حسابان ۱

پایه ی یازدهم « رشته ی ریاضی فیزیک »

فصل ۳ : توابع نمایی و لگاریتمی

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

مهر ۱۴۰۱

درس اوّل : تعمیم توان رسانی

آشنایی با مفهوم تابع نمایی به عنوان یکی از انواع توابع در ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و از جمله شدت زلزله، شدت صدا، قدمت یک شیء و ... لازم و ضروری است. در اینجا ضمن یادآوری آن موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری قوانین توان رسانی و ریشه گیری

در سال های قبل ، با توان های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی و قوانین آنها آشنا شده اید. در اینجا چند رابطه در مورد توان و ریشه گیری را جهت یادآوری معرفی می کنیم.

۱ : توان صفر

$$\begin{cases} a^{0} = 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

مثال: $5^{0} = 1$

❋❋❋

۲ : توان یک

$$a^{1} = a$$

مثال: $5^{1} = 5$

❋❋❋

۳ : توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

مثال: $5^{-3} = \dfrac{1}{5^{3}}$

نتیجه :

$$(\frac{a}{b})^{n} = (\frac{b}{a})^{-n} \quad ; \quad a \neq 0$$

مثلاً : $(\frac{3}{5})^{2} = (\frac{5}{3})^{-2}$

❋❋❋

۴ : توان کسری

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

اگر n زوج باشد، باید $a \geq ۰$ باشد.

مثال: $۵^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^۲}$

***

۵ : توان توان

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

مثال: $(۵^۳)^۲ = ۵^{۳\times۲} = ۵^۶$

***

۶ : ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال: $۵^۷ \times ۵^۲ = ۵^{۷+۲} = ۵^۹$

***

۷ : ضرب اعداد تواندار با توان های مساوی

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: $۵^۷ \times ۶^۷ = ۳۰^۷$

***

۸ : تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

مثال: $۵^۷ \div ۵^۳ = ۵^{۷-۳} = ۵^۴$

***

۹ : تقسیم اعداد تواندار با توان های مساوی

$$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$$

مثال: $۱۵^۷ \div ۵^۷ = ۳^۷$

***

۱۰ : هرگاه دو عدد توان‌دار مساوی،پایه های مساوی داشته باشند، توان های آنها نیز مساویند.

$$\begin{cases} a^m = a^n \to m = n \\ a \neq ۰,۱,-۱ \end{cases}$$

مثال: $۵^x = ۵^۳ \to x = ۳$

***

تمرین ۱ : در تساوی های مقابل مقدار x را حساب کنید.

الف) $۲^x = ۳۲$

ب) $۳^x \times ۳^۴ = ۲۴۳$

ج) $۹^x = ۲۷$

د) $۳^{x-۱} = \frac{۱}{۸۱}$

حل:

الف) $۲^x = ۳۲ \to ۲^x = ۲^۵ \to x = ۵$

ب) $۳^x \times ۳^۴ = ۲۴۳ \to ۳^{x+۴} = ۳^۵ \to x + ۴ = ۵ \to x = ۱$

ج) $۹^x = ۲۷ \to (۳^۲)^x = ۳^۳ \to ۳^{۲x} = ۳^۳ \to ۲x = ۳ \to x = \frac{۳}{۲}$

د) $۳^{x-۱} = \frac{۱}{۸۱} \to ۳^{x-۱} = \frac{۱}{۳^۴} \to ۳^{x-۱} = ۳^{-۴} \to x - ۱ = -۴ \to x = -۴ + ۱ = -۳$

تمرین برای حل :

۲ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳} = ۸۱$

ب) $۴^{۲x-۱} = ۸^{x+۱}$

پ) $۵^{۳n-۱} = ۱۲۵^{۲n+۱}$

ت) $۲^{۳n-۲} = \frac{۱}{۳۲}$

ث) $۹^x = ۳^{x^۲ - ۴x}$

ج) $۹^{۳y-۳} = ۲۷^{y+۱}$

ح) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱} = \frac{۲۵}{۹}$

خ) $۴^{۳x+۲} = \frac{۱}{۶۴^۳}$

د) $(\frac{۴}{۴۹})^x = (۳ + \frac{۱}{۲})^{۶+x}$

***

قسمت دوّم : تعمیم قوانین توان رسانی

قوانین توان رسانی برای توان های حقیقی نیز برقرارند. اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یـک و y و x دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم.

۱) $a^{\circ}=۱$

۲) $a^{۱}=a$

۳) $۱^{x}=۱$

۴) $a^{-x}=\frac{۱}{a^{x}}$

۵) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

۶) $a^{x}\times a^{y}=a^{x+y}$

۷) $\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$

۸) $a^{x}\times b^{x}=(ab)^{x}$

۹) $\frac{a^{x}}{b^{x}}=(\frac{a}{b})^{x}$

۱۰) $a^{x}=a^{y}\rightarrow x=y$

تمرین۳ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}$$

حل :

$$((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}=(\sqrt{۲})^{\sqrt{۳۶}}=(\sqrt{۲})^{۶}=۲^{۳}=۸$$

تمرین۴ : حاصل عبارت $\frac{۴^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}}\times ۸^{\sqrt{۳}}}$ را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل :

$$\frac{۴^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}}\times ۸^{\sqrt{۳}}}=\frac{۲^{۲\sqrt{۳}}\times ۲^{۵\sqrt{۳}}}{۲^{۲\sqrt{۳}}\times ۲^{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۲^{۷\sqrt{۳}}}{۲^{۵\sqrt{۳}}}=۲^{۲\sqrt{۳}}$$

تمرین۵ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$۱)\ ((\sqrt{۱۰})^{۲-\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}} =$

$۲)\ ((\sqrt[۳]{۵})^{۳-\sqrt{۳}})^{۳+\sqrt{۳}} =$

$۳)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} =$

$۴)\ (۲-\sqrt[۳]{۷})^{\pi}(۴+۲\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۴۹})^{\pi} =$

تمرین۶ : مقدار x را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵$$

حل :

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵ \to x^{\sqrt{۲}}=۴ \to (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=(۴)^{\sqrt{۲}} \to x^{۲}=۲^{۲\sqrt{۲}} \to x=۲^{\sqrt{۲}}$$

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : لگاریتم و معادلات لگاریتمی

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی(تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷) مفهوم لگاریتم را پایه گذاری کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و به عنوان بزرگترین پیشرفت علم حساب در قرن های ۱۶ و ۱۷ محسوب می شود. در این درس مفهوم لگاریتم را معرفی می کنیم و با خواص آن آشنا می شویم.

قسمت اوّل : مفهوم لگاریتم

لگاریتم عدد مثبت b در مبنای عدد مثبت و مخالف یک a ، عددی مانند x است که اگر a به توان x برسد، حاصل برابر b می شود.

$$\log_a^b = x \leftrightarrow a^x = b$$

$$\begin{cases} a,b > ۰ \\ a \neq ۱ \end{cases}$$

برای مثال: $$۲^۳ = ۸ \to \log_۲^۸ = ۳$$

((نماد $\log_a^b$ را بخوانید، لگاریتم b در مبنای a))

تمرین ۱ : تساوی های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

الف) $۷^۳ = ۳۴۳$ ب) $۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$ ج) $\sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

حل:

الف) $۷^۳ = ۳۴۳ \to \log_۷^{۳۴۳} = ۳$

ب) $۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} \to \log_۲^{\frac{۱}{۸}} = -۳$

ج) $\sqrt[۳]{۶۴} = ۴ \to ۶۴^{\frac{۱}{۳}} = ۴ \to \log_{۶۴}^{۴} = \frac{۱}{۳}$

تمرین ۲ : تساوی های زیر را به صورت توانی بنویسید.

الف) $\log_۲^{۶۴} = ۶$ ب) $\log_۲^{\sqrt{۸}} = \frac{۳}{۲}$ ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۶۴}=۶\rightarrow ۲^{۶}=۶۴$

ب) $\log_{۲}^{\sqrt{۸}}=\frac{۳}{۲}\rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{۸}$

ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}=-۳\rightarrow ۱۰^{-۳}=۰/۰۰۱$

تمرین۳ : در هر مورد مقدار x را پیدا کنید.

