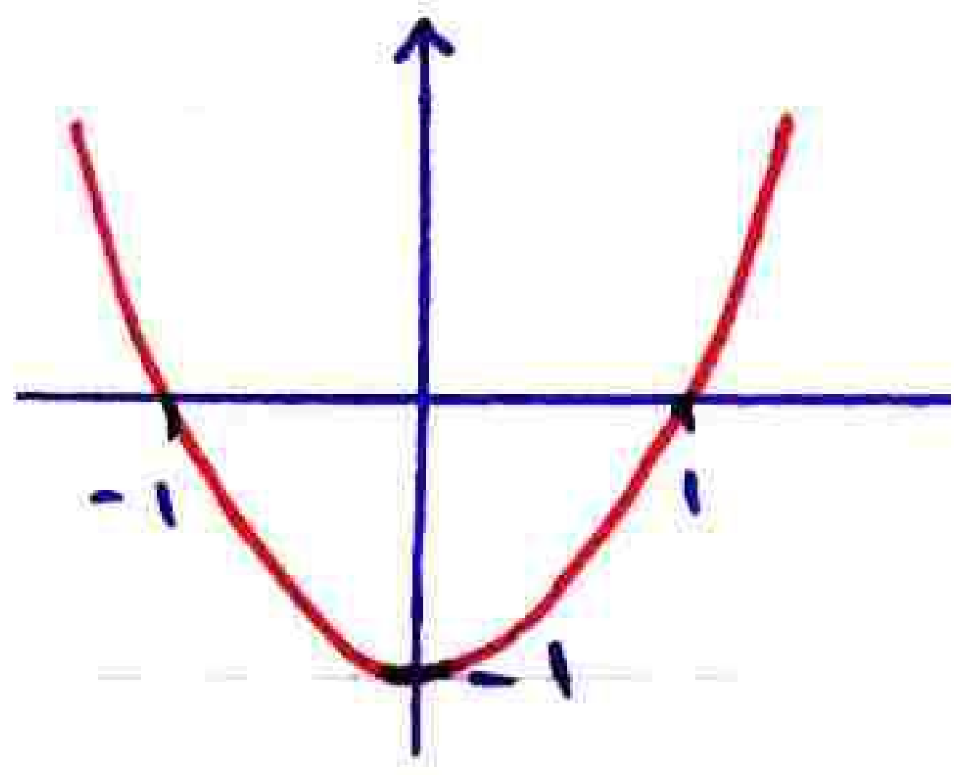


توجه : برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار f زیر محور x هاست، تصویر آینه وار نمودار را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

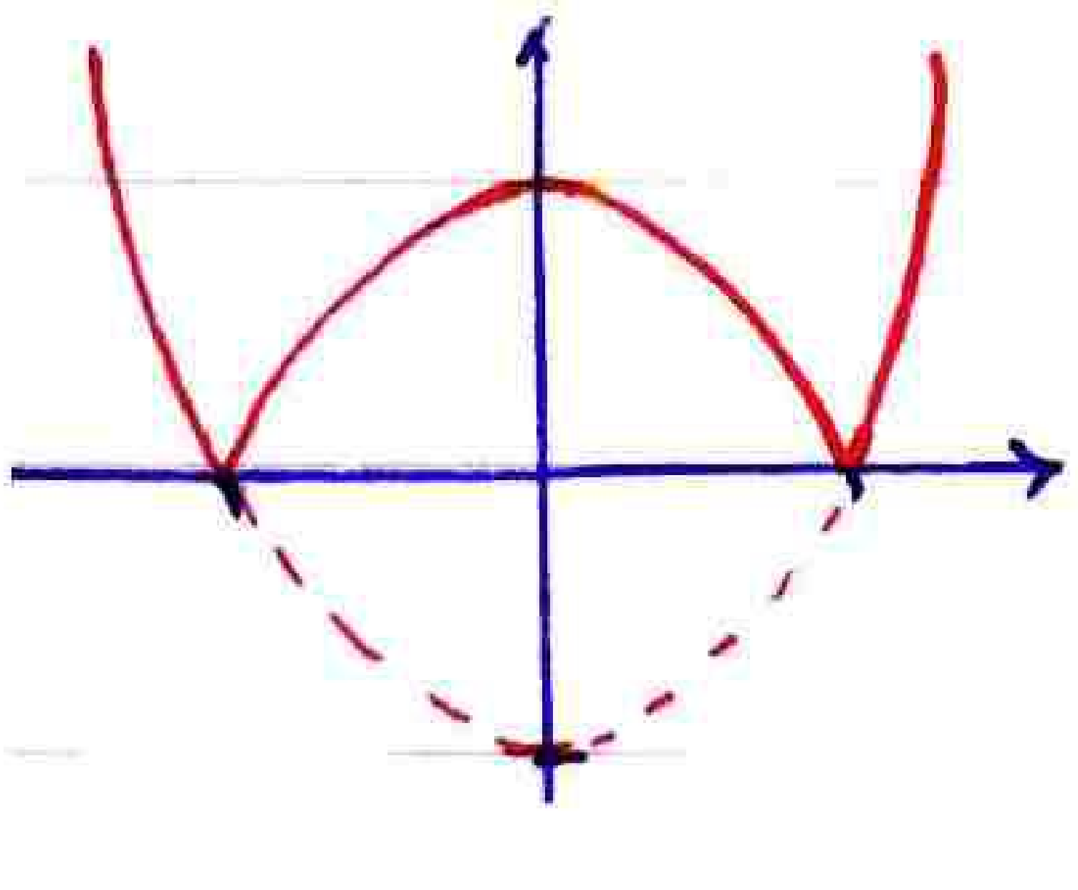
به عنوان نمونه می خواهیم نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم کنیم.

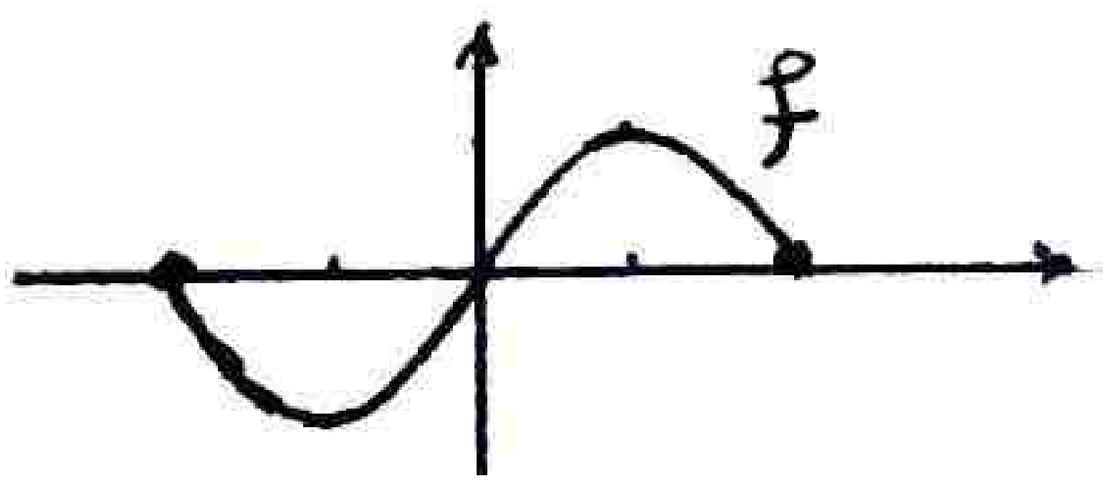
ابتدا نمودار تابع $y=x^2-1$ را رسم می کنیم :

x	-۱	۰	۱
y	۰	-۱	۰

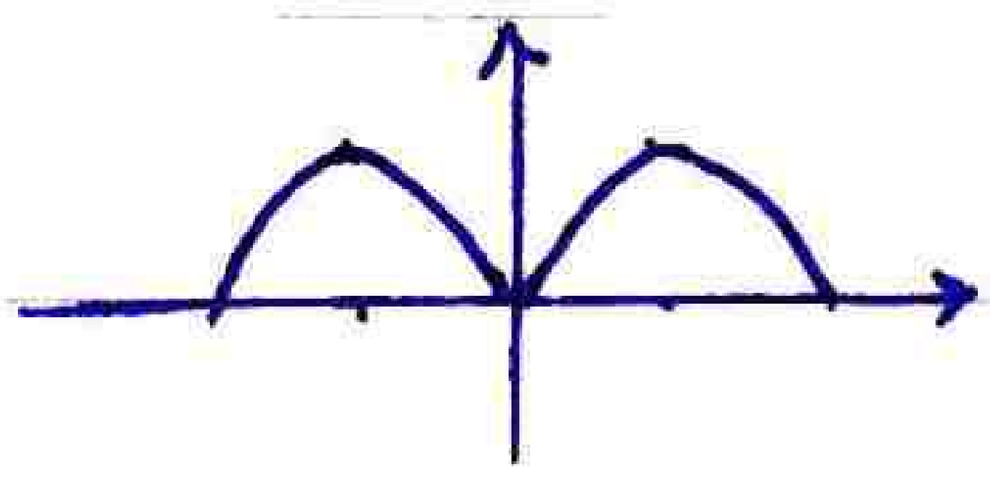


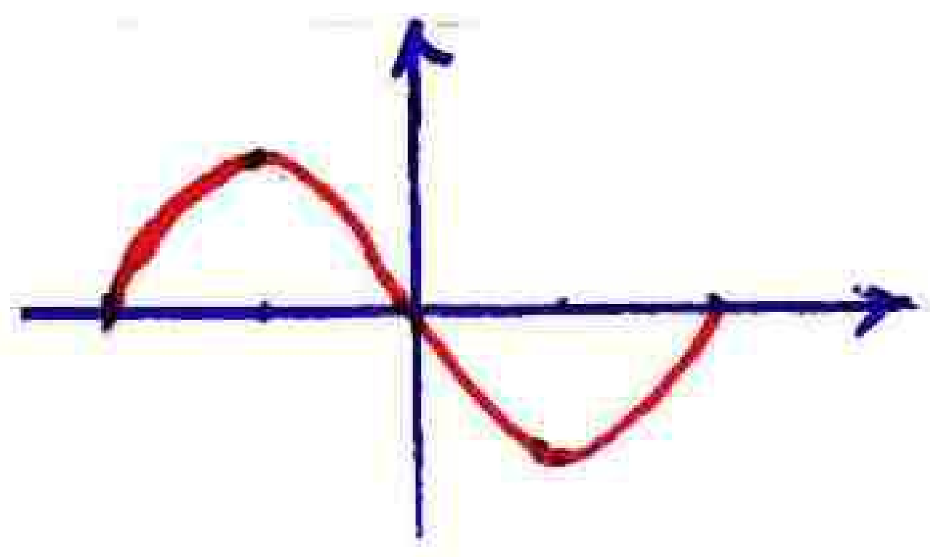
حال در جاهایی که نمودار زیر محور x هاست، آن را به صورت آینه وار در بالای محور x ها رسم می کنیم.





مثال: درصورتی که نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبرو باشد، نمودار توابع $y=|f(x)|$ و $y=-f(x)$ را رسم کنید.

نمودار تابع $y=|f(x)|$ به صورت  می باشد.