الف) $\log_{۳}^{۸۱}=x$ ب) $\log_{۲}^{x}=۳$ ج) $\log_{x}^{۶۴}=۲$

حل:

الف) $\log_{۳}^{۸۱}=x\rightarrow ۳^{x}=۸۱\rightarrow ۳^{x}=۳^{۴}\rightarrow x=۴$

ب) $\log_{۲}^{x}=۳\rightarrow ۲^{۳}=x\rightarrow x=۸$

ج) $\log_{x}^{۶۴}=۲\rightarrow x^{۲}=۶۴\rightarrow x=\sqrt{۶۴}\rightarrow x=۸$

تمرین۴ : مقدار x را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_{۷}^{۴۹}=۲x-۱$$

حل:

$$\log_{۷}^{۴۹}=۲x-۱\rightarrow ۷^{۲x-۱}=۴۹\rightarrow ۷^{۲x-۱}=۷^{۲}\rightarrow ۲x-۱=۲\rightarrow ۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

تمرین۵ : لگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶}$ ج) $\log_{۷}^{۷}$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶}$ د) $\log_{۳}^{۱}$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶}=x\rightarrow ۲^{x}=۲۵۶\rightarrow ۲^{x}=۲^{۸}\rightarrow x=۸$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶}=y\rightarrow ۴^{y}=۲۵۶\rightarrow ۴^{y}=۴^{۴}\rightarrow y=۴$

ج) $\log_{۷}^{۷} = z \rightarrow ۷^z = ۷ \rightarrow ۷^z = ۷^۱ \rightarrow z = ۱$

د) $\log_{۳}^{۱} = t \rightarrow ۳^t = ۱ \rightarrow ۳^t = ۳^۰ \rightarrow t = ۰$

نتیجه:

۱ : لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است.

$$\begin{cases} \log_a^a = ۱ \\ a > ۰ , a \neq ۱ \end{cases}$$

۲ : لگاریتم یک در هر مبنای مثبت و مخالف یک صفر است.

$$\begin{cases} \log_a^۱ = ۰ \\ a > ۰ , a \neq ۱ \end{cases}$$

تمرین۶ : نشان دهید که تساوی زیر درست است.

$$\log_۶^۴ + \log_۶^۹ = ۲$$

حل: قرار می دهیم $\log_۶^۴ = x$ و $\log_۶^۹ = y$ و نشان می دهیم که $x + y = ۲$

$$\left.\begin{array}{l} \log_۶^۴ = x \rightarrow ۶^x = ۴ \\ \log_۶^۹ = y \rightarrow ۶^y = ۹ \end{array}\right\} \rightarrow ۶^x \times ۶^y = ۴ \times ۹ \rightarrow ۶^{x+y} = ۳۶$$

$$\rightarrow ۶^{x+y} = ۶^۲ \rightarrow x + y = ۲$$

***

تذکر ۱ : لگاریتم صفر نامعین است.

$$\log_a^۰ = \text{نامعین}$$

تذکر ۲ : لگاریتم، روی اعداد منفی ، تعریف نمی شود.

تذکر ۳ : اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را **لگاریتم اعشاری** می نامند. معمولاً در لگاریتم اعشاری مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log_{۱۰}^a = \log a$$

تذکر ۴ : یکی از اعداد گنگ که کاربرد های زیادی در صنعت و اقتصاد و بازرگانی دارد، عددی معروف به عدد نپرین می باشد. این عدد به افتخار لئونارد اویلر را با e نمایش می دهند و مقدار تقریبی آن تا دو رقم اعشار ۲/۷۱ می باشد.

اگر مبنای لگاریتم عدد نپرین باشد، لگاریتم را **لگاریتم طبیعی** می نامند. معمولاً مبنای e نوشته نمی شود.

حال به دلیل اینکه این لگاریتم با لگاریتم اعشاری اشتباه نشود، $\log$ را به صورت L_n می نویسند.

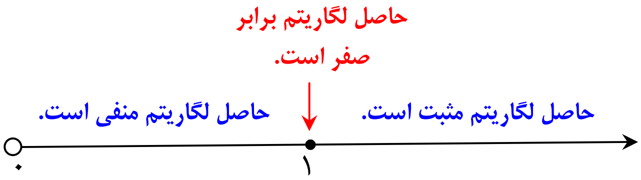
$$\log_e^a = L_n\, a$$

واضح است که :

$$L_n\, e = \log_e^e = ۱$$
$$L_n\, ۱ = \log_e^۱ = ۰$$

تذکر ۵ : ماشین های حساب ، فقط لگاریتم اعشاری و لگاریتم طبیعی را محاسبه می کنند. برای محاسبه‌ی لگاریتم در مبناهای دیگر به کمک ماشین حساب می توان از فرمولی به نام فرمول تغییر مبنا استفاده نمود. این فرمول در ادامه، گفته می شود.

تذکر ۶ : لگاریتم اعداد مثبت کمتر از یک، منفی است. لگاریتم یک برابر صفر و لگاریتم اعداد بزرگتر از یک ، مثبت است.



***

قسمت دوّم : روابط لگاریتمی

با توجه به تعریف لگاریتم ، روابط زیر را به راحتی می توان بیان کرد.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

برای مثال :

$$\log_۷^۳ + \log_۷^۵ = \log_۷^{۳\times۵} = \log_۷^{۱۵}$$

این رابطه برای مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز برقرار است.

$$\log_{x}^{a}+\log_{x}^{b}+\log_{x}^{c}=\log_{x}^{abc}$$

برای مثال:

$$\log_{۱۰۰}^{۲}+\log_{۱۰۰}^{۵}+\log_{۱۰۰}^{۱۰}=\log_{۱۰۰}^{۲\times ۵\times ۱۰}=\log_{۱۰۰}^{۱۰۰}=۱$$

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_{x}^{a}-\log_{x}^{b}=\log_{x}^{\frac{a}{b}}$$

مثال :

$$\log_{۷}^{۲۰}-\log_{۷}^{۵}=\log_{۷}^{۲۰\div ۵}=\log_{۷}^{۴}$$

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_{x}^{a^{n}}=n\log_{x}^{a}$$

مثال :

$$\log_{۲}^{۳۲}=\log_{۲}^{۲^{۵}}=۵\log_{۲}^{۲}=۵\times ۱=۵$$

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^{m}}^{a}=\frac{۱}{m}\log_{x}^{a}$$

مثال :

$$\log_{۸۱}^{۳}=\log_{۳^{۴}}^{۳}=\frac{۱}{۴}\log_{۳}^{۳}=\frac{۱}{۴}$$

نتیجه : ب) $\log_{x}^{a^{n}}=\log_{\sqrt[n]{x}}^{a}$ الف) $\log_{x^{n}}^{a^{n}}=\log_{x}^{a}$

۵ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_{b}^{a}=\frac{\log_{x}^{a}}{\log_{x}^{b}}$$

مثال : فرض کنید که می خواهیم مبنای لگاریتم $\log_{۳}^{۴}$ را به ۵ تبدیل کنیم. در این صورت

$$\log_{۳}^{۴}=\frac{\log_{۵}^{۴}}{\log_{۵}^{۳}}$$

۶: دو لگاریتم مساوی با مبنای برابر

$$\log_{x}^{a}=\log_{x}^{b}\rightarrow a=b$$

مثال :

$$\log_{۳}^{a}=\log_{۳}^{۸}\rightarrow a=۸$$

***

تمرین۷ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log ۵+\log ۲۰$

۲) $\log_{۷}^{۷۰}-\log_{۷}^{۱۰}$

۳) $\log_{۶}^{۴}+\log_{۶}^{۹}$

۴) $۲\log ۵+\log ۴$

۵) $۶\log_{۴}^{۲}-\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴}$

۶) $\log_{۲}^{۸}+\log_{۲}^{۵}-\log_{۲}^{۱۰}$

حل:

۱) $\log ۵+\log ۲۰=\log ۵\times ۲۰=\log ۱۰۰=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$

۲) $\log_{۷}^{۷۰}-\log_{۷}^{۱۰}=\log_{۷}^{۷۰\div ۱۰}=\log_{۷}^{۷}=۱$

۳) $\log_{۶}^{۴}+\log_{۶}^{۹}=\log_{۶}^{۴\times ۹}=\log_{۶}^{۳۶}=\log_{۶}^{۶^{۲}}=۲\log_{۶}^{۶}=۲\times ۱=۲$