برای رسم نمودار $y=-f(x)$ باید قرینه‌ی نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کرد، یعنی قسمت هایی که زیر محور x ها باشند آینه وار بالا آمده و قسمت هایی که بالای محور x ها هستند آینه وار پایین می روند.

نکته (۶) با فرض نامنفی بودن a داریم: $|x| = a \iff x = \pm a$

همچنین: $|x| = |y| \iff x = \pm y$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|۲x-۳| = ۷$

$۲x-۳ = ۷ \Rightarrow x = ۵$

$۲x-۳ = -۷ \Rightarrow x = -۲$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= \{-۲,۵\}$

ب) $|۳x-۲| = |x-۴|$

$۳x-۲ = x-۴ \Rightarrow ۲x = -۲ \Rightarrow x = -۱$

$۳x-۲ = -x+۴ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= \{\frac{۳}{۲}, -۱\}$

پ) $|x-۱| = ۶-۲x$

واضح است که باید $۶-۲x$ نامنفی باشد: $۶-۲x \geq ۰ \rightarrow \boxed{x \leq ۳}$

$x-۱ = ۶-۲x \Rightarrow ۳x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۳}$ جواب

$x-۱ = -۶+۲x \Rightarrow x = ۵ \xrightarrow{x \leq ۳}$ غیرقابل قبول

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= \{\frac{۷}{۳}\}$

ت) $\frac{2-x}{|x-3|}=1$

بافرض $x\neq 3$ طرفین را در مخرج کسر ضرب می کنیم:

$2-x=|x-3| \longrightarrow 2-x\geqslant 0 \Rightarrow \boxed{x\leqslant 2}$

$2-x=x-3 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \xrightarrow{x\leqslant 2}$ غ ق ق

$-2+x=x-3 \Rightarrow -2=-3 \longrightarrow$ غیرممکن است

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\varnothing$

ث) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2}=2x+1 \Rightarrow |x-1|=2x+1 \longrightarrow 2x+1\geqslant 0 \Rightarrow \boxed{x\geqslant -\frac{1}{2}}$

$x-1=2x+1 \Rightarrow x=-2 \xrightarrow{x\geqslant -\frac{1}{2}}$ غ ق ق

$x-1=-2x-1 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$ جواب

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{0\}$

توجه: در حل معادلات قدرمطلق دار، گاهی مواقع ساده‌تر آن است که طرفین را به توان ۲ برسانیم.

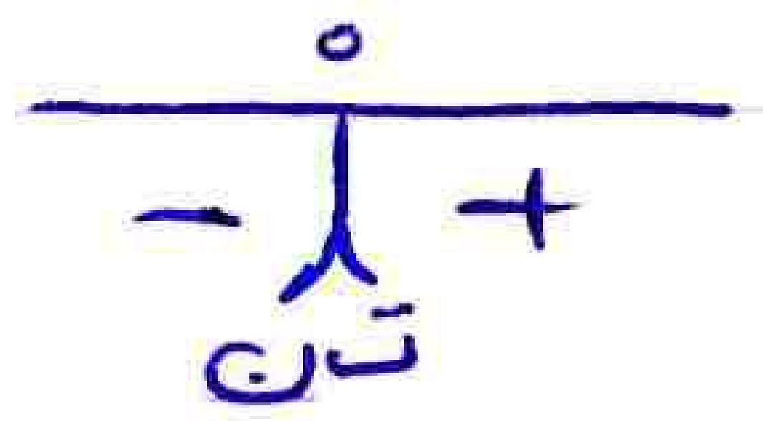
مثال: $|x-2|=|3-x|$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-4x+4=9-6x+x^2 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

توجه: گاهی مواقع برای حل معادله راحت‌تر آن است که به کمک تعیین علامت، معادله را از فرم قدرمطلق خارج کنیم.

مثال: $x-\frac{x}{|x|}=3$

0



$\xrightarrow{x<0} x-\frac{x}{-x}=3 \Rightarrow x+1=3 \Rightarrow x=2 \xrightarrow{x<0}$ غ ق ق

$\xrightarrow{x>0} x-\frac{x}{x}=3 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$ جواب

مثال: $|x-1|+|x|=2$

$\swarrow 1 \qquad \swarrow 0$

		0		1	
$x-1$	−		−	0	+
x	−	0	+		+

$x<0 \longrightarrow -x+1-x=2 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$ جواب

$0\leq x\leq 1 \longrightarrow -x+1+x=2 \rightarrow 1=2$ غیرممکن

$x>1 \longrightarrow x-1+x=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ جواب

مجموعه جواب $=\left\{\frac{-1}{2}\right.$ و $\left.\frac{3}{2}\right\}$

تمرین: معادله ی $||x|-5|=7$ را حل کنید.

$||x|-5|=7$

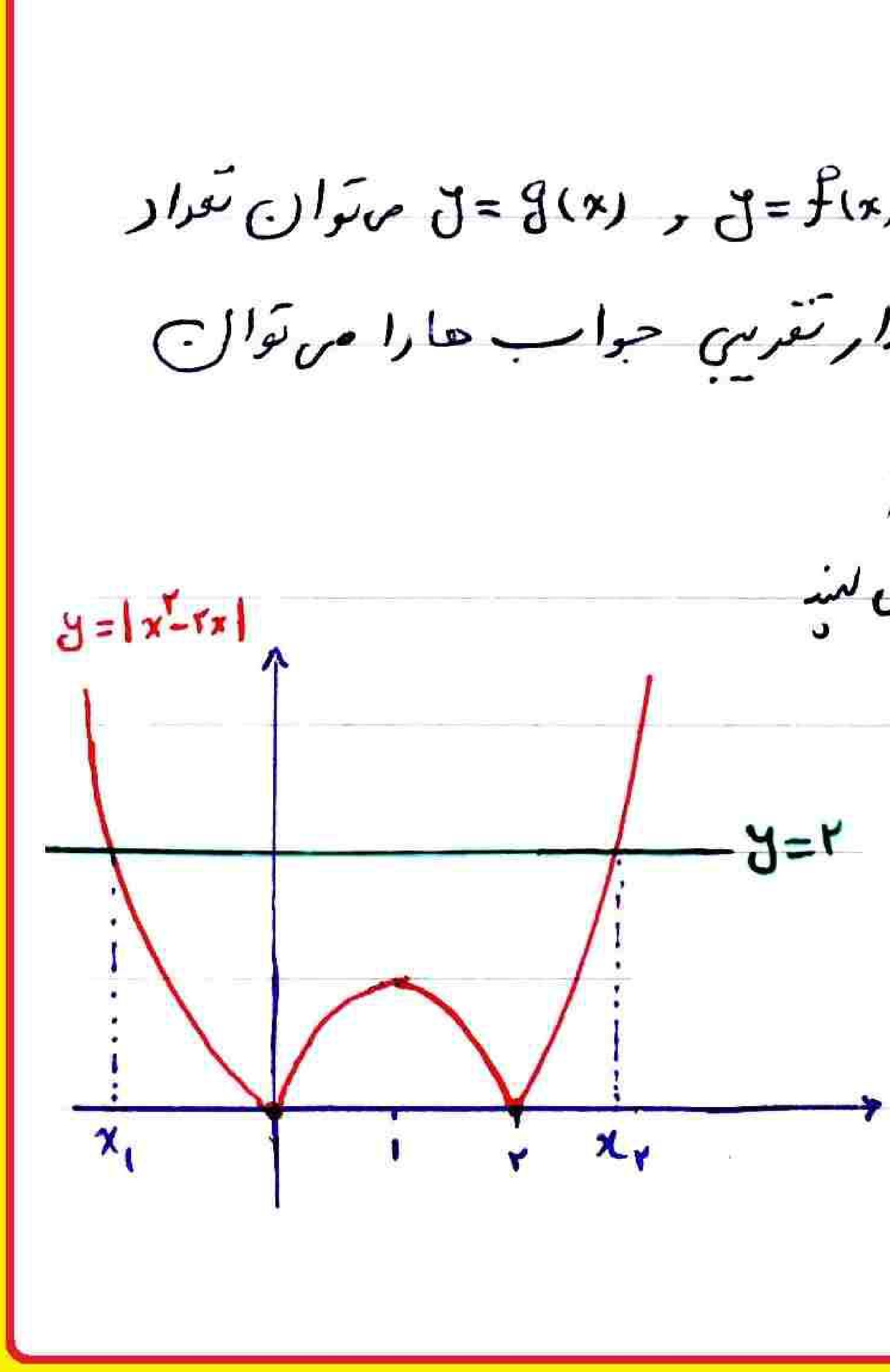
$|x|-5=7 \Rightarrow |x|=12 \Rightarrow x=\pm 12$

$|x|-5=-7 \Rightarrow |x|=-2$ غیرممکن

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{\pm 12\}$

توضیح: (روش هندسی) با استفاده از رسم نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ می‌توان تعداد جواب های معادله ی $f(x)=g(x)$ و مقدار تقریبی جواب ها را می‌توان تعیین کرد.

مثال: به روش هندسی معادله ی $|x^2-2x|=2$ را حل کنید.