۴) $۲\log ۵+\log ۴=\log ۵^{۲}+\log ۴=\log ۲۵+\log ۴=\log ۲۵\times ۴=\log ۱۰۰$

$=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$

۵) $۶\log_{۴}^{۲}-\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴}=\log_{۴}^{۲^{۶}}-\log_{۲^{۲}}^{۶۴}=\log_{۴}^{۶۴}-\log_{۴}^{۶۴}=۰$

۶) $\log_{۲}^{۸}+\log_{۲}^{۵}-\log_{۲}^{۱۰}=\log_{۲}^{(۸\times ۵)\div ۱۰}=\log_{۲}^{۴}=\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲\log_{۲}^{۲}=۲\times ۱=۲$

تمرین۸ : لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

$۱)\ \log_{۷}^{۱۵}-\log_{۷}^{۳}$

$۲)\dfrac{\log ۵}{\log ۲}$

$۳)۵\log a-۲\log b+۳\log c$

$۴)\log a-\log b-\log c+\log d$

$۵)۲\log x-۳\log y-۴\log z$

$۶)\ ۲L_n a+۳L_n b$

حل:

$$۱)\ \log_{۷}^{۱۵}-\log_{۷}^{۳}=\log_{۷}^{۱۵\div ۳}=\log_{۷}^{۵}$$

$$۲)\frac{\log ۵}{\log ۲}=\log_{۲}^{۵}$$

$$۳)۵\log a-۲\log b+۳\log c=\log a^{۵}-\log b^{۲}+\log c^{۳}=\log\frac{a^{۵}c^{۳}}{b^{۲}}$$

$$۴)\log a-\log b-\log c+\log d=\log\frac{ad}{bc}$$

$$۵)۲\log x-۳\log y-۴\log z=\log x^{۲}-\log y^{۳}-\log z^{۴}=\log\frac{x^{۲}}{y^{۳}z^{۴}}$$

$$۶)\ ۲L_n a+۳L_n b=L_n a^{۲}+L_n b^{۳}=L_n a^{۲}b^{۳}$$

تمرین۹ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$۱)\log_{۵}^{۱۲۵}$

$۲)\ \log_{۴}^{۳۲}$

$۳)\ \log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}$

$۴)\ \log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}$

$۵)\ \log ۱۰۰$

$۶)\ \log\sqrt{۱۰۰۰}$

حل:

$$۱)\log_{۵}^{۱۲۵}=\log_{۵}^{۵^{۳}}=۳\log_{۵}^{۵}=۳\times ۱=۳$$

$$۲)\ \log_{۴}^{۳۲}=\log_{۲^{۲}}^{۲^{۵}}=۵\times\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۲}=\frac{۵}{۲}\times ۱=\frac{۵}{۲}$$

$$۳)\ \log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}=\log_{۳}^{\sqrt{۳^{۳}}}=\log_{۳}^{۳^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۳}{۲}\log_{۳}^{۳}=\frac{۳}{۲}\times ۱=\frac{۳}{۲}$$

$$۴)\ \log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}=\log_{\sqrt[۳]{۲^{۲}}}^{۲^{۳}}=\log_{۲^{\frac{۲}{۳}}}^{۲^{۳}}=۳\times\frac{۳}{۲}\log_{۲}^{۲}=\frac{۹}{۲}\times ۱=\frac{۹}{۲}$$

$$۵)\ \log ۱۰۰=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$$

$$۶)\ \log\sqrt{۱۰۰۰}=\log\sqrt{۱۰^{۳}}=\log ۱۰^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\log ۱۰=\frac{۳}{۲}\times ۱=\frac{۳}{۲}$$

تمرین ۱۰: اگر $\log ۲=a$ و $\log ۳=b$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

$۱)\ \log ۸۱$

$۲)\ \log ۳۲$

$۳)\ \log ۶$

$۴)\ \log ۱۲$

$۵)\ \log ۷۲$

$۶)\ \log ۵$

$۷)\ \log ۷۵$

$۸)\ \log_{۲}^{۳}$

$۹)\ \log_{۳}^{۲}$

$۱۰)\ \log_{۸۱}^{۳۲}$

حل:

$$۱)\ \log ۸۱=\log ۳^{۴}=۴\log ۳=۴b$$

$$۲)\ \log ۳۲=\log ۲^{۵}=۵\log ۲=۵a$$

$$۳)\ \log ۶=\log ۲\times ۳=\log ۲+\log ۳=a+b$$

$$۴)\ \log ۱۲=\log ۲^{۲}\times ۳=\log ۲^{۲}+\log ۳=۲\log ۲+\log ۳=۲a+b$$

$$۵)\ \log ۷۲=\log ۲^{۳}\times ۳^{۲}=\log ۲^{۳}+\log ۳^{۲}=۳\log ۲+۲\log ۳=۳a+۲b$$

$$۶)\ \log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-a$$

نتیجه : $\log ۵=۱-\log ۲$

$$۷)\ \log ۷۵=\log ۳\times ۵^{۲}=\log ۳+\log ۵^{۲}=\log ۳+۲\log ۵=b+۲(۱-a)$$

$$=b+۲-۲a$$

$$۸)\ \log_{۲}^{۳}=\frac{\log ۳}{\log ۲}=\frac{b}{a}$$

$$۹)\log_{۳}^{۲}=\frac{\log ۲}{\log ۳}=\frac{a}{b}$$

$$۱۰)\log_{۸۱}^{۳۲}=\log_{۳^{۴}}^{۲^{۵}}=۵\times\frac{۱}{۴}\log_{۳}^{۲}=\frac{۵}{۴}\times\frac{a}{b}=\frac{۵a}{۴b}$$

تمرین ۱۱: اگر $\log ۲=۰/۳۰۱۰$ و $\log ۷=۰/۸۴۵۰$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

$۱)\ \log ۸$ — $۴)\ \log ۵۶$

$۲)\log ۴۹$ — $۵)\log ۵$

$۳)\ \log ۱۴$ — $۶)\log ۲۵$

حل :

$$۱)\ \log ۸=\log ۲^{۳}=۳\log ۲=۳(۰/۳۰۱۰)=۰/۹۰۳۰$$

$$۲)\log ۴۹=\log ۷^{۲}=۲\log ۷=۲(۰/۸۴۵۰)=۱/۶۹$$

$$۳)\ \log ۱۴=\log ۲\times ۷=\log ۲+\log ۷=۰/۳۰۱۰+۰/۸۴۵۰=۱/۱۴۶$$

$$۴)\ \log ۵۶=\log ۲^{۳}\times ۷=\log ۲^{۳}+\log ۷=۳\log ۲+\log ۷=۳(۰/۳۰۱۰)+(۰/۸۴۵۰)$$

$$=۰/۹۰۳۰+۰/۸۴۵۰=۱/۷۴۸$$

$$۵)\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-(۰/۳۰۱۰)=۰/۶۹۹$$

$$۶)\log ۲۵=\log ۵^{۲}=۲\log ۵=۲(۰/۶۹۹)=۱/۳۹۸$$

تمرین ۱۲ : معادله[1] های زیر را حل کنید.