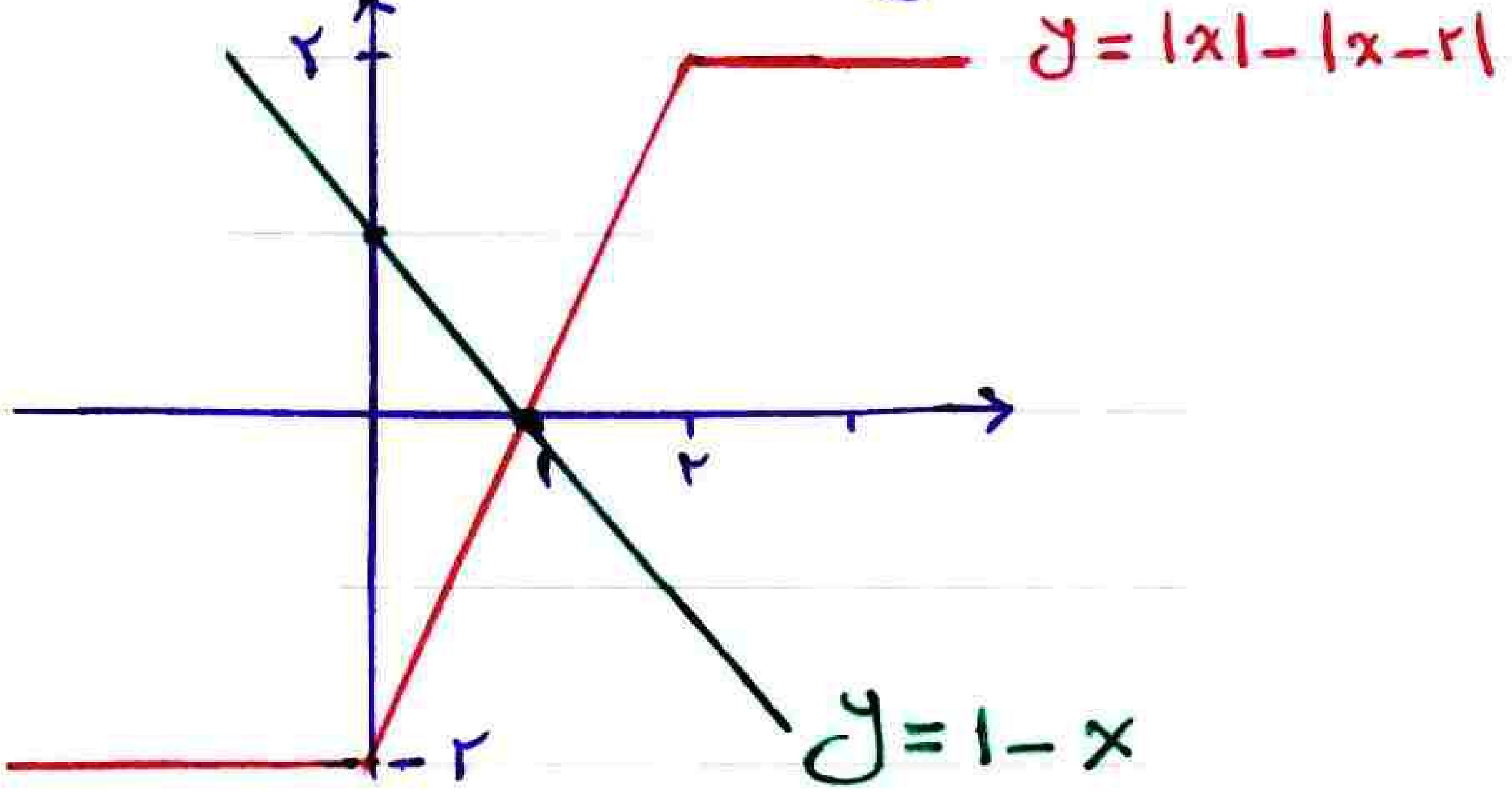


نمودار دو تابع $y=|x^2-2x|$ و $y=2$ را رسم می کنیم.

معادله دارای دو جواب x_1 و x_2 است که یکی از آنها منفی و دیگری بیشتر از ۲ است.

مثال : معادله‌ی $|x|-|x-2|=1-x$ را به دو روش هندسی و جبری حل کنید.

روش هندسی : نمودار دو تابع $y=|x|-|x-2|$ و $y=1-x$ را رسم می‌کنیم.



معادله دارای جواب حقیقی $x=1$ است.

روش جبری :

		۰		۲	
x	−	0	+	┆	+
$x-2$	−	┆	−	0	+

$$|x|-|x-2|=1-x$$
$$\underset{0}{\downarrow} \qquad \underset{2}{\downarrow}$$

اگر $x<0 \Rightarrow -x+x-2=1-x \Rightarrow x=3 \xrightarrow{x<0}$ غ ق ق

اگر $0\leqslant x\leqslant 2 \Rightarrow x+x-2=1-x \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$ جواب

اگر $x>2 \Rightarrow x-x+2=1-x \Rightarrow x=-1 \xrightarrow{x>2}$ غ ق ق

معادله دارای جواب $x=1$ است.

نکته (۷) حل نامعادلات قدر مطلقی :

حالت اول : $|u|<\overset{\text{مثبت}}{\overset{\uparrow}{a}} \Rightarrow -a<u<a$

مثال : $|2x-1|\leqslant 3$

$$\Rightarrow -3\leqslant 2x-1\leqslant 3 \xrightarrow{+1} -2\leqslant 2x\leqslant 4 \xrightarrow{\div 2} -1\leqslant x\leqslant 2$$

مجموعه جواب $= [-1, 2]$

حالت دوم : $|U| > \overset{\text{مثبت}}{a} \Rightarrow U > a$ یا $U < -a$

مثال : $|۳x+۲| \geqslant ۱$

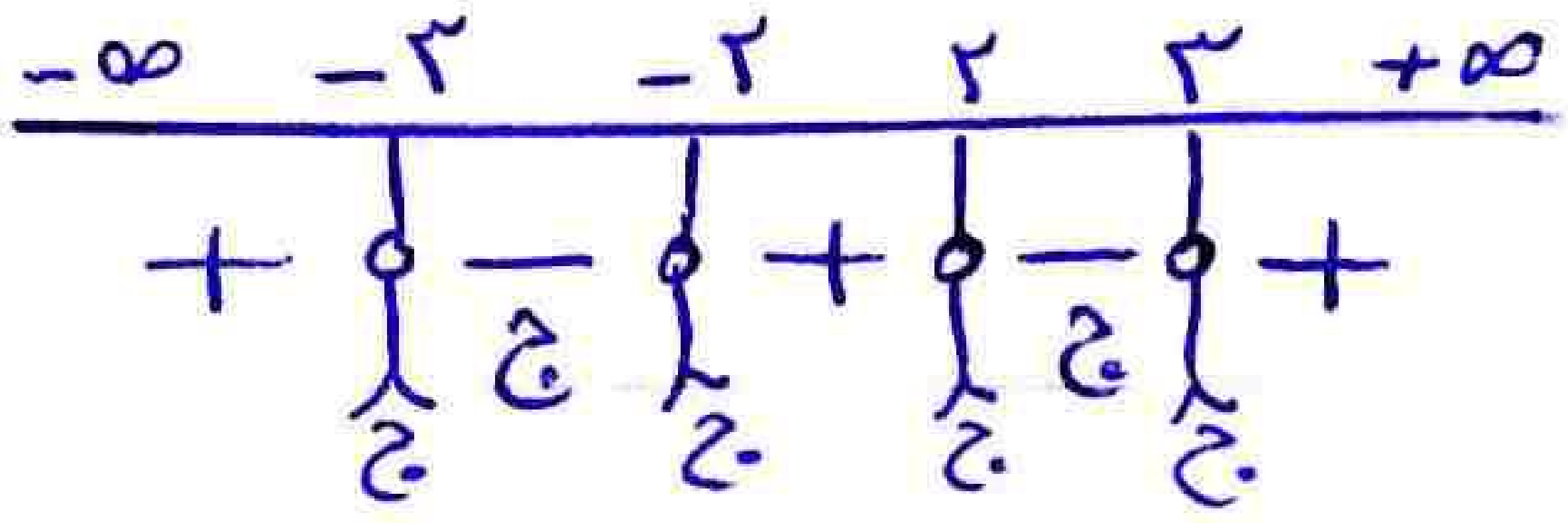
$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} ۳x+۲ \geqslant ۱ \Rightarrow ۳x \geqslant -۱ \Rightarrow x \geqslant \frac{-۱}{۳} \\ ۳x+۲ \leqslant -۱ \Rightarrow ۳x \leqslant -۳ \Rightarrow x \leqslant -۱ \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty , -۱] \cup [\frac{-۱}{۳} , +\infty)$