$۱)\ \log_{۵}^{x}+\log_{۵}^{۳}=\log_{۵}^{۱۲}$ — $۴)\ \log^{x+۳}+\log^{x}=۱$

$۲)\ ۳\log x=\log ۸$ — $۵)\ \log_{۲}^{۴x}-\log_{۲}^{x-۳}=۳$

$۳)\ ۲\log x+\log ۳=\log ۲۷$ — $۶)\ \log^{۱-x}-\log^{۲}=\log^{۵}$

حل:

[1] . توجه کنید که بنابر تعریف لگاریتم، جوابی از یک معادله‌ی لگاریتمی، قابل قبول است که به ازای آن لگاریتم صفر یا لگاریتم عدد منفی، پیش نیاید.

$$۱)\ \log_{۵}^{x}+\log_{۵}^{۳}=\log_{۵}^{۱۲}\rightarrow\log_{۵}^{۳x}=\log_{۵}^{۱۲}\rightarrow ۳x=۱۲\rightarrow x=۴$$

$$۲)\ ۳\log x=\log ۸\rightarrow\log x^{۳}=\log ۸\rightarrow x^{۳}=۸\rightarrow x=\sqrt[۳]{۸}=۲$$

$$۳)\ ۲\log x+\log ۳=\log ۲۷\rightarrow\log x^{۲}+\log ۳=\log ۲۷\rightarrow\log ۳x^{۲}=\log ۲۷$$

$$\rightarrow ۳x^{۲}=۲۷\rightarrow x^{۲}=۹\rightarrow x=\pm\sqrt{۹}=\pm ۳$$

که ریشه‌ی $x=-۳$ غیر قابل قبول است.

$$۴)\ \log^{x+۳}+\log^{x}=۱\rightarrow\log^{x(x+۳)}=\log^{۱۰}\rightarrow x^{۲}+۳x=۱۰\rightarrow x^{۲}+۳x-۱۰=۰$$

$$\rightarrow(x+۵)(x-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x+۵=۰\rightarrow x=-۵\\ x-۲=۰\rightarrow x=۲\end{cases}$$

که ریشه‌ی $x=-۵$ غیر قابل قبول است.

$$۵)\ \log_{۲}^{۴x}-\log_{۲}^{x-۳}=۳\rightarrow\log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}}=۳\log_{۲}^{۲}\rightarrow\log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}}=\log_{۲}^{۲^{۳}}\rightarrow\log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}}=\log_{۲}^{۸}$$

$$\rightarrow\frac{۴x}{x-۳}=۸\rightarrow ۴x=۸(x-۳)\rightarrow ۴x=۸x-۲۴\rightarrow ۴x-۸x=-۲۴$$

$$\rightarrow -۴x=-۲۴\rightarrow x=\frac{-۲۴}{-۴}=۶$$

$$۶)\ \log^{۱-x}-\log^{۲}=\log^{۵}\rightarrow\log^{\frac{۱-x}{۲}}=\log^{۵}\rightarrow\frac{۱-x}{۲}=۵\rightarrow ۱-x=۱۰\rightarrow x=-۹$$

تمرین۱۳ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$L_{n}(x-۳)=۲$$

حل :

$$L_{n}(x-۳)=۲\rightarrow x-۳=e^{۲}\rightarrow x=۳+e^{۲}$$

***

تمرین برای حل :

۱۴: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف: لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ب: لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود.

پ: اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_{10}^{a} < \log_{10}^{b}$

۱۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log 25 + \log 4$

۲) $\log_{8}^{40} - \log_{8}^{5}$

۳) $\log_{12}^{16} + \log_{12}^{9}$

۴) $3\log 5 + \log 8$

۵) $\log_{9}^{3} - \frac{1}{2}\log_{3}^{81}$

۶) $\log_{2}^{8} - \log_{2}^{5} + \log_{2}^{20}$

۱۶ : عبارت های زیر را طوری بنویسید که فقط یک لگاریتم داشته باشند.

۱) $\log_{5}^{18} - \log_{5}^{3}$

۲) $\dfrac{\log_{2}^{7}}{\log_{2}^{5}}$

۳) $5\log p + 2\log q + 3\log r$

۴) $\log a + \log b - \log c - \log d$

۵) $2\log x - 5\log y - 3\log z$

۱۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log_{125}^{25}$

۲) $\log_{8}^{32}$

۳) $\log_{5}^{\sqrt{125}}$

۴) $\log_{81}^{27}$

۵) $\log_{\sqrt{5}}^{25}$

۶) $\log_{\sqrt{3}}^{729}$

۷) $\log_{\frac{1}{20}}^{400}$

۱۸: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b و c به دست آورید.

۱) $\log 49$

۲) $\log 128$

۳) $\log 21$

۴) $\log 28$

۵) $\log 42$

۶) $\log 5$

۷) $\log 576$

۸) $\log_{2}^{7}$

۹) $\log_{7}^{2}$

۱۰) $\log_{81}^{49}$

۱۹ : اگر $\log ۳ = ۰/۴۷۷۱$ و $\log ۷ = ۰/۸۴۵۰$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱) $\log ۹$ ۳) $\log ۲۱$ ۵) $\log ۶۳$

۲) $\log ۴۹$ ۴) $\log ۲۱۰$ ۶) $\log_{۳}^{۷}$

۲۰ : اگر $\log^{۲} = ۰/۳$ باشد، مقدار $\log^{\frac{۲۵}{۴}}$ را محاسبه کنید.

۲۱ : مقدار x را از تساوی مقابل به دست آورید. $\log_{x+۱}^{۶۴} = ۲$

۲۲ : اگر $\log_{x}^{۸۱} = -۴$ مقدار x را بیابید.

۲۳ : معادله‌ی $\log_{x}^{۲x+۱۵} = ۲$ را حل کنید.

۲۴ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\log^{۲x+۱} = ۲\log^{۳}$

۲) $\log^{۲x+۵} - \log^{۳} = ۲\log^{۵}$

۳) $\log x^{۴} = ۴\log^{۳}$

۴) $\log^{۳x+۱} = \log^{۵} + ۳\log^{۲}$

۵) $\log_{۲}^{x} + \log_{۲}^{۵} = \log_{۲}^{۱۵۰} - \log_{۲}^{۳}$

۶) $\log^{x} + \log^{x+۲} = \log^{۳}$

۷) $L_n(x-۲) = ۰$

۸) $L_n(۴x-۵) = L_n(۲-x)$

۹) $L_n(۲x-۱) + L_n(x-۷) = L_n ۷$

۱۰) $\log_{۲}^{x+۱} + \log_{۲}^{x+۴} = ۲$

۲۵ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log^{x+۱} + \log^{x-۱} = \log^{۳}$$

۲۶ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log^{۲-x} + \log^{۱-x} = \log^{۵} + ۲\log^{۲}$$

۲۷ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $(e^{x}-۵)(۲e^{x}-۷) = ۰$

۲) $(e^{x}+۳)^{۲} - ۲۵ = ۰$

۳) $(۲^{x}-۱)(۲^{x}-۳) = ۰$

۴) $۳^{۲x} - ۴\times ۳^{x} - ۴۵ = ۰$

۵) $۹^{x} = ۲\times ۳^{x+۲} - ۴۵$

۶) $۲e^{۲x} + e^{x} - ۳ = ۰$

۷) $|e^{x}-۱| = |۳-۲e^{x}|$

۸) $۱۰^{\log(x+۱)} = ۳$

***

قسمت سوّم : اثبات روابط لگاریتمی

در اینجا روابط لگاریتمی را که پیش از این بیان کرده ایم، اثبات می کنیم.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow a.b = x^\alpha . x^\beta \rightarrow a.b = x^{\alpha+\beta} \rightarrow \log_x^{a.b} = \alpha + \beta \rightarrow \log_x^{a.b} = \log_x^a + \log_x^b$$

توجه : اثبات تعمیم این رابطه‌ی به مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز به همین صورت انجام می گیرد.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

دانش آموزان عزیز می توانند، این تساوی را خود اثبات کنند.

***

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \rightarrow \frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \alpha - \beta \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \log_x^a - \log_x^b$$

تمرین۲۸ : به کمک رابطه ی فوق ثابت کنید که $\log_x^{\frac{۱}{a}} = -\log_x^a$

***

۳ : لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow (a)^n = (x^\alpha)^n \rightarrow a^n = x^{n\alpha} \rightarrow \log_x^{a^n} = n\alpha \rightarrow \log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

۴ : لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}\log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow a = (x^{m\alpha})^{\frac{۱}{m}} \rightarrow a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \rightarrow \log_{x^m}^a = \frac{\alpha}{m}$$

$$\rightarrow \log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}(\alpha) \rightarrow \log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}(\log_x^a)$$

۵ : توان لگاریتمی

$$x^{\log_x^a} = a$$

اثبات : فرض کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس $x^\alpha = a$ و این یعنی $x^{\log_x^a} = a$

۶ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که

$$\log_b^a = \alpha \rightarrow b^\alpha = a \qquad (۱)$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow x^\beta = b \qquad (۲)$$

از روابط(۱) و(۲) می توان نتیجه گرفت :

$$(x^{\beta})^{\alpha}=a \rightarrow x^{\alpha\beta}=a \rightarrow \alpha\beta=\log_x^a$$

پس :

$$\log_b^a \times \log_x^b=\log_x^a$$

نتیجه :

$$\boxed{\log_b^a=\frac{\log_x^a}{\log_x^b}}$$

***

تمرین برای حل :

۲۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

$۱)\ \log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$ $\qquad$ $۲)\ a^{\log^b}=b^{\log^a}$ $\qquad$ $۳)\ \log_{b^n}^{a^n}=\log_b^a$

۳۰ : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$۱)\ \log_۳^{۱۸}\times\log_{۱۸}^{۸۱}$ $\qquad$ $۲)\ \frac{۱}{\log_{۱۸}^{۳}}-\frac{۱}{\log_۲^۳}$

۳۱ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

الف) $۲\log_{۱۰}^{۲}+\log_{۱۰}^{۲۵۰}=$ $\qquad$ ب) $\log_۴^۳\times\log_۳^{۱۶}=$ $\qquad$ ج) $۳\log_{۱۰}^{\sqrt[۳]{۴}}+\log_{۱۰}^{۲۵}=$

د) $\log_۸^{\frac{۱}{۳۲}}=$ $\qquad$ هـ) $۲^{\log_۲^۵-\log_۲^۳}=$

۳۲ : اگر $\log_۳^۵=b$ و $\log_۳^۲=a$ باشد، مقدار $\log_۴^{۱۰}$ را بیابید.