حالت سوم : $|U| \underset{\text{یا } <}{>} |V| \Rightarrow (U+V)(U-V) \underset{\text{یا } <}{>} ۰$

مثال : $|x^۲-۶| \leqslant |x|$

$\Rightarrow (x^۲+x-۶)(x^۲-x-۶) \leqslant ۰$



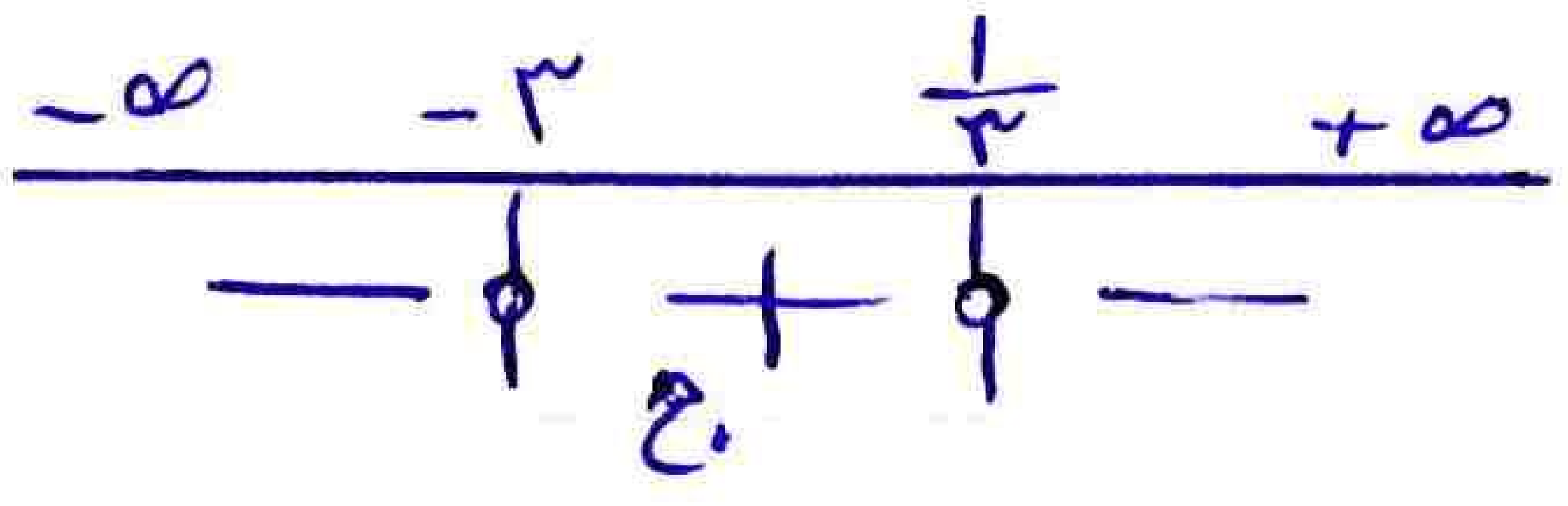
$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-۳ , -۲] \cup [۲ , ۳]$

مثال : $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right| > ۱$

با درنظر گرفتن $x \neq \frac{-۱}{۲}$ ، طرفین را در مخرج ضرب می‌کنیم

$\Rightarrow |x-۲| > |۲x+۱|$

$\Rightarrow (۳x-۱)(-x-۳) > ۰$



$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-۳ , \frac{۱}{۳}) - \{\frac{-۱}{۲}\}$

حالت چهارم : نامعادلاتی که فرم کلاسیک نداشته باشند (یعنی هیچ یک از سه حالت فوق نباشند)

در این حالت با استفاده از تعیین علامت یا به توان رساندن دو طرف

یا تغییر متغیر ، به حل آنها می پردازیم.

مثال: $|x| + |۱-x| \leq ۵$

$\swarrow$ ۰ $\quad \swarrow$ ۱

		۰		۱	
x	−	۰	+	⋮	+
$x-۱$	+	⋮	+	۰	−

اگر $x < ۰ : -x + ۱ - x \leq ۵ \Rightarrow -۲x \leq ۴ \Rightarrow x \geq -۲ \xrightarrow{\cap\{x<۰\}} -۲ \leq x < ۰$

اگر $۰ \leq x \leq ۱ : x + ۱ - x \leq ۵ \Rightarrow ۱ \leq ۵$ همیشه درست $\xrightarrow{\cap\{۰\leq x\leq ۱\}} ۰ \leq x \leq ۱$

اگر $x > ۱ : x - ۱ + x \leq ۵ \Rightarrow ۲x \leq ۶ \Rightarrow x \leq ۳ \xrightarrow{\cap\{x>۱\}} ۱ < x \leq ۳$

اجتماع تمام جواب ها، مجموعه جواب است. بنابراین:

مجموعه جواب $= [-۲, ۳]$

مثال: $|x-۲| \leq \sqrt{x}$

با توجه به $\sqrt{x}$ ، نتیجه می گیریم که $x \geq ۰$ است.

$\xrightarrow{\text{توان } ۲} x^۲ - ۴x + ۴ \leq x \Longrightarrow x^۲ - ۵x + ۴ \leq ۰$

$-\infty$		۱		۴		$+\infty$
	+	۰	−	۰	+	

$\Longrightarrow ۱ \leq x \leq ۴ \xrightarrow{\cap\{x\geq ۰\}}$ مجموعه جواب $= [۱, ۴]$

مثال: $(x-۱)^۲ + |x-۱| \leq ۲$

با فرض $|x-۱| = t$ می توان نامعادله را به صورت زیر نوشت:

$t^۲ + t - ۲ \leq ۰$

$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
	+	۰	−	۰	+	

$\Longrightarrow -۲ \leq t \leq ۱ \Longrightarrow -۲ \leq |x-۱| \leq ۱ \Longrightarrow |x-۱| \leq ۱$

$\Longrightarrow -۱ \leq x-۱ \leq ۱ \xrightarrow{+۱} ۰ \leq x \leq ۲$

مجموعه جواب $= [۰, ۲]$

نکته (۸) نامساوی مثلثی :

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم : $|a+b| \leq |a|+|b|$

این نامساوی طی دو مرحله اثبات می‌شود:

اولاً نشان می‌دهیم برای هر عدد حقیقی x داریم $-|x| \leq x \leq |x|$:

می‌دانیم : $|x| \leq |x| \xrightarrow{\text{حالت اول نکته ی (۷)}} -|x| \leq x \leq |x|$

ثانیاً می‌توان برای هر دو عدد حقیقی a و b نوشت :

$$-|a| \leq a \leq |a| \xrightarrow{+} -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

$$-|b| \leq b \leq |b| \xrightarrow{\text{حالت اول نکته ی (۷)}} |a+b| \leq |a|+|b|$$

مثال : کمترین مقدار عبارت $|x-2|+|5-x|$ را بدست آورید.

طبق نامساوی مثلثی می‌توان نوشت :

$$|(x-2)+(5-x)| \leq |x-2|+|5-x| \Rightarrow 3 \leq |x-2|+|5-x|$$

پس کمترین مقدار عبارت فوق، برابر ۳ است.

تمرین (۱) اگر فاصله‌ی x تا عدد ۱- روی محور افقی برابر ۵ باشد، کمترین فاصله‌ی x از مبدأ چقدر است؟

$$\begin{tikzcd} {|x-(-1)|=5 \Rightarrow |x+1|=5} \arrow[r] \arrow[dr] & {x+1=5 \Rightarrow x=4 \Rightarrow |x|=4} \\ & {x+1=-5 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow |x|=6} \end{tikzcd}$$

فاصله‌ی x از مبدأ $|x-0|=|x|$ است که کمترین فاصله $|x|=4$ می‌باشد.

تمرین (۲) اگر $b<0<a$ باشد، حاصل $|a-b|+|a+1|-|1-b|$ را بدست آورید.

با توجه به فرض مسئله، a مثبت و b منفی است بنابراین: $1-b>0$ و $a+1>0$ و $a-b>0$

$\Rightarrow$ عبارت $= a-b+a+1-1+b = 2a$

تمرین (۳) به ازای چه مقادیری از x ، فاصله‌ی بین x و ۳- بزرگتر از ۲ است؟

$$|x-(-۳)|>۲ \Rightarrow |x+۳|>۲ \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x+۳>۲ \Rightarrow x>-۱ \\ x+۳<-۲ \Rightarrow x<-۵ \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-\infty,-۵)\cup(-۱,+\infty)$

تمرین (۴) بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

$$|x+۱|+|x-۳|=۶$$

		-۱		۳	
$x+۱$	−	○	+		+
$x-۳$	−		−	○	+

اگر $x<-۱$: $-x-۱-x+۳=۶ \Rightarrow -۲x=۴ \Rightarrow x=-۲ \xrightarrow{x<-۱}$ جواب

اگر $-۱\leq x\leq ۳$: $x+۱-x+۳=۶ \Rightarrow ۴=۶$ غیرممکن

اگر $x>۳$: $x+۱+x-۳=۶ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴ \xrightarrow{x>۳}$ جواب

آن نقاط ۲- و ۴ می‌باشند.

تمرین (۵) جاهای خالی را با عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

الف) اگر $۱\geq x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $y=|x-۳|+|x-۱|$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است با $-۲x+۴$......

$$y=-x+۳-x+۱=-۲x+۴$$

ب) اگر $۲>x>۰$ باشد جواب معادله‌ی $۴|x-۳|+۲|x|=۱۱$ برابر است با ..$\frac{۱}{۲}$..