۳۳ : مقدار x از معادلهی $۲\log_۳^x-\log_{\sqrt{۳}}^x-\log_{\frac{۱}{۳}}^x=\frac{۱}{۳}$ به دست آورید.

۳۴ : جواب معادلهی $\log_۴^{\log_۳^{\log_۲^x}}=۰$ را تعیین کنید.

۳۵ : اگر $a^2+b^2=6ab$ ، آنگاه ثابت کنید که $\log\frac{a-b}{2}=\frac{\log a+\log b}{2}$

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم : تابع نمایی و تابع لگاریتمی

در این درس با توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می شویم. شناخت این توابع جهت مدل سازی بسیاری از پدیده های طبیعی می تواند مفید باشد.

قسمت اوّل : تابع نمایی

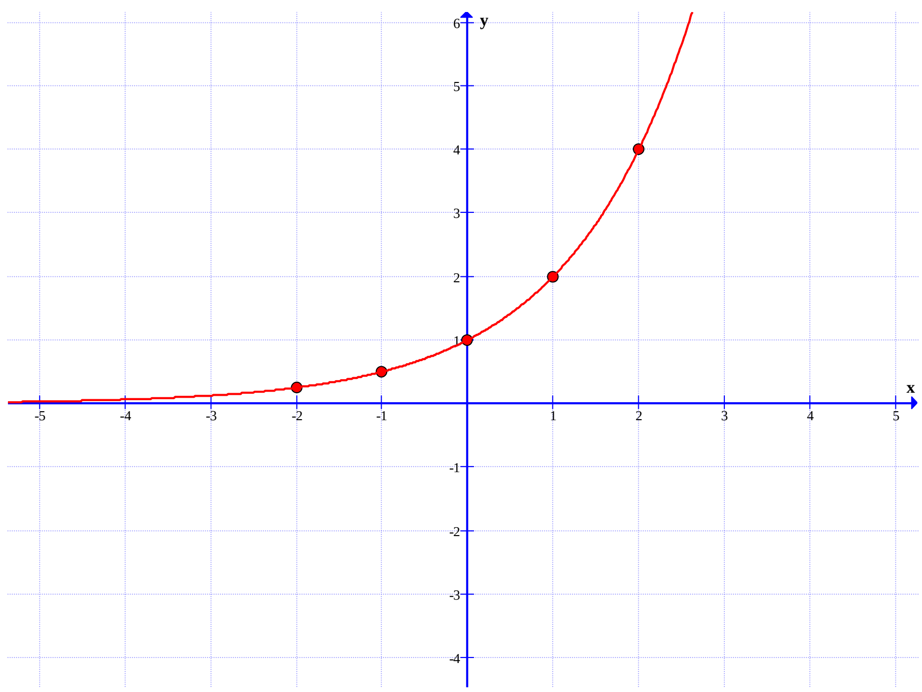
هر تابع به صورت $f(x)=a^x$ به شرط اینکه $a>۰$ و $a\neq ۱$ را تابع نمایی می نامند.

مانند تابع $f(x)=۳^x$

تمرین ۱ : نمودار تابع $f(x)=۲^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

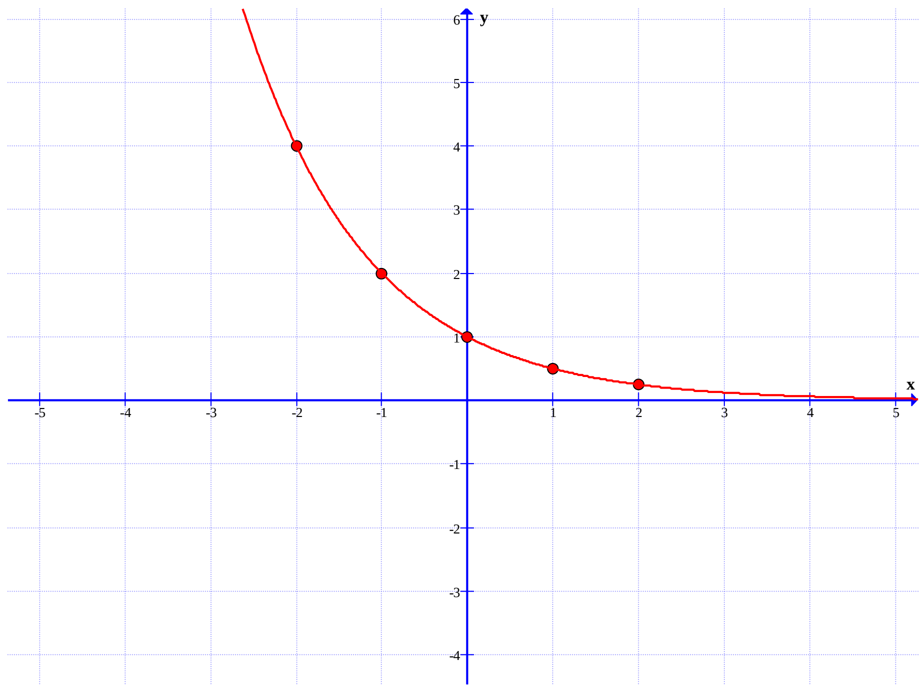
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



تمرین۲ : نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دسـتگاه مختـصات تعیـین مـی کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



توجه : هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ka^{x}$ کـه در آن $(k\neq ۰ , a>۰ , a\neq ۱)$ بـا تـابع نمـایی رفتـاری مشابه دارند و به همین دلیل می گویند، این توابع **رفتار نمایی** دارند. برای مثال، توابع $f(x)=۳\times ۲^{x}$ و $g(x)=(\frac{۲}{۵})^{x-۱}$ رفتار نمایی دارند.

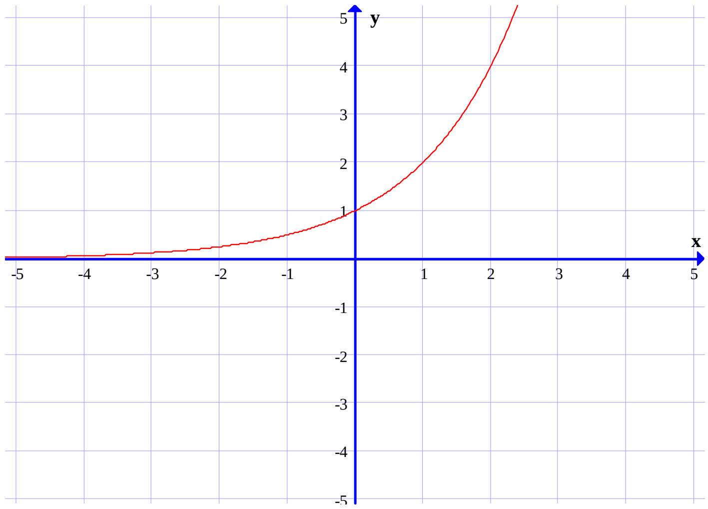
❋❋❋

خواص تابع نمایی

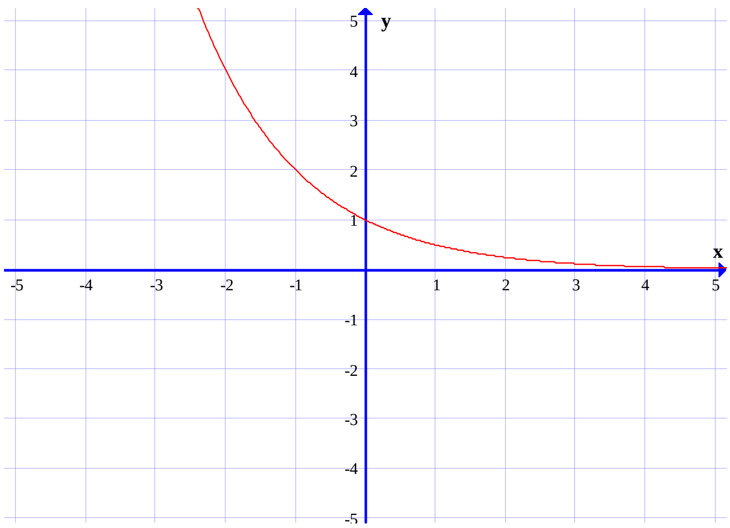
هر تابع نمایی به صورت $y=a^x$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اوّل :

اگر $a>1$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می یابند.



همچنین اگر $0<a<1$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می یابند.



اگر پایه‌ی تابع نمایی عدد نپرین $(e=2/71)$ باشد. تابع ، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

ویژگی دوّم : هر تابع نمایی $y=a^x$ محور عرض ها را در نقطه‌ی $(0,1)$ قطع می کند.

ویژگی سوّم : دامنه‌ی تابع نمایی $y=a^x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است.

ویژگی چهارم : نمودار تابع از یک سمت، کنار محور طول ها قرار می گیرد و از روی آن عبور نمی کند، در اصطلاح گفته می شود که محور طول ها، مجانب افقی نمودار تابع $y=a^x$ می باشد.

توجه : برای رسم نمودار تابع نمایی تعیین مجانب افقی مهم است.

تمرین برای حل :

۳ : تابع $y=(\sqrt{۳})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۴ : تابع $y=-۲+(\frac{۱}{۳})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۵ : نمودار تابع $y=x^۲$ در چند نقطه نمودار تابع $y=۲^x$ را قطع می کند؟

۶ : کدام یک از توابع زیر، یک تابع نمایی است؟

الف) $f(x)=x^۳$ ب) $f(x)=(۲x)^x$ ج) $f(x)=(\sqrt{۲})^x$ د) $f(x)=(\sqrt{x})^۳$

۷ : در تابع $f(x)=a^x$

الف : اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x ، مقادیر f .... می یابند.

ب : اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x ، مقادیر f .... می یابند.

۸ : محل برخورد نمودار تابع $f(x)=۳^{۲x+۱}$ با محور عرض ها را به دست آورید.

۹ : مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=۱+۲^x$ را تعیین کنید و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۱۰ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=۲^{x+۱}$ ب) $f(x)=۲^{x-۲}$

۱۱ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y=(\sqrt{۲})^x$ ب) $y=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^x$

۱۲ : اگر $f(x)=۳-۲\log_{۴}^{(\frac{x}{۲}-۵)}$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به دست آورید.

۱۳ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y=(\sqrt{۲})^{x}$ ب) $y=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{x}$

***

قسمت دوّم : تابع لگاریتمی

هر تابع به صورت $y=\log_{a}^{x}$ (به شرط اینکه $a\neq ۱$ و $a>۰$ و $x>۰$) را یک تابع لگاریتمی می نامند.

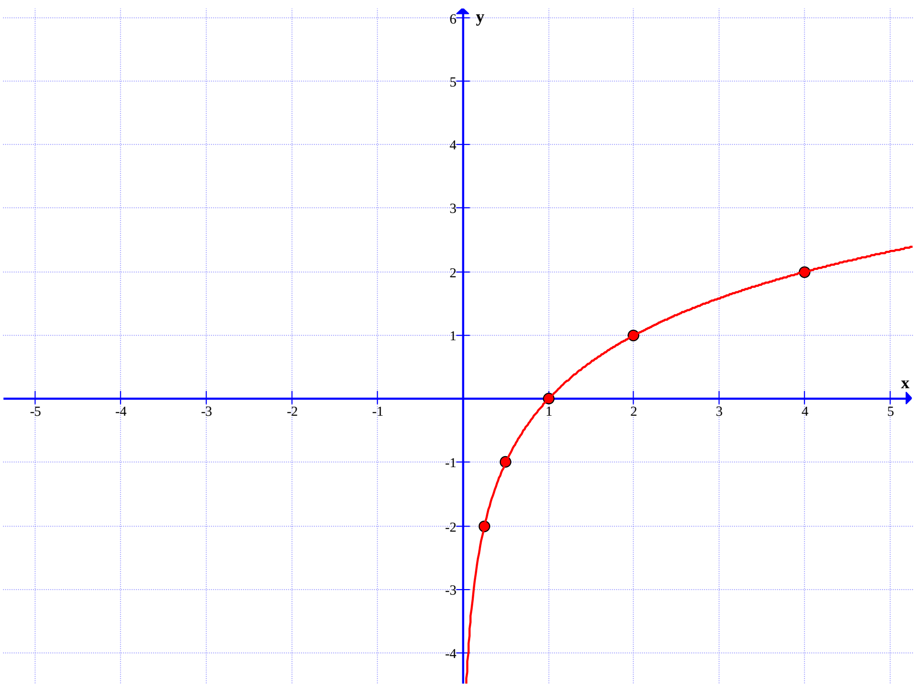
مثال :

$$y=\log_{۲}^{x}$$

تمرین۱۴ : نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

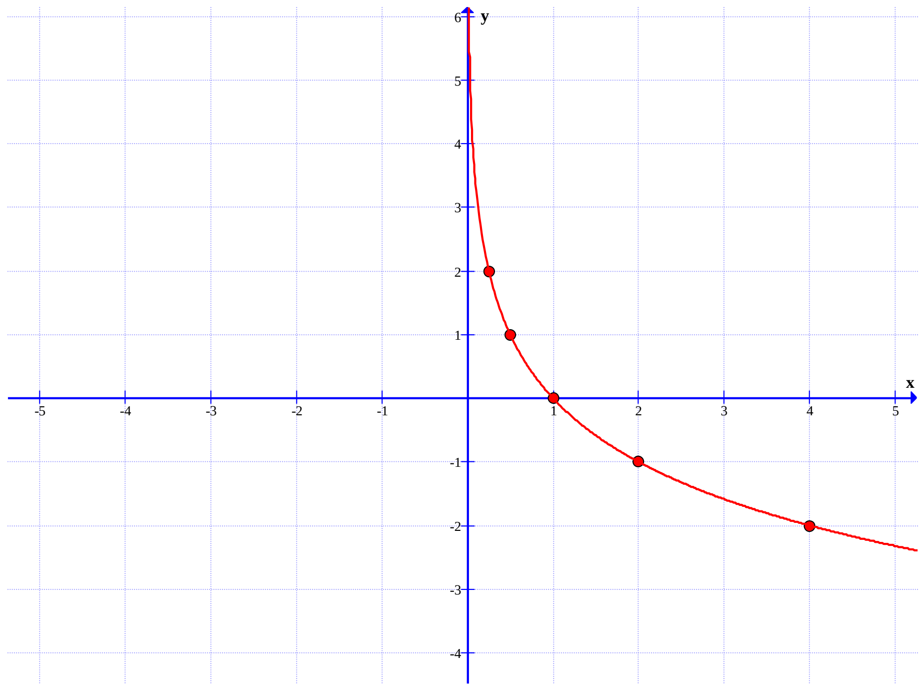
x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	-۲	-۱	۰	۱	۲



تمرین ۱۵ : نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می‌کنیم.