معادله $\xrightarrow{۰<x<۲} ۴(-x+۳)+۲x=۱۱$

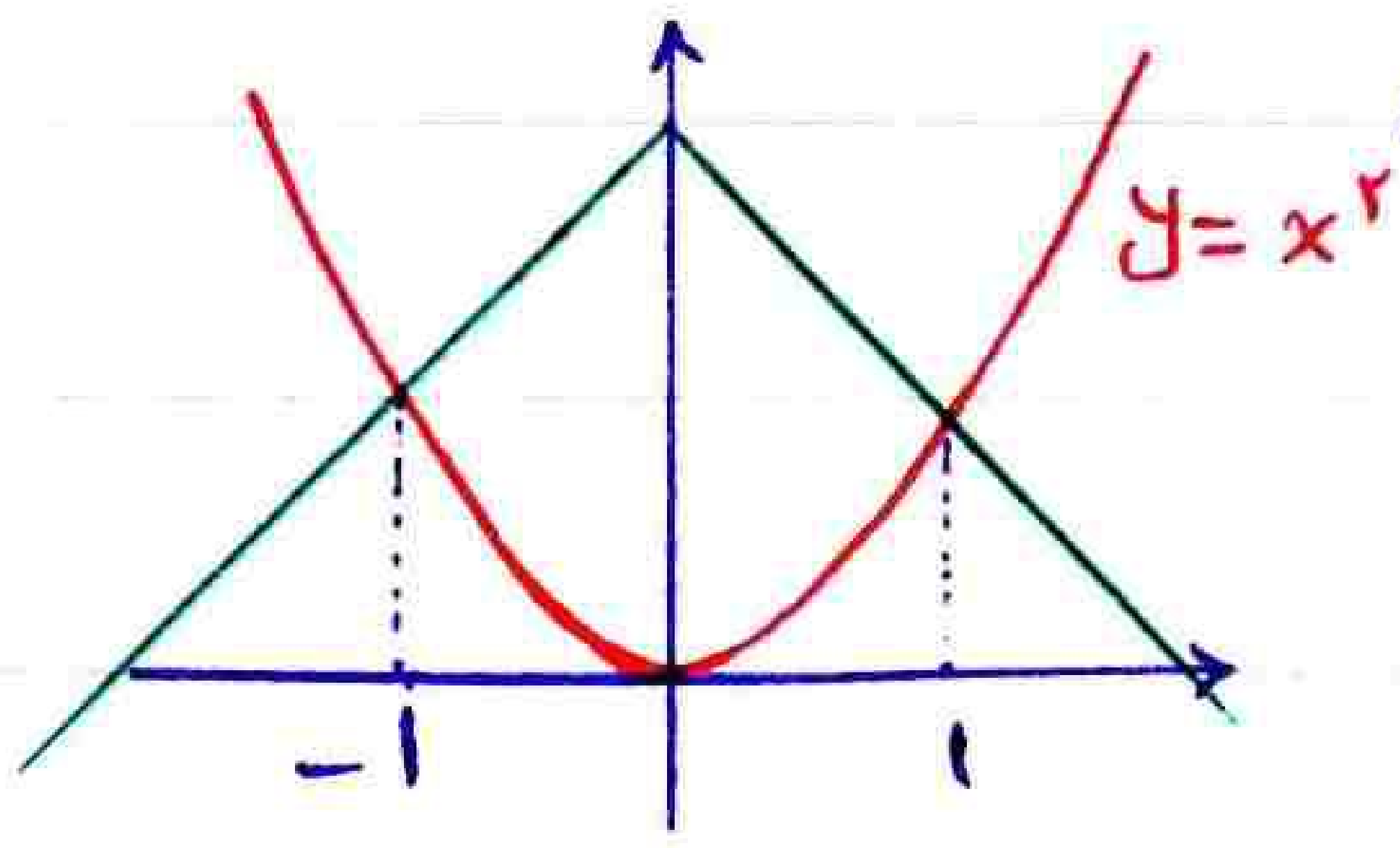
$$\Rightarrow -۴x+۱۲+۲x=۱۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

تمرین (۶) معادلۀ $x^۲+|x|=۲$ را به دو روش هندسی و جبری حل کنید.

روش هندسی:

$$x^۲=۲-|x| \longrightarrow y=x^۲$$

$$\searrow y=۲-|x|$$

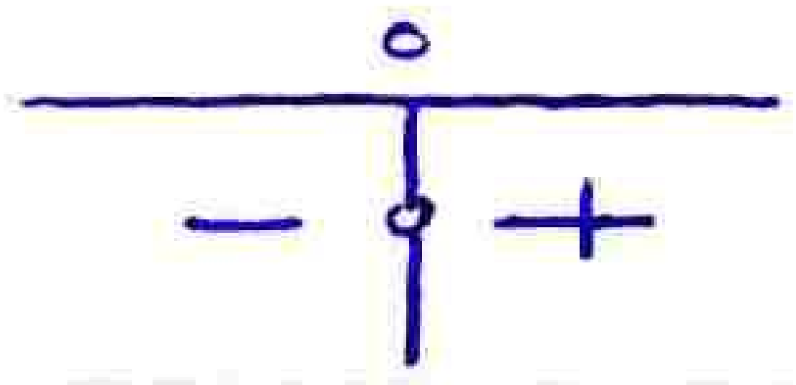


معادله دارای دو جواب $x=۱$ و $x=-۱$ است.

روش جبری: در این مورد دو روش بیان می‌کنم:

① استفاده از تعیین علامت:

$$x^۲+|x|=۲$$
$$\downarrow$$
$$۰$$



اگر $x<۰$: $x^۲-x=۲ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \longrightarrow x=-۱ \xrightarrow{x<۰}$ جواب

$\searrow x=۲ \xrightarrow{x<۰}$ غ ق ق

اگر $x\geq ۰$: $x^۲+x=۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \longrightarrow x=-۲ \xrightarrow{x\geq۰}$ غ ق ق

$\searrow x=۱ \xrightarrow{x\geq۰}$ جواب

② استفاده از تغییر متغیر:

بگیریم $|x|=t$ باشد پس معادله به صورت زیر خواهد شد:

$t^۲+t=۲ \Rightarrow t^۲+t-۲=۰ \longrightarrow t=-۲ \Rightarrow |x|=-۲$ غیرممکن

$\searrow t=۱ \Rightarrow |x|=۱ \Rightarrow x=\pm۱$

تمرین (۷) برای هر سه عدد حقیقی دلخواه a، b و c ثابت کنید: $|a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|$

$$\left.\begin{array}{l}-|a|\leq a\leq|a|\\-|b|\leq b\leq|b|\\-|c|\leq c\leq|c|\end{array}\right) \xrightarrow{+} -|a|-|b|-|c|\leq a+b+c\leq|a|+|b|+|c|$$

$$\Longrightarrow |a+b+c|\leq|a|+|b|+|c|$$