x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	۲	۱	۰	۱−	۲−

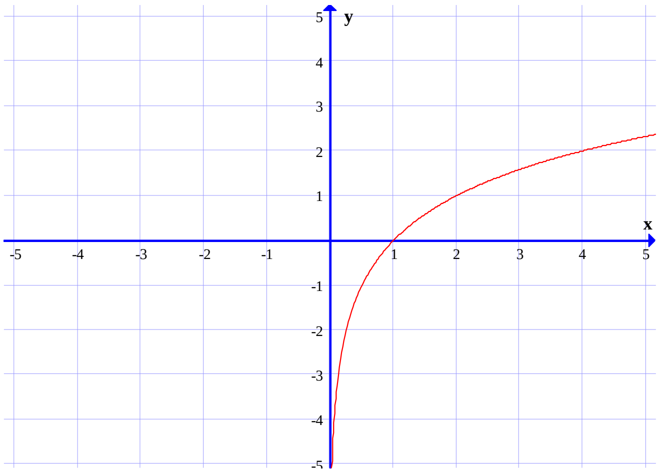


خواص تابع لگاریتمی

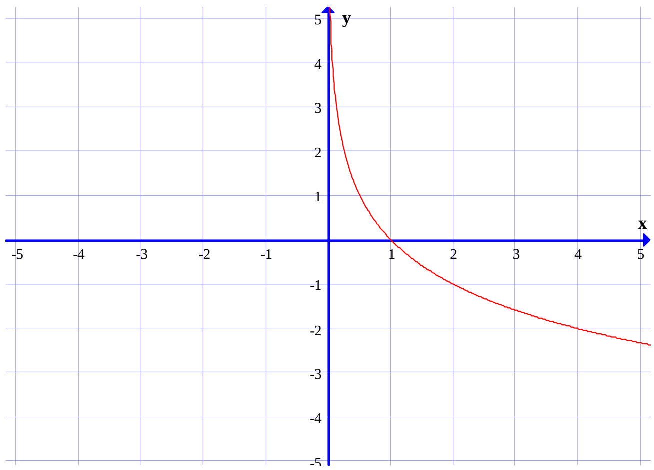
هر تابع لگاریتمی به صورت $y=\log_{a}^{x}$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اوّل :

اگر $a>۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می یابند.



همچنین اگر $\circ < a < ۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. . یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می یابند.



اگر پایه‌ی تابع لگاریتمی عدد نپرین ($e = ۲/۷۱$) باشد. تابع ، را تابع لگاریتمی طبیعی می نامند.

ویژگی دوّم : هر تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ محور طول ها را در نقطه‌ی $(۱,۰)$ قطع می کند.

ویژگی سوّم : دامنه‌ی تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

توجه : برای رسم نمودار تابع لگاریتمی، تعیین مجانب قائم مهم است.

***

تمرین برای حل :

۱۶ : دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_{۲}^{x+۱}$ را به دست آورید.

۱۷ : نمودار تابع $y=\log_{\sqrt{۲}}^{x}$ را رسم کنید.

۱۸ : ابتدا دامنه‌ی تابع $y=\log_{۲}^{x-۱}$ را به دست آورده و سپس نمودار آن را رسم کنید.

۱۹ : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را برای تابع لگاریتم به صورت $f(x)=\log_{a}^{x}$ تعیین کنید.

الف: تابع لگاریتم محور y ها را قطع می کند.

ب : دامنه‌ی تابع لگاریتمی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

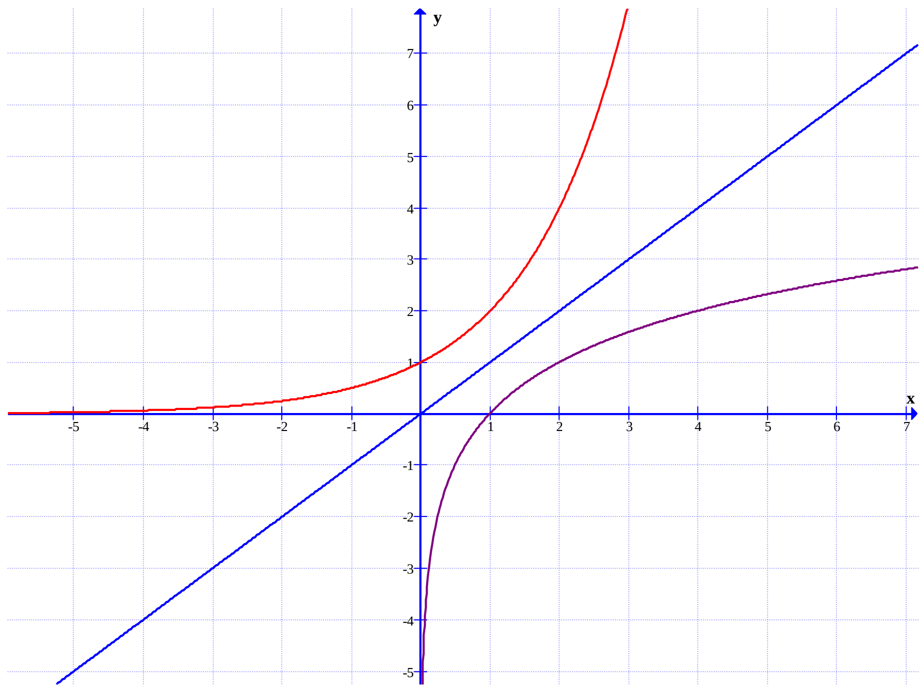
ج : برد تابع لگاریتمی، اعداد حقیقی مثبت است.

توجه ۱: تابع نمایی $y=a^{x}$ یک به یک است و لـذا معکـوس پـذیر مـی باشـد. معکـوس آن یـک تـابع لگاریتمی به صورت زیر است. (ثابت کنید.)

$$y=\log_{a}^{x}$$

لذا نمودار تابع نمایی $y=a^{x}$ و معکوس آن یعنی $y=\log_{a}^{x}$ نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم قرینه اند.

در زیر نمودار تابع $f(x)=۲^{x}$ و معکوس آن یعنی $g(x)=\log_{۲}^{x}$ را مشاهده می کنید.



بنابراین اگر نقطه‌ی (b,c) روی تابع $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی (c,b) روی نمودار $y=\log_a^x$ قرار دارد.

توجه ۲ :

الف : اگر $a>۱$ با توجه به صعودی بودن دو تابع $f(x)=a^x$ و $f(x)=\log_a^x$ می توان نوشت:

$$a^x > a^y \to x > y$$

$$\log_a^x > \log_a^y \to x > y$$

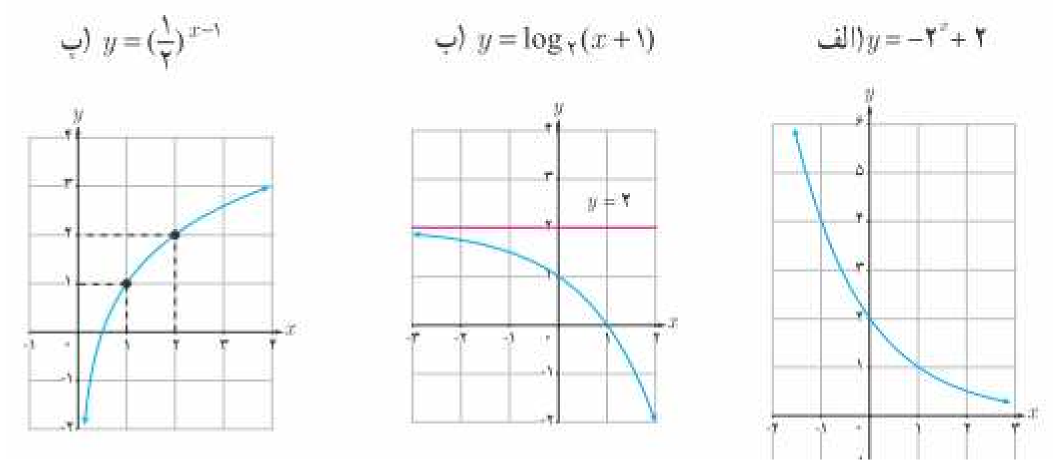
ب : اگر $۰<a<۱$ با توجه به نزولی بودن دو تابع $f(x)=a^x$ و $f(x)=\log_a^x$ می توان نوشت:

$$a^x > a^y \to x < y$$

$$\log_a^x > \log_a^y \to x < y$$

***

تمرین ۲۰ : مشخص کنید، هر یک از نمودار های زیر به کدام یک از ضابطه های زیر تعلق دارد؟



تمرین ۲۱ : خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین ۲۲ : خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین برای حل :

۲۳ : تعیین کنید که خط $y=\sqrt{۷}$، نمودار تابع $y=۲^x$ را بین کدام دو عدد صحیح قطع می کند؟

۲۴ : دامنه‌ی تابع $y=\log_{x-۱}^{۲}$ را به دست آورید.

۲۵ : فرض کنیم که $f(x)=۴^x+۲$

الف : مقدار $f(-۱)$ را به دست آورید.

ب : اگر $f(x)=۶۶$ مقدار x چقدر است؟

ج : معکوس تابع را تعیین کنید.

۲۶ : نامعادله‌ی $۲^{۳x-۷}>(\frac{۱}{۴})^{x-۴}$ را حل کنید.

۲۷ : نامعادله‌ی $\log_{\frac{۱}{۲}}^{x-۱}<\log_{\frac{۱}{۲}}^{۵-۲x}$ را حل کنید.

***

قسمت سوّم : حل چند مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی

در این به چند مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی اشاره می کنیم.

الف : مسائل مربوط به رشد

اگر $A_\circ$ مقدار اوّلیه و A_t مقدار ثانویه جمعیت انسان ها که با آهنگ رشد r با گذشت زمان t حاصل شـود . در این صورت داریم.

$$A_t=A_\circ(۱+r)^t$$

تمرین۲۸ : ایران در سال ۱۳۵۷ دارای ۳۶ میلیون نفر جمعیت بوده است، اگر آهنگ رشد سالانه‌ی جمعیت در ایران برابر ۰/۰۵ باشد، حساب کنید که پس از ۳۰ سال جمعیت کشور چقدر می شود؟

حل :

$$A_t=A_\circ(۱+r)^t=۳۶(۱+۰/۰۵)^{۳۰}=۳۶\times(۱/۰۵)^{۳۰}=۱۵۵/۵۸ \quad M$$

ب : مسائل مربوط به زوال

به مدت زمانی که طول می کشد که مقدار یک ماده نصف شود را نیمه‌ی عمر آن مـاده مـی نامنـد. اگـر A نیمه‌ی عمر یک ماده و جرم اوّلیه‌ی آن B باشد.آنگاه جرم باقی مانده از این مـاده بعـد از گذشـت t سـال از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$m(t)=B\times ۲^{-\frac{t}{A}}$$

تمرین۲۹ : نیمه‌ی عمر یک نوع ماده‌ی هسته ای حدود ۲۵ سال است، اگر جرم نمونه ای از این مـاده ۲۴ میلی گرم باشد و تغییرات جرم پس از t سال از رابطه‌ی زیر بدست آید.

$$m(t)=۲۴\times ۲^{-\frac{t}{۲۵}}$$

الف : جرم باقی مانده این نمونه بعد از ۵۰ سال را به دست آورید.

ب : حساب کنید که بعد از چند سال جرم باقی مانده برابر ۳ میلی گرم است.

حل :

الف :

$$m(۵۰)=۲۴\times ۲^{-\frac{۵۰}{۲۵}}=۲۴\times ۲^{-۲}=\frac{۲۴}{۴}=۶\ \ mgr$$

ب :

$$m(t)=۳\to ۲۴\times ۲^{-\frac{t}{۲۵}}=۳\to ۲^{-\frac{t}{۲۵}}=\frac{۳}{۲۴}\to ۲^{-\frac{t}{۲۵}}=۲^{-۳}\to -\frac{t}{۲۵}=-۳\to t=۷۵$$

ج : مسائل مربوط به قدرت زلزله

زمانی زلزله به وقوع می پیوندد که انرژی از زمین آزاد شود. بین شدت نسبی زلزلـه (قـدرت آن) بـر حـسب ریشتر و میزان انرژی آزاد شده از آن بر حسب ارگ (Erg)[1] رابطه‌ی زیر وجود دارد.

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

که در آن M قدرت زلزله بر حسب ریشتر و E انرژی آزاد شده بر حسب ارگ می باشد.

تمرین ۳۰ : مقدار انرژی آزاد شده توسط زلزله ای به قدرت ۶/۶ ریشتر را به دست آورید.

حل :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) = ۲۱/۷$$

$$\rightarrow \log E = ۲۱/۷ \rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷} \ Erg$$

تمرین ۳۱ : شدت زلزله‌ی ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ ریشتر گزارش شده است. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده‌ی آن را بر حسب ارگ پیدا کنید.

حل :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷/۲) = ۲۲/۶$$

$$\rightarrow \log E = ۲۲/۶ \rightarrow E = ۱۰^{۲۲/۶} \ Erg$$

د : سایر مسائل

علاوه بر مسائل فوق الاشاره می توان موارد دیگر نیز مطرح نمود.

تمرین ۳۲ : کارآیی کارگر عادی، در کارخانه‌ای پس از t ماه ، روزانه به تعداد $f(t) = ۹۰ - ۴۰e^{-۰/۰۲t}$ واحد است. پس از چند ماه تجربه‌ی کاری ، روزانه ۷۰ واحد را کامل می کند؟ ($L_n ۲ = ۰/۶۸$)

حل :

[1]. اِرگ یکای انرژی در دستگاه واحدهای سانتیمتر- گرم- ثانیه (cgs) است. اِرگ برابر با کار انجام‌گرفته در بالا بردن جرمی برابر با یک هزارم گرم تا ارتفاع یک سانتیمتر است .

۱ ارگ $= ۱۰^{-۷}$ ژول   ۱ ژول $= ۱۰^{۷}$ ارگ

$$f(t)=۹۰-۴۰e^{-۰/۰۲t}\xrightarrow{f(t)=۷۰}۹۰-۴۰e^{-۰/۰۲t}=۷۰\to -۴۰e^{-۰/۰۲t}=-۲۰$$

$$\xrightarrow{\div(-۴۰)}e^{-۰/۰۲t}=\frac{۱}{۲}\to e^{-۰/۰۲t}=۲^{-۱}\to L_n e^{-۰/۰۲t}=L_n ۲^{-۱}$$

$$\to -۰/۰۲t\ L_n e=-L_n ۲\xrightarrow{L_n e=۱}۰/۰۲\ t=۰/۶۸\to t=۳۴$$

تمرین۳۳ : در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتری ها پس از t دقیقه به صورت $f(t)=Ae^{۰/۰۴t}$ است. پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ($L_n ۵=۱/۶۸$)

حل :

$$f(t)=Ae^{۰/۰۴t}\xrightarrow{f(۰)=۱۴۰۰}A=۱۴۰۰$$

$$\to f(t)=۱۴۰۰\ e^{۰/۰۴t}\xrightarrow{f(t)=۷۰۰۰}۱۴۰۰\ e^{۰/۰۴t}=۷۰۰۰\to e^{۰/۰۴t}=۵$$

$$\to ۰/۰۴t=L_n ۵\to ۰/۰۴t=۱/۶۸\to t=۴۲$$

***

تمرین برای حل :

۳۴ : نیمه‌ی عمر یک نوع ماده‌ی هسته ای حدود۳۰ سال است، اگر جرم نمونه ای از این ماده ۱۲۸میلی گرم باشد، جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند، چقدر است؟

۳۵ : اگر جرم باکتری ها در زمان t از فرمول $m(t)=۲^t$ به دست آید، حساب کنید که در چه زمانی جرم باکتری ها حدود ۵۰۰۰ گرم می شود؟

۳۶ : اگر آهنگ رشد جمعیت جهان ۰/۰۲ در سال باشد و در سال ۲۰۱۶ جمعیت جهان ۷/۳۲ میلیارد نفر بوده است. حساب کنید که در سال ۲۰۲۰ جمعیت جهان چقدر می شود؟

۳۷ : در دی ماه ۱۳۸۲ در شهرستان بم زلزله ای با قدرت ۶/۳ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

۳۸ : در آبان ماه ۱۳۹۶در شهرستان کرمانشاه زلزله ای با قدرت ۷/۱ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

۳۹ : بر اثر یک زمین لرزه به میزان $10^{19/6}$ ارگ انرژی از زمین آزاده شده است. حساب کنید که قدرت این زمین لرزه چند ریشتر است؟

۴۰ : اگر بزرگی زمین لرزه در مقیاس ریشتر یک واحد افزایش یابد، میزان انرژی آزاده شده در اثر زمین لرزه چه تغییری خواهد کرد؟

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان